УДК 517.5

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева
(Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Россия)

О ФОРМУЛАХ АДАМАРА ДЛЯ ЭЛЛИПСОВ МЕРОМОРФНОСТИ*

В статье получены формулы для вычисления эллипсов мероморфности функции, заданной рядом по ортонормированным многочленам Якоби $P_{n,\alpha,\beta}$ с $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$. Полученные формулы аналогичны классическим формулам Адамара для кругов мероморфности степенного ряда.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

— разложение в степенной ряд функции, голоморфной в некоторой окрестности нуля. Обозначим через $f_{m,n}$ ганкелевы определители

$$f_{m,n} = \begin{vmatrix} f_{n+1} & \cdots & f_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+m} & \cdots & f_{n+2m-1} \end{vmatrix}, m, n \in \mathbb{N},$$

степенного ряда (1) и положим $l_0(f)$=1, $l_m(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_{m,n}|^{1/n}$.

Пусть $R_m(f)$ — m-й радиус мероморфности функции f, т.е. максимальное из чисел R таких, что функция f допускает мероморфное продолжение в круг $|z| < R$ и имеет в этом круге не более m полюсов.

Хорошо известна следующая теорема Адамара [1] для вычисления радиусов мероморфности функции f.

Теорема (Адамар). *Пусть (1) — степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля. Тогда в вышеуказанных обозначениях при $m = 0, 1, \ldots$ имеют место равенства*

$$R_m(f) = l_m(f)/l_{m+1}(f). \tag{2}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00317) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3906.2008.1).

Частным случаем формул (2) при $m = 0$ является формула Коши–Адамара

$$R_0(f) = \bigl(\varlimsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n}\bigr)^{-1} = 1/l_1(f) \tag{3}$$

для радиуса круга голоморфности функции f.

Из теоремы Адамара следует, что если $\varlimsup_{n\to\infty} |f_{m+1,n}|^{1/n} = 0$, то функция f мероморфна во всей комплексной плоскости и имеет не более m полюсов. Если $f_{m+1,n} = 0$ при всех $n \geq n_0$, то в этом случае равенство $R_m(f) = \infty$ уточняется критерием Кронекера [2] рациональности функции.

Критерий Кронекера. *Пусть* (1) — *разложение в степенной ряд функции* f, *голоморфной в окрестности точки* $z = 0$. *Тогда при всех* $m = 0, 1, \ldots$ *следующие утверждения эквивалентны.*

1°. $f_{m+1,n} = 0$ *при всех* $n \geq n_0$.

2°. *Функция* f *является рациональной функцией, имеющей не более* m *полюсов.*

Пусть $P_{n,\alpha,\beta}(z)$ — ортонормированные многочлены Якоби с параметрами $\alpha, \beta > -1$, $n = 0, 1, \ldots$. Из свойств многочленов Якоби следует, что если $\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|^{1/n} < 1$, то ряд

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_{n,\alpha,\beta}(z) \tag{4}$$

сходится и определяет голоморфную функцию F в некоторой окрестности отрезка $[-1, 1]$. Точнее, пусть $\psi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ — функция (обратная к функции Жуковского), отображающая внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность единичного круга. При $\rho > 1$ обозначим через D_ρ эллипс $D_\rho = [-1, 1] \cup \{z \in \mathbb{C} : |\psi(z)| < \rho\}$. Легко видеть, что эллипс D_ρ имеет фокусы в точках ± 1 и его граница проходит через точку $\frac{\rho+\rho^{-1}}{2}$. Обозначим через $\rho_m(F)$ — максимальное из чисел ρ таких, что функция F допускает мероморфное продолжение в эллипс D_ρ и имеет в этом эллипсе не более m полюсов.

Из хорошо известных свойств многочленов Якоби (см., например, [3]) следует, что для ряда (4) имеет место аналог формулы (3) Коши–Адамара

$$\rho_0(F) = \bigl(\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|^{1/n}\bigr)^{-1}. \tag{5}$$

В случае, когда многочлены Якоби совпадают с классическими многочленами Чебышева (т.е. в случае $\alpha = \beta = -1/2$), параметр $\rho_m(F)$ m-го эллипса мероморфности может быть вычислен по формуле

$$\rho_m(F) = L_m(F)/L_{m+1}(F) \quad , \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где $L_0(F) = 1$, $L_m(F) = \varlimsup_{n\to\infty} |F_{m,n}|^{1/n}$,

$$F_{m,n} = \begin{vmatrix} F_{n+1} & \ldots & F_{n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n+m} & \ldots & F_{n+2m-1} \end{vmatrix}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Это замечание следует непосредственно из теоремы Адамара, примененной к функции $F(\psi^{-1}(w))$, голоморфной в кольце $1 < |w| < \rho_0(F)$, и того факта, что для коэффициентов Лорана функции $F(\psi^{-1}(w)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n w^n$ в случае многочленов Чебышева имеют место равенства $F_0 = f_0$, $F_n = 2f_n$, $n \geq 1$ (см. [3, с. 99]). Формула (6) является прямым аналогом формулы Адамара (2).

В данной статье будет показано, что формула (6) имеет место и в случае многочленов Якоби $P_{n,\alpha,\beta}(z)$ с параметрами α и β такими, что $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$.

Теорема. *Пусть* (4) *— ряд по ортонормированным многочленам Якоби $P_{n,\alpha,\beta}(z)$, где $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$, такой, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |F_n|^{1/n} < 1. \tag{7}$$

Тогда в вышеприведенных обозначениях имеют место равенства (6) *и следующие утверждения эквивалентны.*

1°. $F_{m+1,n} = 0$ *при всех* $n \geq n_0$.

2°. *Функция $F(z)$ является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов.*

Перед доказательством теоремы отметим, что условие теоремы $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$ существенно. Например, можно показать, что при $\alpha = \beta = 0$ (т.е. для многочленов Лежандра) равенство (6) не выполняется уже при $m = 1$.

Доказательство. Хорошо известно [3,4], что для ортонормированных многочленов имеют место трехчленные соотношения

$$zP_n(z) = A_n P_{n-1}(z) + B_n P_n(z) + A_{n+1} P_{n+1}(z). \tag{8}$$

Для ортонормированных многочленов Якоби $P_{n,\alpha,\beta}(z)$ коэффициенты A_n и B_n в равенствах (8) имеют следующий явный вид (см., например, [3, с. 238])

$$A_{n,\alpha,\beta}=2\sqrt{\frac{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta-1)}}, \tag{9}$$

$$B_{n,\alpha,\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}. \tag{10}$$

В частности, при $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$ имеем $A_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{2}$, $B_{n,\alpha,\beta} = 0$, и следовательно, в этом случае равенства (8) записываются в следующем простом виде

$$zP_{n,\alpha,\beta}(z) = \frac{P_{n-1,\alpha,\beta}(z) + P_{n+1,\alpha,\beta}(z)}{2}. \tag{11}$$

Из определения (4) функции F и равенства (11) следует, что при $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{4}$

$$zF(z)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n\frac{P_{n-1,\alpha,\beta}(z)+P_{n+1,\alpha,\beta}(z)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n-1}+F_{n+1}}{2}P_{n,\alpha,\beta}(z) \tag{12}$$

(здесь и далее полагаем $F_{-1} = F_{-2} = \cdots = 0$).

Из формулы Коши–Адамара (3) и ее аналога (5) следует, что

$$R_0(TG) = \rho_0(G) = \bigl(\varlimsup_{n\to\infty} |G_n|^{1/n}\bigr)^{-1}, \tag{13}$$

где T — линейный оператор, ставящий в соответствие всякому ряду $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n P_{n,\alpha,\beta}(z)$ степенной ряд $(TG)(w) = = \sum_{n=0}^{\infty} G_n w^n$. В частности, с учетом условия (7) имеем

$$R_0(TF) = \rho_0(F) > 1. \tag{14}$$

Из равенства (12) следует равенство

$$T\bigl(zF(z)\bigr)(w) = -\frac{F_0}{2}w^{-1} + \frac{w+w^{-1}}{2}T\bigl(F(z)\bigr)(w).$$

Отсюда индукцией по числу $k = 1, 2, \ldots$ получаем равенство

$$T\bigl(z^kF(z)\bigr)(w) = \left(\frac{w+w^{-1}}{2}\right)^k T\bigl(F(z)\bigr)(w) + R_k(w),$$

где $R_k(w)$ — многочлен от w и w^{-1} степени не выше k по w и w^{-1}. Далее, в силу линейности оператора T при любых $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{C}$ имеем равенство

$$T\Big(F(z)\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)\Big)=$$

$$=T\big(F(z)\big)(w)\prod_{j=1}^{k}\big(\frac{w+w^{-1}}{2}-a_j\big)+R_k(a_1,\dots,a_k,w), \qquad (15)$$

где $R_k(a_1,\dots,a_k,w)$ — многочлен от w и w^{-1}, зависящий от $a_1,\dots,a_k$ и имеющий степень не выше k по w и w^{-1}. Полагая

$$F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(z)=F(z)\prod_{j=1}^{k}\big(z-\frac{\lambda_j+\lambda_j^{-1}}{2}\big), \qquad (16)$$

из равенства (15) получаем равенство

$$(TF_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})(w)=(TF)(w)\prod_{j=1}^{k}\big(\frac{w+w^{-1}}{2}-\frac{\lambda_j+\lambda_j^{-1}}{2}\big)+r_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(w),$$

где $r_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(w)$ — многочлен от w и w^{-1} степени не выше k по w и w^{-1}. Перепишем последнее равенство в виде равенства

$$2^kw^k(TF_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})(w)=(TF)(w)\prod_{j=1}^{k}(w-\lambda_j)(w-\lambda_j^{-1})+R_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(w), \qquad (17)$$

где $R_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(w)$ — многочлен от w степени не выше $2k$.

Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ $(k\le m)$ — все полюсы функции TF, лежащие в круге $|w|<R_m(TF)$. Тогда правая, а следовательно, и левая часть равенства (17) голоморфна в круге $|w|<R_m(TF)$. Поэтому $R_0(TF_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})\ge R_m(TF)$. Кроме того, непосредственно из определения (16) функции $F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}$ следует, что функция F имеет в эллипсе $D_{\rho_0(F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})}$ не более $k\le m$ полюсов и, следовательно, $\rho_m(F)\ge\rho_0(F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})$. Поэтому с учетом равенства (13) для функции $G=F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}$ имеем неравенство

$$\rho_m(F)\ge\rho_0(F_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})=R_0(TF_{\lambda_1,\dots,\lambda_k})\ge R_m(TF). \qquad (18)$$

Докажем противоположное неравенство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ $(k \leq m)$ — все полюсы функции F, лежащие в эллипсе $D_{\rho_m(F)}$. Представим их в виде $a_j = \frac{\lambda_j + \lambda_j^{-1}}{2}$, где $1 < |\lambda_j| < \rho_m(F)$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда функция $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ голоморфна в эллипсе $D_{\rho_m(F)}$ и, следовательно,

$$\rho_0(F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}) \geq \rho_m(F). \tag{19}$$

Из равенства (17) видно, что функция TF имеет в круге $|w| < R_0(TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})$ не более $2k$ полюсов, лежащих среди точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}$. k из этих точек, а именно, $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}$ по модулю меньше 1. Следовательно, эти точки полюсами не являются, так как функция TF голоморфна в круге $|w| < 1$ в силу неравенства (14). Таким образом функция TF имеет в круге $|w| < R_0(TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})$ не более $k \leq m$ полюсов, лежащих среди точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Следовательно, $R_m(TF) \geq R_0(TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})$. Отсюда с учетом равенства (13) для функции $G = F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ и неравенства (19) получаем неравенство

$$R_m(TF) \geq R_0(TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}) = \rho_0(F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}) \geq \rho_m(F).$$

С учетом противоположного неравенства (18) имеем равенство $\rho_m(F) = R_m(TF)$. Отсюда и из формул (2) для степенного ряда $TF(w) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n w^n$ получаем равенства (6). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Далее, заметим, что с учетом классического критерия Кронекера для доказательства второй части теоремы (аналога критерия Кронекера) достаточно доказать, что функция F является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов тогда и только тогда, когда функция TF является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов. При $m = 0$ это утверждение (функция F – многочлен тогда и только тогда, когда функция TF – многочлен) следует непосредственно из определения оператора T. Докажем это утверждение при $m > 0$.

Пусть функция F является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов. Тогда при некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $k \leq m$, $|\lambda_j| > 1$ $(j = 1, \ldots, k)$, функция $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ — многочлен. Тогда функция $TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ — тоже многочлен. В силу равенства (17) многочленом является и функция $(TF)(w) \prod_{j=1}^{k} (w- -\lambda_j)(w - \lambda_j^{-1})$. Поэтому функция TF является рациональной функцией, имеющей не более $k \leq m$ полюсов (точки $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}$, по модулю меньшие 1, полюсами не являются, так как функция TF голоморфна в круге $|w| < 1$ в силу неравенства (14)).

В обратную сторону, пусть функция TF является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leq m)$ — ее полюсы. Тогда функция $(TF)(w) \prod_{j=1}^{k}(w-\lambda_j)(w-\lambda_j^{-1})$ — многочлен. В силу равенства (17) многочленом является и функция $w^k(TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})(w)$, а следовательно, и голоморфная в круге $|w| < 1$ функция $TF_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$. Отсюда получаем, что функция $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ — многочлен. По определению функции $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$ это означает, что функция F — рациональная функция, имеющая не более $k \leq m$ полюсов. Таким образом, теорема доказана.

1. *Hadamard J.* Essai sur l'e′tude des fonctions donne′es par leur de′veloppement de Taylor // J. Math. — 1892. — 8, 4. — P. 101–186.

2. *Kronecker L.* Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen // Monatsberichte der Koniglich Preussichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — 1881. — P. 535–600.

3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 2007.

4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.