Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 404-430

УДК 517.5

А. Л. Шидліч (Ін–т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТОРІВ S^p_Φ

В роботі наведено огляд результатів, пов'язаних зі знаходженням апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ, та встановлено порядки прямування до нуля при $\sigma \to \infty$ аналогів найкращих σ-членних наближень класів Ψ-інтегралів елементів, що належать одиничним кулям простору S^q_Φ в "метриках" просторів S^p_Φ.

В роботі наведено огляд результатів, пов'язаних зі знаходженням апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ, та встановлено порядки прямування до нуля при $\sigma \to \infty$ аналогів найкращих σ-членних наближень класів Ψ-інтегралів елементів, що належать одиничним кулям простору S^q_Φ в "метриках" просторів S^p_Φ, $0<p, q<\infty$. Ці простори виникли в роботах О. І. Степанця в результаті пошуку ним нових підходів до задач теорії наближення функцій багатьох змінних. З часом цей матеріал сформувався в окрему тематику, по якій на даний час написано більше, ніж три десятки робіт. Підхід, який був при цьому запропонований О.І. Степанцем, дозволяє поширювати ідеї та методи теорії наближень на абстрактні лінійні простори, що в свою чергу дає можливість дивитися на функції із загальних позицій аналізу та приводить до досить змістовних результатів.

У 2006 році в [1] О.І. Степанець зробив огляд результатів, пов'язаних зі знаходженням апроксимативних характеристик просторів S^p_φ та їх узагальнень і, зокрема, просторів S^p_Φ. Проте після виходу цієї роботи, зокрема в роботі [2], було отримано низку нових тверджень для цих просторів. Ці твердження в поєднанні з результатами даної роботи суттєво доповнюють результати, наведені в роботі [1], і навіть дають змогу говорити про завершеність в певному сенсі досліджень по знаходженню апроксимативних характеристик просторів S^p_Φ.

1. Простори S^p_Φ. Простори S^p_Φ було введено в роботі [3]. При їх означенні та надалі в роботі будемо здебільшого використовувати позначення та означення, запропоновані в [3].

Нехай $\mathfrak{X}$ і Y — деякі лінійні простори векторів x та y відповідно. Припустимо, що на $\mathfrak{X}$ задано лінійний оператор Φ, який діє в Y, а на деякій підмножині $Y' \subset Y$ визначено функціонал f. Нехай, далі, $E(\Phi)$ – множина значень оператора Φ, і $\mathfrak{X}'$ – прообраз множини $Y' \subset E(\Phi)$ при відображенні Φ. В такому випадку на $\mathfrak{X}'$ можна визначити функціонал f' за допомогою рівності

$$f'(x) = f(\Phi(x)), \qquad x \in \mathfrak{X}' \tag{1}$$

Якщо в ролі f вибрати функціонал, що задає на Y' норму (або квазінорму), то рівність (1) буде визначати аналогічну величину на $\mathfrak{X}'$. Саме такі міркування лежать в основі подальших побудов.

Нехай $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, $m \geq 1$, — m-вимірний евклідів простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, наділений скінченною σ-адитивною мірою $d\mu$, A — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a — або скінченне число, або ж $a = \infty$:

$$\mathrm{mes}_\mu A = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ — множина всіх заданих на A функцій $y = y(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

При заданому $p \in (0, \infty]$ через $L_p(A, d\mu)$ позначають підмножину функцій з $Y(A, d\mu)$, для яких величина

$$||y||_{L_p(A,d\mu)} = \begin{cases} \left(\int\limits_A | \, y(\mathbf{x})|^p \, d\mu \right)^{1/p}, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbf{x} \in A} | \, y(\mathbf{x})|, & p = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

є скінченною.

Відомо, що функціонал $||\cdot||_{L_p(A,d\mu)}$, визначений співвідношенням (2), при $p \geq 1$ задає норму, а при $p \in (0,1)$ — квазінорму на $L_p(A, d\mu)$.

Нехай тепер $\mathfrak{X}$ — деякий лінійний простір векторів x, і Φ — лінійний оператор, який діє з $\mathfrak{X}$ в $Y(A, d\mu)$:

$$\Phi : \mathfrak{X} \to Y(A, d\mu), \quad \Phi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \widehat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \widehat{x} \in Y(A, d\mu).$$

Покладають

$$S^p_\Phi = S^p_\Phi(\mathfrak{X}; Y) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : ||\widehat{x}||_{L_p(A,d\mu)} < \infty \right\}, \quad p \in (0, \infty]. \tag{3}$$

Таким чином, множина S^p_Φ — множина всіх векторів $x \in \mathfrak{X}$, які є прообразами функцій з множини $L_p(A,d\mu)$ при відображенні Φ.

Елементи $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$ вважають тотожними, якщо за мірою $d\mu$ майже скрізь $\widehat{x}_1(\mathbf{t}) = \widehat{x}_2(\mathbf{t})$.

Для елементів $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$, $p \in (0, \infty]$, визначають Φ-відстань між ними за допомогою рівності

$$\rho_\Phi(x_1; x_2)_p = ||\Phi(x_1 - x_2)||_{L_p(A, d\mu)}.$$

Нульовим елементом множини S^p_Φ називається елемент θ, для якого майже скрізь на A має місце рівність $\widehat{\theta}\,(\mathbf{t}) = 0$.

Відстань $\rho_\Phi(\theta; x)_p$, $x \in S^p_\Phi$, називаєтся Φ–нормою елемента і позначається через $||\,x||_p = ||\,x||_{p,\Phi}$. Таким чином, за означенням

$$||\,x||_p = ||\,x||_{p,\Phi} = \rho_\Phi(\theta; x)_p = ||\widehat{x}||_{L_p(A, d\mu)}. \tag{4}$$

Відомо, що при всіх $p \in (0, \infty]$ S^p_Φ — лінійний простір. При $p \geq 1$ функціонал $||\cdot||_p$, який визначається співвідношенням (4), задовольняє всі аксіоми норми, а при $p \in (0, 1)$ — аксіоми квазінорми. Тому S^p_Φ при $p \geq 1$ — лінійний нормований простір, а при $p \in (0, 1)$ — простір із квазінормою.

Розглянемо декілька прикладів найпростіших реалізацій розглядуваних побудов. Всі вони взяті з роботи [3]. При цьому будемо казати, що деякий простір $\mathfrak{N}$ є частковим випадком простору S^p_Φ, якщо його можна отримати шляхом відповідного вибору простору $\mathfrak{X}$, міри $d\mu$ і оператора Φ.

1. Простір S^p_φ. Нехай $\mathfrak{X}$ — деякий лінійний комплексний простір і $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – фіксована зчисленна система в ньому. Припустимо, що для довільної пари $x, y \in \mathfrak{X}$, в якій хоча б один з векторів належить до φ, визначено деяке число — "скалярний добуток" (x, y) так, що виконуються умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, де $\overline{z}$ — число, комплексно спряжене з z;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Кожному елементу $x \in \mathfrak{X}$ ставлять у відповідність систему чисел $\widehat{x}(k)$ за допомогою рівностей

$$\widehat{x}(k) = \widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad (k \in \mathbb{N}),$$

і при фіксованому $p \in (0, \infty)$ покладають

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{5}$$

Елементи $x, y \in S^p_\varphi$ вважаються тотожними, якщо при всіх $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Для векторів $x, y \in \mathfrak{X}$ φ-відстань між ними означається рівністю

$$\rho_\varphi(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \widehat{x}_\varphi(k) - \widehat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Нульовим елементом простору S^p_φ називається вектор θ, для якого $\widehat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Відстань $\rho_\varphi(\theta, x)_p$, $x \in S^p_\varphi$, називається φ-нормою елемента x і позначається через $||\, x||_{p,\varphi}$. Таким чином,

$$||\, x||_{p,\varphi} = \rho_\varphi(\theta, x)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \widehat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Простори S^p_φ є частковим випадком просторів S^p_Φ. Дійсно, якщо в даному просторі $\mathfrak{X}$ означити оператор Φ, який кожному $x \in \mathfrak{X}$ ставить у відповідність послідовність $y = \{\widehat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$; за множину $(\mathbb{R}^m, d\mu)$ взяти простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $d\mu$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^1$ цілочислових точок k, в яких $\mu(k) \equiv 1$; і покласти $A = \left\{ k \in \mathbb{Z}^1, \quad k \geq 1 \right\}$, то в такому випадку $Y(A, d\mu)$ — множина всіх послідовностей y, і функціонал (2) має вигляд

$$||\, y||_{L_p(A, d\mu)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty)$$

1′. Простори $S^{p,\,\mu}_\varphi$. Ці простори вводяться так само, як і простори S^p_φ, тільки при цьому функціонали

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

в рівностях, які відповідають рівностям (5)–(7), замінюються на функціонали

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — задана система невід'ємних чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому якщо $\mu_k \equiv 1$, то $S_{\varphi}^{p,\,\mu} = S_{\varphi}^{p}$.

Зрозуміло, що і ці простори є частковим випадком просторів S_{Φ}^{p}. Множиною $(\mathbb{R}^m, d\mu)$ тут, як і для простору S_{φ}^{p}, є простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $d\mu$, зосередженою на множині $\mathbb{Z}^1$ цілочислових точок k, в яких $\mu(k) = \mu_k$ і $A = \{k \in \mathbb{Z}^1,\ k \geq 1\}$.

2. Простір $S_{\mathcal{F}}^{p}(L)$. Нехай, як і раніше, $\mathbb{R}^m$ — m-вимірний, $m \geq 1$, евклідів простір, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — його елементи, $\mathbb{Z}^m$ — цілочислова решітка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{xy} = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Нехай, далі, $L = L(\mathbb{R}^m, 2\pi)$ — множина всіх 2π-періодичних по кожній зі змінних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots x_m)$, сумовних за звичайною мірою Лебега на кубі періодів $Q^{\,m}$,

$$Q^{\,m} = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, -\pi \leq x_k \leq \pi, k = 1, 2, \ldots, m\}\,.$$

Візьмемо за $\mathfrak{X}$ простір $L(\mathbb{R}^m, 2\pi)$ і означимо на ньому оператор Φ (який будемо позначати через $\mathcal{F}$), поклавши

$$\mathcal{F}(f) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{kx}} d\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m.$$

Цей оператор відображає простір $L(\mathbb{R}^m, 2\pi)$ у множину Y функцій $y(\mathbf{t})$, заданих на цілочисловій решітці $\mathbb{Z}^m$. Нехай $d\mu$ — міра в просторі $\mathbb{R}^m$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^m$, де вона дорівнює одиниці. В цьому випадку функціонал (2) має вигляд

$$||f||_{L_p(\mathbb{R}^m, d\mu)} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_m} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \Bigg)^{\frac{1}{p}} = \Bigg(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty),$$

і простір S_{Φ}^{p} (який позначимо через $S_{\mathcal{F}}^{p}(L)$) визначається співвідношенням

$$S_{\mathcal{F}}^{p}(L) = \left\{ f \in L:\ \ \Bigg(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq \infty \right\}.$$

Зазначимо, що простори $S_{\mathcal{F}}^{p}(L)$ співпадають з розглянутими вище просторами $S_{\varphi}^{p}(L)$, які породжуються множиною L і системою $\varphi = \{\tau_s\}_{s=1}^{\infty}$,

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{i\mathbf{k}_s \mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}_s \in \mathbb{Z}^m, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

яка отримується з системи

$$(2\pi)^{-m/2}e^{i\mathbf{kx}}, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m,$$

шляхом довільної фіксованої нумерації її членів.

3. Розглянемо приклад, в якому простори S^p_Φ не є сепарабельними. Візьмемо за $\mathfrak{X}$ простір функцій $L_2(\mathbb{R}^m)$, а за A — простір $L_2(\mathbb{R}^m)$ зі звичайною нормою Лебега і задамо оператор Φ перетворенням Фур'є:

$$\Phi(f)=\widehat{f}(\mathbf{t})=\mathcal{F}(f;\mathbf{t})=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{tx}}d\mathbf{x},\ f\in L_2(\mathbb{R}^m).$$

Відомо (див., наприклад, [4] (Гл.I)), що оператор $\mathcal{F}$ є унітарним на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Отже, Φ-норма $||f||_{2,\Phi}$ елемента f співпадає з його нормою в просторі $L_2(\mathbb{R}^m)$:

$$||f||_{2,\Phi}=||f||_{L_2(\mathbb{R}^m)},$$

і в цьому випадку простір $S^2_\Phi(L_2(\mathbb{R}^m),\ \mathbb{R}^m,\ dx)$ за формулою (3) має вигляд $S^2_\Phi=\{f:\ f\in L_2(\mathbb{R}^m)\}$, тобто $S^2_\Phi=\mathfrak{X}=L_2(\mathbb{R}^m)$.

4. Розглянемо ще частковий випадок просторів S^p_Φ, які породжуються тотожним оператором, тобто коли $\Phi\equiv I$. Зрозуміло, що тоді повинно бути $\mathfrak{X}=Y(A,d\mu)$, $\widehat{x}=x$, і згідно з (3)

$$S^p_L=\{x\in\mathfrak{X}: ||x||_{L_p(A,d\mu)}<\infty\}=L_p(A,d\mu), \quad p\in(0,\infty).$$

2. Мультиплікатори. Наближаючі агрегати і об'єкти наближень. В ролі наближаючих агрегатів для елементів $x\in S^p_\Phi$ використовуються елементи з S^p_Φ, у яких образи мають носії γ_σ заданої міри σ. Відзначимо, що саме цей принцип закладено в класичному випадку при побудові, наприклад, тригонометричних поліномів для наближення даної періодичної функції, якщо під оператором Φ розуміти відображення функцій у множину їх коефіцієнтів Фур'є. В загальному випадку тут виникають проблеми, які викликані тим, що простори S^p_Φ можуть бути не повними. У зв'язку з цим вводять наступні позначення [3].

Нехай $\omega=\omega(\mathbf{t})$ — деяка функція з $Y(A,d\mu)$. Тоді через M^ω_Φ позначають оператор, який діє з $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, і який даному $x\in\mathfrak{X}$ ставить у відповідність елемент $x_\omega\in\mathfrak{X}$ такий, що якщо $\Phi(x)=\widehat{x}$, то майже скрізь $\widehat{x}_\omega(\mathbf{t}) = \Phi(x_\omega) = \omega(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t})$. Оператор M_Φ^ω називають мультиплікатором оператора Φ, який породжується функцією ω; через $\Omega_\Phi(\mathfrak{X}) = \Omega_\Phi(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ позначають підмножину функцій ω з $Y(A, d\mu)$, для яких мультиплікатори M_Φ^ω існують.

Якщо $\mathfrak{N}$ і $\mathfrak{N}'$ — деякі підмножини з $\mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ і оператор M_Φ^ω відображає $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$, то кажуть, що M_Φ^ω має тип $(\mathfrak{N},\mathfrak{N}')$. Зокрема, якщо M_Φ^ω відображає S_Φ^p в S_Φ^p, то оператор M_Φ^ω має тип (S_Φ^p, S_Φ^p) або, коротше, тип (p,p). Множину функцій ω, які породжують оператори типу (p,p), позначають через Ω_Φ^p.

Отже, якщо $\omega\in\Omega_\Phi^p$ і оператор M_Φ^ω діє з S_Φ^p, то він також діє і в S_Φ^p; при цьому кожному $x\in S_\Phi^p$ відповідає елемент $x_\omega = M_\Phi^\omega(x)$, для якого майже скрізь на A виконується рівність

$$\widehat{x}_\omega(\mathbf{t}) = \Phi(x_\omega) = \omega(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}), \quad \widehat{x}_\omega \in L_p(A, d\mu). \tag{8}$$

Нехай при заданому $\sigma > 0$ γ_σ — μ-вимірна множина в A, $\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} |\gamma_\sigma| = \sigma$, $\sigma \le a$, і $\lambda = \lambda(\mathbf{t})$ — вимірна функція з носієм γ_σ. Припустимо, що при даному $p\in(0,\infty)$ $\lambda \in \Omega_\Phi^p$ і $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} x_\lambda = M_\Phi^\lambda(x)$. Згідно з (8)

$$\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) = \Phi(U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}), & \mathbf{t} \in \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{t} \bar{\in} \gamma_\sigma, \end{cases} \quad x \in S_\Phi^p. \tag{9}$$

Саме елементи $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ і розглядаються як наближаючі агрегати для $x \in S_\Phi^p$. Якщо при цьому $\lambda(\mathbf{t}) \equiv 1$ на γ_σ, тобто якщо $\lambda(\mathbf{t})$ співпадає з характеристичною функцією $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ множини γ_σ, то покладають $U_{\gamma_\sigma}(x;\chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(x)$.

Нехай $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множина всіх вимірних підмножин з A, міри яких дорівнюють σ. Кажуть, що при даному $p > 0$ оператор Φ задовольняє умову (A_p), якщо функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ для всіх множин $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ належать до Ω_Φ^p при довільних $\sigma \in [0,a)$. Таким чином, якщо Φ задовольняє умову (A_p), то всі елементи $U_{\gamma_\sigma}(x)$ визначені для довільних $x \in S_\Phi^p$ і належать до S_Φ^p. Елемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$ називається звуженням елемента x рангу σ, елемент $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ — λ-звуженням x рангу σ.

Нехай p — довільне додатне число і $x \in S_\Phi^p$. Тоді внаслідок (4) і (9) маємо

$$||x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)||_p^p = ||\,\widehat{x}(\mathbf{t}) - \widehat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda;\mathbf{t})||_{L_p(A,d\mu)}^p =$$

$$= \int\limits_{\gamma_\sigma} |1-\lambda(\mathbf{t})|^p |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu + \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p d\mu.$$

Звідси випливає таке твердження.

Твердження 1 ([3, с. 1382]). *Нехай* $p \in (0,\infty)$, $x \in S^p_\Phi = S^p_\Phi(\mathfrak{X};Y)$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ *і оператор* Φ *задовольняє умову* (A_p). *Тоді*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi} ||\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)||_p \;=\; ||\,x - U_{\gamma_\sigma}(x)||_p.$$

При цьому виконується рівність

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; ||\,x||^p_p - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p d\mu. \tag{10}$$

Таким чином, якщо $\chi_{\gamma_\sigma} \in \Omega^p_\Phi$, то серед усіх елементів $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$, які породжуються мультиплікаторами M^λ_Φ і які задовольняють умову (9), найменше відхиляється від елемента x за Φ-нормою в просторі S^p_Φ елемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$. Тобто, серед всіх λ-звужень x даного рангу σ найближчим до x є звуження при $\lambda(\mathbf{t}) \equiv 1$. Зрозуміло, що ця властивість є аналогом мінімальної властивості сум Фур'є в просторах Гільберта L_2.

Нехай $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}_{\sigma>0}$, $|\,\gamma_\sigma| = \sigma$, — сім'я вимірних підмножин з A, які вичерпують при $\sigma \to \infty$ всю множину A, тобто такі, які мають ту властивість, що довільна точка $\mathbf{t} \in A$ міститься у всіх множинах γ_σ при всіх достатньо великих значеннях σ, так що

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_{\gamma_\sigma\in\Gamma} |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu \;=\; \int\limits_{A} |\,\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu \quad \forall x \in S^p_\Phi. \tag{11}$$

Об'єднуючи співвідношення (10) і (11), бачимо, що

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty \\ \gamma_\sigma\in\Gamma}} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; 0 \quad \forall x \in S^p_\Phi. \tag{12}$$

Об'єктом наближення є класи Ψ-інтегралів всіх елементів, що належать одиничній кулі U^p_Φ простору S^p_Φ. Поняття Ψ-інтегралу вводиться таким чином [3]. Нехай $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $\Omega_\Phi(\mathfrak{X})$, і M^Ψ_Φ — мультиплікатор оператора Φ, який породжується цією функцією. В такому випадку образ x_Ψ елемента x при відображенні M^Ψ_Φ називають Ψ-інтегралом елемента x і записують

$M_{\Phi}^{\Psi}(x) = x_{\Psi} = \mathcal{J}^{\Psi}x$; при цьому x іноді зручно називати Ψ-похідною для x_{Ψ} і записувати $x = D^{\Psi}x_{\Psi}$.

Отже, якщо x_{Ψ} є Ψ-інтегралом для x, то майже скрізь

$$\widehat{x}_{\Psi} = \Phi(\mathcal{J}^{\Psi}x) = \Psi(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t}). \tag{13}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathfrak{X}$, то через $\Psi\,\mathfrak{N}$ позначається множина Ψ-інтегралів всіх тих $x \in \mathfrak{N}$, для яких вони існують. Зокрема, якщо U_{Φ}^{p} — одинична куля в деякому просторі S_{Φ}^{p},

$$U_{\Phi}^{p} = \{x : x \in S_{\Phi}^{p}, ||\,x||_{p,\Phi}\ \leq 1\},$$

то ΨU_{Φ}^{p} — множина Ψ-інтегралів всіх $x \in U_{\Phi}^{p}$, для яких ці інтеграли існують.

Співставляючи співвідношення (13) і (8), бачимо, що в ролі функцій Ψ, для яких означення Ψ-інтеграла коректне, можна брати довільну функцію з $\Omega_{\Phi}(S_{\Phi}^{p})$. В такому випадку виконується включення $\Psi S_{\Phi}^{p} \subset S_{\Phi}^{p}$.

І саме множини ΨU_{Φ}^{p} є тими об'єктами, для яких в роботі розглядаються традиційні задачі теорії наближень.

3. Апроксимативні характеристики. Одними із основних апроксимативних характеристик просторів S_{Φ}^{p} є величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$, $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p$ і $D_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p$, які визначаються в такий спосіб. Для кожної множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ покладають

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \ = \inf_{\lambda \in \Omega_{\Phi}^{p}} ||\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)||_{p,\Phi} \quad x \in S_{\Phi}^{p}, \tag{14}$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p = \sup_{x \in \Psi U_{\Phi}^{q}} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p, \quad 0 < p,\, q < \infty \tag{15}$$

і

$$D_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p, \quad 0 < p,\, q < \infty. \tag{16}$$

У випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величині $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$ відповідає найкраще наближення функції x за допомогою поліномів степеня σ; величині $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p$ — точна верхня грань на заданій множині функцій таких найкращих наближень. Величина $D_{\sigma}(\Psi U_{\Phi}^{q})_p$ нагадує тригонометричний поперечник порядку σ множини ΨU_{Φ}^{q}.

Розглядаються також наступні характеристики, яким у періодичному випадку відповідають величини, пов'язані з найкращим σ-членним наближенням:

$$e_\sigma(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi} \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{\,p,\Phi}, \ x \in S^p_\Phi \qquad (17)$$

і

$$e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p = \sup_{x\in\Psi U^q_\Phi} e_\sigma(x)_p, \quad 0 < p,\, q < \infty. \qquad (18)$$

Далі в наших розглядах обмежуємось випадком, коли відповідні характеристичні функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\cdot)$ належать до Ω^p_Φ, тобто, коли оператор Φ задовольняє умову (A_p). Тоді згідно з твердженням 1 найбільший інтерес викликають величини (14)–(18), коли $\lambda(\mathbf{t}) = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$. У зв'язку з цим покладають

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi}, \quad x \in S^p_\Phi,$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p = \sup_{x\in\Psi U^q_\Phi} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$$

і

$$D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p.$$

Аналогічно,

$$e_\sigma(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi} \qquad (19)$$

і

$$e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p = \sup_{x\in\Psi U^q_\Phi} e_\sigma(x)_p\ . \qquad (20)$$

При $p = q$ значення величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p$, $D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ дають такі твердження.

Теорема 1 ([3, с. 1385]). *Нехай $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з множини $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{t}\in A} |\Psi(\mathbf{t})| = \|\,\Psi\|_M \; < \infty, \qquad (21)$$

для якої у випадку, коли множина A необмежена,

$$\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty} \Psi(\mathbf{t}) = 0 \qquad (22)$$

Тоді для довільних $\mathfrak{X}$, $A\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$, $\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma$, $\sigma<a$, $p \in (0,\infty)$, неперервної міри $d\mu$ та для будь-якого оператора Φ, який задовольняє умову (A_p), справджуються оцінки

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^p)_p \le \bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(0+0), \tag{23}$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ *— спадна перестановка функції*

$$\Psi_\sigma(\mathbf{t}) = \Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) = \begin{cases} |\Psi(\mathbf{t})|, & \mathbf{t} \in A \setminus \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{t} \in \gamma_\sigma, \end{cases} \tag{24}$$

і

$$D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p \le \bar{\Psi}(\sigma+0), \tag{25}$$

де $\bar{\Psi}(v)$*— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо, крім того, функції $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ *для будь-яких* $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma \in (0,a)$, *належать множині* $E(\Phi)$ *значень оператора* Φ, *а їх прообрази* U_{γ_σ} *мають* Ψ*-інтеграли, то співвідношення (23) і (25) є рівностями. При цьому в* Γ_σ *існує множина* γ_σ^*, *для якої виконуються рівності*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma^*}(\Psi U_\Phi^p)_p = D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p = \bar{\Psi}(\sigma+0).$$

Зокрема, в ролі γ_σ^* *можна взяти будь-яку вимірну підмножину множини* $\{\mathbf{t}\in A: |\Psi(\mathbf{t})| \ge \bar{\Psi}(\sigma+0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma^* = \sigma$, *яка містить множину* $\{\mathbf{t} \in A: |\Psi(\mathbf{t})| > \bar{\Psi}(\sigma+0)\}$.

Теорема 2 ([3, с. 1388]). *Нехай* $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ *— довільна функція з* $Y(A, d\mu)$, *суттєво обмежена на* A, *для якої у випадку, коли множина* A *необмежена, виконується умова (22). Тоді для довільних* $\mathfrak{X}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, $\sigma \le a$, $p \in (0,\infty)$, *неперервної міри* $d\mu$ *та для будь-якого оператора* Φ, *що задовольняє умову* (A_p), *має місце співвідношення*

$$e_\sigma^p(\Psi U_\Phi^p) \le \sup_{\sigma < l \le a} \frac{l-\sigma}{\int\limits_0^l \frac{dt}{\bar{\Psi}^p(t)}}, \tag{26}$$

в якому $\bar{\Psi}(v)$ *— спадна перестановка функції* $|\Psi(\mathbf{t})|$. *Величина точної верхньої грані в (26) досягається при деякому скінченному значенні* $l = l^*$.

Якщо ж, крім того, множина $E(\Phi)$ *значень оператора* Φ *збігається з усім простором* $L_p(A, d\mu)$, *то співвідношення (26) насправді є рівністю.*

Доведення теорем 1 та 2 міститься в [3]. Зазначимо лише, що умови (21) і (22) гарантують той факт, що для функції $|\Psi(\mathbf{t})|$ її функція розподілу $m_{|\Psi|}(y)$,

$$m_{|\Psi|}(y) = \mathrm{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{\mathbf{t} \in A: |\Psi(\mathbf{t})| \ge y\}, \quad y \ge 0,$$

набуває при довільному $y > 0$ лише скінченні значення з проміжку $[0, a]$. Тому згідно з означенням спадної перестановки (див., наприклад, [5] (гл.10), [6] (гл.6), [3]) функції $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(t)$ і $\bar{\Psi}(t)$ завжди визначені.

4. Величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\mathbf{\Psi U^q_\Phi})_\mathbf{p}$, $\mathbf{D}_\sigma(\mathbf{\Psi U^q_\Phi})_\mathbf{p}$ та $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{\Psi U^q_\Phi})_\mathbf{p}$ для різних $\mathbf{0 < p, q < \infty}$. В цьому підрозділі розглядаються величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p$, $D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ для різних $0 < p, q < \infty$.

Нехай спочатку $0 < p < q < \infty$. При цьому припускається, що функція $\Psi(\mathbf{t})$ є суттєво обмеженою на A і задовольняє умови:

$$\Psi(\mathbf{t}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{t} \in A \tag{27}$$

та

$$\|\Psi\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(A, d\mu)} = \left(\int\limits_A |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{pq}{q-p}} d\mu \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty. \tag{28}$$

Тоді якщо элемент x_Ψ належить до ΨU^q_ϕ, то він є Ψ-інтегралом деякого елемента $x \in U^q_\Phi$, для якого, згідно з означенням,

$$\|x\|^q_q = \int\limits_A |\widehat{x}(\mathbf{t})|^q \, d\mu \leq 1.$$

Звідси на підставі нерівності Гельдера робимо висновок, що

$$\|x_\Psi\|^p_p = \int\limits_A |\Psi(\mathbf{t})|^p |\widehat{x}(\mathbf{t})|^p \, d\mu \leq \left(\int\limits_A |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{pq}{q-p}} \, d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int\limits_A |\widehat{x}(\mathbf{t})|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} < \infty.$$

Тобто, якщо виконуються вказані вище умови, то справедливе вкладення $\Psi U^q_\Phi \subset S^p_\Phi$ і мають зміст величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p$, $D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ та $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$.

Справджується таке твердження, встановлене в [2].

Теорема 3 ([2, с. 90]). *Нехай $0 < p < q$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна суттєво обмежена функція з множини $Y(A, d\mu)$, яка задовольняє співвідношення (27) і (28). Тоді для довільних $\mathfrak{X}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma < a$, неперервної міри $d\mu$ і будь-якого оператора Φ, що задовольняє умову (A_p), мають місце оцінки*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p \leq ||\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}||_{L_{\frac{pq}{q-p}}((0,a),dt)}, \quad 1/p + 1/q = 1, \tag{29}$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — спадна перестановка функції $\Psi_\sigma(\mathbf{t}) = \Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$, яка визначається рівністю (24), і

$$D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p \le ||\bar\Psi||_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}, \tag{30}$$

де $\bar\Psi(v)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо ж при цьому оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(A,d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(A,d\mu)$, то співвідношення (29) і (30) є рівностями. При цьому для множини $\gamma^*_\sigma \in \Gamma_\sigma$, визначеної в теоремі 1, виконується рівність

$$\mathscr{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^q_\Phi)_p = D_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p = \ ||\bar\Psi||_{L_{\frac{pq}{q-p}}((\sigma,a),dt)}.$$

Значення величин $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ при $0<p<q$ дає така теорема 4.

Теорема 4 ([2, с. 90]). *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0<p<q$, $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна суттєво обмежена функція з множини $Y(A,d\mu)$, яка задовольняє умови (27) та (28). Тоді для довільних $\mathfrak{X}$, $A\subset\mathbb{R}^m$, $m\ge1$, $\sigma\in(0,a)$, неперервної міри $d\mu$ і будь-якого оператора Φ, що задовольняє умову (A_p), має місце оцінка*

$$e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p \le \left((l^*-\sigma)^{\frac{q}{q-p}}\left(\int\limits_0^{l^*}\bar\Psi^{\,-q}(t)\,dt\right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a}\bar\Psi^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\,dt\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{31}$$

в якій $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а l^* — найбільше на $(\sigma,a]$ число, для якого при всіх $l\in(\sigma,l^*)$

$$l-\sigma \le \bar\Psi^{\,q}(l)\left(\int\limits_0^{l}\bar\Psi^{-q}(t)\,dt\right). \tag{32}$$

Таке число l^* завжди існує. Якщо ж при цьому оператор Φ відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(A,d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(A,d\mu)$, то співвідношення (31) є рівністю.

Доведення даної теореми наведено в [2]. Його суттєвою складовою є наведена нижче теорема 5, яка доведена в [2] (див. також [7]). Тут лише відмітимо вузлові фрагменти доведення. Якщо $x\in\psi U^q_\Phi$, то згідно з (19), (4) і (8)

$$e_\sigma(x)^p_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} ||\Phi((x)-U_{\gamma_\sigma}(x))||^p_{L_p(A,d\mu)} =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} ||\widehat{x}(\mathbf{t})-\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{x}(\mathbf{t})||^p_{L_p(A,d\mu)} =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} ||\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})||^p_{L_p(A,d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})y(\mathbf{t})|^p d\mu,$$

де y — деяка функція така, що функція $|y|^p$ належить множині $U^+_r(A, d\mu)$ всіх невід'ємних функцій з одиничної кулі $U_r(A, d\mu)$ простору $L_p\,(A, d\mu)$, де $r = q/p \in (1, \infty)$.

Тому згідно з (20) маємо

$$e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p \le \sup_{h \in U^+_r(A,\, d\mu)} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})|^p h(\mathbf{t}) d\mu \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{E}_\sigma(|\Psi|^p, r). \qquad (33)$$

Для відшукання значення правої частини (33) використаємо таке твердження. Це твердження, напевно, має і самостійний інтерес, тому сформулюємо його у вигляді теореми.

Теорема 5 ([2, с. 13]). *Нехай A — довільна μ-вимірна множина з $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, де a — скінченне, або ж $a = \infty$, $r \in (1, \infty)$, $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна суттєво обмежена на A функція, що задовольняє умову*

$$||\varphi||_{L_s(A,d\mu)} < \infty, \quad 1/r + 1/s = 1;$$

і

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi, r) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{h \in U^+_r(A,\, d\mu)} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mu, \quad r \in (1, \infty). \qquad (34)$$

Тоді при будь-якому $\sigma \in (0, a)$ справджується рівність

$$\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(\varphi, r) = \left((l^* - \sigma)^s \left(\int\limits_0^{l^*} \bar\varphi^{\,-r}(t)\, dt\right)^{-\frac{s}{r}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar\varphi^{\,s}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{s}},$$

де $\bar\varphi(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, а l^* — найбільше на проміжку $(\sigma, a]$ число таке, що при всіх $l \in (\sigma, l^*)$ виконується нерівність

$$l - \sigma \le \bar\varphi^{\,r}(l) \int\limits_0^l \bar\varphi^{\,-r}(t)\, dt.$$

Таке число l^* завжди існує. Верхня грань у співвідношенні (34) реалізується функцією $y^* = y^*(\mathbf{x}, \varphi, \sigma, r)$ з $U^+_r(A, d\mu)$, у якої при $l^* = a < \infty$

$$y^*(\mathbf{x}) = \left(\varphi^r(\mathbf{x}) \int\limits_A \varphi^{-r}(\mathbf{t}) d\mu\right)^{-\frac{1}{r}}, \quad \mathbf{x} \in A,$$

і при $l^* < a$

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathbf{x})(l^* - \sigma)^{\frac{s}{r}} \left(\int\limits_E \varphi^{-r}(\mathbf{t}) d\mu\right)^{-\frac{s}{r}} \mathcal{E}_\sigma^{-\frac{s}{r}}, & \mathbf{x} \in E, \\ \varphi^{\frac{s}{r}}(\mathbf{x}) \mathcal{E}_\sigma^{-\frac{s}{r}}, & \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases}$$

де $E = \{\mathbf{x} \in A : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(l^* - 0)\}$.

Поклавши $\varphi(\mathbf{t}) = |\Psi(\mathbf{t})|^p$, бачимо, що функція φ задовольняє умови теореми 5, і тому має місце оцінка (31):

$$e_\sigma^p(\Psi U_\Phi^q)_p \leq \mathcal{E}_\sigma(|\Psi|^p, r) =$$

$$= \left((l^* - \sigma)^{\frac{q}{q-p}} \left(\int\limits_0^{l^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\, dt\right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\, dt\right)^{\frac{q-p}{q}}, \tag{35}$$

в якій $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(t)|$, а l^* — найбільше на $(\sigma, a]$ число таке, що при всіх $l \in (\sigma, l^*)$ виконується нерівність (32).

Нехай тепер оператор Φ відображає простір S_Φ^p на простір $L_p(A, d\mu)$, а простір S_Φ^q — на $L_q(A, d\mu)$. У випадку, коли $l^* = a$, розглядають функцію $h \in U_q(A, d\mu)$ таку, що

$$h^q(\mathbf{t}) = \left(|\Psi(\mathbf{t})|^q \int\limits_A |\Psi(\mathbf{x})|^{-q} d\mu\right)^{-1}, \quad \mathbf{t} \in A.$$

а при $l^* < a$ — функцію $h \in U_q(A, d\mu)$ таку, що

$$h(\mathbf{t}) = \begin{cases} |\Psi(\mathbf{t})|^{-1}(l^* - \sigma)^{\frac{1}{q-p}} \left(\int\limits_E |\Psi(\mathbf{x})|^{-q} d\mu\right)^{-\frac{1}{q-p}} \Theta^{-\frac{1}{q-p}}, & \mathbf{t} \in E, \\ |\Psi(\mathbf{t})|^{\frac{p}{q-p}} \Theta^{-\frac{1}{q-p}}, & \mathbf{t} \in A \setminus E, \end{cases}$$

де величина $\Theta = \Theta(\Psi, \sigma, p, q)$ дорівнює правій частині нерівності (35), а $E = \{\mathbf{x} \in A : \ \Psi(\mathbf{x}) \geq \bar{\Psi}(l^* - 0)\}$.

Оскільки оператор Φ відображає простір S_Φ^q на весь простір $L_q(A, d\mu)$, то існує елемент $f \in S_\Phi^q$ такий, що майже скрізь на A $\widehat{f}(\mathbf{t}) = h(\mathbf{t})$, і отже, $f \in U_\Phi^q$.

Далі, розглядають функцію $g = g(\mathbf{t})$ таку, що майже скрізь

$$g(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t}) = \Psi(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}). \qquad (36)$$

Внаслідок (28) і того, що $h \in U_q(A, d\mu)$, ця функція належить простору $L_p(A, d\mu)$, і оскільки оператор Φ відображає простір S^p_Φ на весь простір $L_p(A, d\mu)$, то існує елемент f_Ψ, для якого майже скрізь на A виконується рівність $\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t})$. Цей елемент внаслідок (36) і того, що $f \in U^q_\Phi$, належить множині ΨU^q_Φ, і для нього має місце співвідношення

$$e_\sigma(f_\Psi)^p_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} ||\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\widehat{f}_\Psi(\mathbf{t})||^p_{L_p(A,d\mu)} =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} ||\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t}) - \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})\Psi(\mathbf{t})f(\mathbf{t})||^p_{L_p(A,d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} |\Psi(\mathbf{t})h(\mathbf{t})|^p d\mu =$$

$$= \left((l^* - \sigma)^{\frac{q}{q-p}} \left(\int\limits_0^{l^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\, dt \right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\, dt \right)^{\frac{q-p}{q}},$$

з якого випливає, що у вказаному випадку співвідношення (31) насправді є рівністю. Теорему доведено.

Нехай тепер $0 < q < p < \infty$. В цьому випадку, взагалі кажучи, одними умовами на функцію Ψ вкладення $\Psi U^q_\Phi \subset S^p_\Phi$ досягнути вже не можна. У зв'язку з цим покладають

$$\Psi U^{q,\,p}_\Phi = \Psi U^q_\Phi \cap \Psi S^p_\Phi, \quad 0 < q < p < \infty$$

і розглядають величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$ та $e_\sigma(x)_p$ тільки при $x \in \Psi U^{q,\,p}_\Phi$.

Зазначимо, що якщо для деякої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ виконується рівність $\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{mes}_\mu\{\mathbf{x} \in A\setminus\gamma_\sigma : \Psi(\mathbf{x}) > 0\} = 0$, то $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = 0$, і тоді $D_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = 0$. Якщо ж множина γ_σ така, що $\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} > 0$, то, внаслідок того, що множини $\Psi U^{q,\,p}_\Phi$ можуть містити елементи з як завгодно великими нормами в просторі S^p_Φ, взагалі кажучи, виконується рівність $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \infty$. Якщо умова $\mathrm{mes}_\mu B_{\gamma_\sigma} > 0$ має місце для будь-яких $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, то і $D_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p = \infty$.

У зв'язку з цим природно розглядати величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p$ тільки для $x \in \Psi \widetilde{U}^{q,\,p}_\Phi = \Psi U^q_\Phi \cap \Psi U^p_\Phi$. В цьому випадку має місце таке твердження, встановлене в роботі [2].

Теорема 6 ([2, с. 93]). *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0 < q \le p < \infty$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A, для якої у випадку, коли множина A необмежена, виконується рівність (22). Тоді для довільних $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \ge 1$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma < a$, $p \in (0, \infty)$, неперервної міри $d\mu$ і для будь-якого оператора Φ, що задовольняє умову (A_p), мають місце оцінки*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,\,p})_p \le \bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(0+0), \tag{37}$$

де $\bar{\Psi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — спадна перестановка функції $\Psi_\sigma(\mathbf{t}) = \Psi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$, яка визначається співвідношенням (24), і

$$D_\sigma(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,\,p})_p \le \bar{\Psi}(\sigma + 0), \tag{38}$$

де $\bar{\Psi}(v)$— спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$.

Якщо ж крім того оператор Φ відображає простір S_Φ^p на простір $L_p(A, d\mu)$, а простір S_Φ^q — на $L_q(A, d\mu)$, то співвідношення (37) і (38) є рівностями. При цьому для множини $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, визначеної в теоремі 1, виконуються рівності

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma^*}(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,\,p})_p = D_\sigma(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,\,p})_p = \bar{\Psi}(\sigma + 0).$$

Значення величин $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,\,p})$, $0 < q \le p < \infty$, дає таке твердження.

Теорема 7 ([2, с. 93]). *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0 < q \le p < \infty$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A, яка у випадку необмеженої множини A задовольняє умову (22). Тоді для довільних $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \ge 1$, $\sigma \in (0, a)$, неперервної міри $d\mu$ і будь-якого оператора Φ, підпорядкованого умові (A_p), виконується співвідношення*

$$e_\sigma^p(\Psi U_\Phi^{q,\,p})_p \le \sup_{l \in (\sigma, a]} \frac{l - \sigma}{\left(\displaystyle\int_0^l \frac{dt}{\bar{\Psi}^q(t)} \right)^{p/q}}, \tag{39}$$

в якому $\bar{\Psi}(v)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$. Величина точної верхньої грані в (39) досягається при деякому скінченному значенні $l = l^*$.

Якщо ж при цьому оператор Φ відображає простір S_Φ^p на простір $L_p(A, d\mu)$, а простір S_Φ^q — на $L_q(A, d\mu)$, то співвідношення (39) насправді є рівністю.

Доведення теореми 7 проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 4. При цьому важливу роль відіграє наступний аналог теореми 5, доведений в [2].

Теорема 8 ([2, с. 13]). *Нехай A — довільна μ-вимірна множина з $\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, де a — або скінченне, або ж $a=\infty$, $r\in(0,1]$, $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна суттєво обмежена на A функція, для якої у випадку, коли множина A не обмежена, припускається, що*

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0$$

і

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi,r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{h\in U_r^+(A,\,d\mu)\cap L_1(A,d\mu)} \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mu,\ \ r\in(0,1]. \tag{40}$$

Тоді при будь-якому $\sigma\in(0,a)$ справджується рівність

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi,r) = \sup_{l\in(\sigma,a]} (l-\sigma)\biggl(\int\limits_0^l \frac{dt}{\bar{\varphi}^{\,r}(t)}\biggr)^{-\frac{1}{r}}, \tag{41}$$

в якій $\bar{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня грань у правій частині (41) досягається при деякому скінченному значенні $l=l^*$. Точна верхня грань в правій частині співвідношення (40) реалізується функцією $y^*=y^*(\mathbf{x},\varphi,\sigma,r)$, яка задається рівністю

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Bigl(\varphi^r(\mathbf{x})\int\limits_E \varphi^{-r}(\mathbf{t})d\mu\Bigr)^{-\frac{1}{r}}, & \mathbf{x}\in E,\\ 0, & \mathbf{x}\in A\setminus E, \end{cases}$$

де E — будь-яка вимірна підмножина множини $\{\mathbf{x}\in A:\ \varphi(\mathbf{x})\geq \geq \bar{\varphi}(l^*-0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu E = l^*$, яка містить множину $\{\mathbf{x}\in A:\ \varphi(\mathbf{x}) > > \bar{\varphi}(l^*-0)\}$.

Зазначимо, що у випадку, коли $r=1$, аналогічне твердження було встановлено в роботі [3].

Для просторів S^p_φ, означення яких наведено в прикладі 1 підрозділу 1, твердження, аналогічні до теорем 1–4, 6, 7 були отримані в роботах [8–9, 10 (гл.11)], а для просторів $S^{p,\mu}_\varphi$ (приклад 1$'$) — в роботах [11, 12].

5. Порядки величин $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{\Psi U^q_\Phi})_\mathbf{p}$, $\mathbf{0<p<q}$, та $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{\Psi U^{q,\,p}_\Phi})_\mathbf{p}$, $0<\mathbf{q}\le\mathbf{p}$. В цьому підрозділі досліджується поведінка величин $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$, $0<p<q<\infty$, та $e_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p$, $0<q\le p<\infty$, при $\sigma\to\infty$. Зрозуміло, що така задача має зміст лише у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu A=\infty$. При цьому припускається, що міра $d\mu$ неперервна, і оператор Φ задовольняє умову (A_p) і відображає простір S^p_Φ на простір $L_p(A,d\mu)$, а простір S^q_Φ — на $L_q(A,d\mu)$.

В такому разі значення величин $e_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p$, $0<q\le p<\infty$, для будь-якої суттєво обмеженої на A функції $\Psi\in Y(A,d\mu)$, яка задовольняє у випадку необмеженої множини A умову (22), визначається рівністю (39). Якщо ж $0<p<q<\infty$, а $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна суттєво обмежена функція з множини $Y(A,d\mu)$, яка задовольняє умови (27) та (28), то $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ задається рівністю (31).

Таким чином, задача про дослідження поведінки величин $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ та $e_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p$ при $\sigma\to\infty$ зводиться за відповідних умов на функцію Ψ до дослідження величин $G_\sigma(\Psi,p,q)$, які при $0<q\le p<\infty$ задаються рівністю

$$G_\sigma(\Psi,p,q)\overset{\mathrm{df}}{=}e^p_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p=\sup_{l\in(\sigma,a]}\frac{l-\sigma}{\left(\displaystyle\int_0^l\frac{dt}{\bar\Psi^q(t)}\right)^{p/q}}\,, \qquad (42)$$

де $\bar\Psi(v)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а при $0<p<q<\infty$ — рівністю

$$G_\sigma(\Psi,p,q)\overset{\mathrm{df}}{=}e^p_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p=$$

$$=\left((l^*-\sigma)^{\frac{q}{q-p}}\left(\int\limits_0^{l^*}\bar\Psi^{\,-q}(t)\,dt\right)^{\frac{p}{p-q}}+\int\limits_{l^*}^{a}\bar\Psi^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\,dt\right)^{\frac{q-p}{q}}, \qquad (43)$$

в якій $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а l^* — найбільше на $(\sigma,a]$ число таке, що при всіх $l\in(\sigma,l^*)$ виконується нерівність (32).

Зазначимо, що величини $G_\sigma(\Psi,p,q)$ вигляду (42) і (43) у випадку, коли $\sigma=n\in\mathbb{N}$, а носієм міри $d\mu$ в просторі $\mathbb{R}^+$ є множина $\mathbb{N}$, де вона дорівнює одиниці: $\mu(k)\equiv1$, $k\in\mathbb{N}$, і $A=\mathbb{N}$, зустрічались також у роботах [13]–[17] та [18] (Гл. VI) та ін.

Поведінка при $\sigma\to\infty$ величин $G_\sigma(\Psi,p,q)$ вигляду (42) і (43) вивчалась у роботах [19] та [2] (гл. 8–10). Тому при встановленні оцінок для величин $e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p$ та $e_\sigma(\Psi U^{q,\,p}_\Phi)_p$ можна скористатися результатами цих робіт.

Для їх формулювання введемо такі позначення. У випадку, коли $r = \frac{q}{p} \in (0,1]$, покладемо $\psi(t+1) = \bar{\Psi}^q(t)$, $t > 0$, і

$$\bar{G}_\sigma(\psi, r) \overset{\mathrm{df}}{=} G_\sigma(\Psi,p,q) = \sup_{l\in(\sigma,a]} \frac{l-\sigma}{\left(\int\limits_0^l \frac{dt}{\bar{\Psi}^q(t)}\right)^{p/q}} = \sup_{l>\sigma} \frac{l-\sigma}{\left(\int\limits_1^{l+1} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{\frac{1}{r}}},$$

а при $r \in (1,\infty)$ будемо вважати, що $\psi(t+1) = \bar{\Psi}^p(t)$, $t > 0$, і

$$\bar{G}_\sigma(\psi, r) \overset{\mathrm{df}}{=} G_\sigma(\Psi,p,q) =$$

$$= \left((l^*-\sigma)^{\frac{q}{q-p}} \left(\int\limits_0^{l^*} \bar{\Psi}^{\,-q}(t)\,dt \right)^{\frac{p}{p-q}} + \int\limits_{l^*}^{a} \bar{\Psi}^{\,\frac{pq}{q-p}}(t)\,dt \right)^{\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \left((l^*-\sigma)^s \left(\int\limits_1^{l^*+1} \frac{dt}{\psi^r(t)} \right)^{-\frac{s}{r}} + \int\limits_{l^*+1}^{\infty} \psi^{\,s}(t)\,dt \right)^{\frac{1}{s}}, \qquad (44)$$

де $1/p + 1/s = 1$, $l^* = l^*(\sigma)$ — найбільше на проміжку (σ,∞) число таке, що при всіх $l \in (\sigma, l^*)$ виконується нерівність

$$l - \sigma \le \psi^{\,r}(l+1) \int\limits_1^{l+1} \frac{dt}{\psi^{\,r}(t)}.$$

Величини $\bar{G}_\sigma(\psi,r)$ будемо розглядати у випадку, коли функції ψ вибираються з множини $\mathfrak{M}$ всіх додатних неперервних опуклих вниз функцій неперервного аргументу $t \ge 1$, значення яких зникають при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M} = \{\psi(t): \ \psi(t) > 0, \ \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) +$$
$$+ \psi(t_2) \ge 0 \ \ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\}.$$

Таким чином, до умови монотонного спадання до нуля функцій $\psi(\cdot)$, яку вони задовольняють автоматично як степені перестановок, додаються умови їх випуклості. Ці умови є технічними, оскільки тут застосовується розвинений апарат опуклих функцій. В той же час слід зазначити, що для практичних застосувань таке обмеження не є значним.

Множина $\mathfrak{M}$ досить неоднорідна за швидкістю прямування до нуля при $t \to \infty$ її елементів: функції $\psi(t)$ можуть спадати як дуже повільно, так і дуже швидко. Тому виникає необхідність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини, що об'єднують функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які в певному сенсі мають однаковий характер прямування до нуля.

Наслідуючи О.І. Степанця [20, с. 159] (див. також [21]) в ролі характеристики, за допомогою якої зручно проводити таке розбиття, візьмемо пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, які визначаються в такий спосіб. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначають функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1. \tag{45}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, $\eta(t)$ для всіх $t \geq 1$ з (45) визначається однозначно: $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$. Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

В залежності від поведінки функції μ прийнято (див., наприклад, [20, с. 159], [21]) розрізняти такі підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < \mu(\psi; t) \leq K \quad \forall t \geq 1 \quad \}, \tag{46}$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < K \leq \mu(\psi; t) < \infty \quad \forall t \geq 1 \quad \}, \tag{47}$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 \ \forall t \geq 1\}, \tag{48}$$

де, як і надалі, K, $K_1, \ldots$ — деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

Через $\mathfrak{M}_0^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad \mu(\psi; t) \downarrow 0 \quad \}, \tag{49}$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad \mu(\psi; t) \uparrow \infty \quad \}. \tag{50}$$

В роботі [2] (див. також [19]) отримані наступні твердження, що характеризують поведінку величин $\bar{G}_\sigma(\psi; p)$ при $\sigma \to \infty$.

Теорема A ([2, с. 44]). *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_0$, то для довільного $r \in (0,1]$ має місце порядкова при $\sigma \to \infty$ рівність*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; r) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{r}}(\sigma+1)}{\sigma^{\frac{1}{r}-1}}.$$

Тут і надалі під виразом "$a(\sigma) \asymp b(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$" розуміється, що існують сталі $0 < K_1 < K_2$ такі, що при всіх σ, більших за деяке число σ_0, справджується нерівність

$$K_1 a(\sigma) \le b(\sigma) \le K_2 a(\sigma).$$

У випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, розглядаються наступні підмножини множини $\mathfrak{M}^+_\infty$:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty \ : \quad \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty \ \},$$

де $\alpha(t) = \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) = \psi'(t+0)$, і

$$\mathfrak{M}''_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty \ : \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0 \ \}.$$

Зазначимо, що до множин $\mathfrak{M}'_\infty$ та $\mathfrak{M}''_\infty$ належать, зокрема, функції $\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, у випадках, коли $r \in (0,1)$ і $r > 1$ відповідно.

Теорема B ([2, с. 49]). *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або ж функція $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і така, що функція $\psi''(t)$ не зростає на $[1,\infty)$, то для довільного $r \in (0,1]$ справджується порядкова при $\sigma \to \infty$ рівність*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; r) \asymp \frac{\psi^{\frac{1}{r}}(\sigma+1)}{(\eta(\psi;\sigma+1)-\sigma-1)^{\frac{1}{r}-1}}.$$

Із теореми A, враховуючи теорему 7 і прийняті позначення та припущення, отримуємо таке твердження.

Теорема 9. *Якщо p і q — деякі додатні числа, $0<q\le p<\infty$, і $\Psi=\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A,d\mu)$, суттєво обмежена на A, що задовольняє (22), і така, що при будь-якому $t\ge 0$ виконується співвідношення $\bar{\Psi}^q(t)=\psi(t+1)$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то має місце порядкова при $\sigma\to\infty$ рівність*

$$e_\sigma(\Psi U^{q,p}_\Phi)_p \asymp \frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Із теореми В, враховуючи теорему 7, прийняті позначення та припущення, а також те, що згідно з означенням для довільного $t > 0$

$$\eta(\bar{\Psi}; t) = \eta(\psi; t+1) - 1, \tag{51}$$

отримуємо таку теорему.

Теорема 10. *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0 < q \le p < \infty$, і $\Psi = \Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A, що задовольняє співвідношення (22) і рівність $\bar{\Psi}^q(t) = \psi(t+1)$, $t \ge 0$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ або ж $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і така, що функція $\psi''(t)$ не зростає на $[1, \infty)$. Тоді виконується порядкова при $\sigma \to \infty$ рівність*

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p \asymp \frac{\bar{\Psi}(\sigma)}{(\eta(\bar{\Psi}; \sigma) - \sigma)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}}.$$

Зауваження 1. Порівнюючи отримані порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ зі значеннями величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^p)_p$ та $D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p$, які дає теорема 1, робимо висновок, що, коли $p = q$, а функція Ψ задовольняє умови теорем 9 чи 10, величини $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p = e_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p$ мають той самий порядок прямування до нуля при $\sigma \to \infty$, що і величини $D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p$:

$$D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p = \mathscr{E}_{\gamma_\sigma^*}(\Psi U_\Phi^p)_p \asymp e_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p \asymp \bar{\Psi}(\sigma + 0).$$

Якщо ж $0 < q < p < \infty$, то, як вже зазначалося, величини $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ та $D_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ можуть бути необмеженими, в той час як величини $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ є обмеженими і монотонно спадають до нуля при $\sigma \to \infty$.

Порівнюючи отримані порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ зі значеннями величин $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,p})_p$ та $D_\sigma(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,p})_p$, які знайдені в теоремі 6, робимо висновок, що коли $0 < q < p < \infty$, а функція Ψ задовольняє умови теорем 9 чи 10, то

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p}{D_\sigma(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,p})_p} = 0,$$

тобто у цьому випадку величини $e_\sigma(\Psi U_\Phi^{q,p})_p$ швидше прямують до нуля при $\sigma \to \infty$, ніж величини $D_\sigma(\Psi \widetilde{U}_\Phi^{q,p})_p$.

Нехай тепер $r = \frac{q}{p} \in (1, \infty)$. Якщо обмежитися розглядом функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ і врахувати позначення (46)–(50), то зрозуміло, що інтеграли в (44) можуть бути скінченними тільки коли ці функції належать множині $\mathfrak{M}_\infty$. Розглянемо спочатку випадок, коли $\psi \in \mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема C ([2, с. 57]). *Нехай $r \in (1,\infty)$, а функція $\psi \in \mathfrak{M}_C$ така, що $||\psi||_{L_s[1,\infty)} < \infty$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, і функція $1/\psi(t)$ опукла вниз при всіх $t \geq t_0 \geq 1$. Тоді справджується співвідношення*

$$\bar{G}_\sigma(\psi, r) \asymp \psi(\sigma+1)\sigma^{1-\frac{1}{r}}.$$

За теоремою C, враховуючи теорему 4 і прийняті позначення та припущення, отримуємо таке твердження.

Теорема 11. *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0 < p < q$, $\Psi{=}\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A, яка задовольняє співвідношення (27), (28) і рівність $\bar{\Psi}(t) = \psi(t+1)$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi \in \mathfrak{M}_C$ така, що функція $1/\psi(t)$ опукла вниз при всіх $t \geq t_0 \geq 1$, то при $\sigma \to \infty$ виконується співвідношення*

$$e_\sigma(\Psi U^q_\Phi)_p \asymp \bar{\Psi}(\sigma)\sigma^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Якщо ж функція ψ належить множині $\mathfrak{M}^+_\infty$, то, як зазначено в роботі [2] (див. також [19]), умова $||\psi||_{L_s[1,\infty)} < \infty$ виконується автоматично.

Як і у випадку, коли $r = \frac{q}{p} \in (0,1]$, функції ψ вибираються з множин $\mathfrak{M}'_\infty$ і $\mathfrak{M}''_\infty$.

Теорема D ([2, с. 64]). *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, або ж $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і така, що похідна $(\psi^p(t))''$ не зростає при $t \geq 1$, то для довільного $r \in (1,\infty)$ виконується рівність*

$$\bar{G}_\sigma(\psi; r) \asymp \psi^{\frac{1}{r}}(\sigma+1)(\eta(\psi;\sigma+1)-\sigma-1)^{1-\frac{1}{r}}, \quad \sigma\to\infty.$$

Із теореми D, враховуючи теорему 7, прийняті позначення та припущення, і співвідношення (51), отримуємо таку теорему.

Теорема 12. *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0 < p < q$, $\Psi{=}\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A, d\mu)$, суттєво обмежена на A, яка задовольняє співвідношення (27), (28) і рівність $\bar{\Psi}(t) = \psi(t+1)$, де $\bar{\Psi}(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ або ж $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і така, що похідна $(\psi^p(t))''$ не зростає на $[1,\infty)$. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце порядкова рівність*

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p \asymp \bar\Psi(\sigma)(\eta(\bar\Psi;\sigma)-\sigma)^{1-\frac{1}{p}}.$$

При встановлені теорем C та D в роботі [2] (див. також [19]) було показано (див. співвідношення (151) з [2]), що для будь-якої функції ψ, яка задовольняє умови теореми C справджується співвідношення

$$\int\limits_\sigma^\infty \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \sigma\psi^{\,q}(\sigma), \quad \sigma\to\infty,$$

якщо ж функція ψ задовольняє умову теореми D, то (див. співвідношення (166) з [2])

$$\int\limits_\sigma^\infty \psi^{\,q}(t)\,dt \asymp \psi^{\,q}(\sigma)(\eta(\psi;\sigma)-\sigma), \quad \sigma\to\infty.$$

Звідси, враховуючи теорему 3, прийняті позначення та припущення, і співвідношення (51), отримуємо такі твердження.

Твердження 2. *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0<p<q$, $\Psi{=}\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A,d\mu)$, суттєво обмежена на A, яка задовольняє співвідношення (27), (28) і рівність $\bar\Psi(t)=\psi(t{+}1)$, де $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi\in\mathfrak{M}_C$ така, що функція $1/\psi(t)$ опукла вниз при всіх $t\ge t_0\ge 1$, тоді при $\sigma\to\infty$ виконується співвідношення*

$$D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p \asymp \bar\Psi(\sigma)\sigma^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Твердження 3. *Нехай p і q — деякі додатні числа, $0<p<q$, $\Psi{=}\Psi(\mathbf{t})$ — довільна функція з $Y(A,d\mu)$, суттєво обмежена на A, яка задовольняє співвідношення (27), (28) і рівність $\bar\Psi(t)=\psi(t{+}1)$, де $\bar\Psi(t)$ — спадна перестановка функції $|\Psi(\mathbf{t})|$, а функція $\psi\in\mathfrak{M}'_\infty$ або ж $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$ і така, що похідна $(\psi^p(t))''$ не зростає на $[1,\infty)$. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце порядкова рівність*

$$D_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p \asymp \bar\Psi(\sigma)(\eta(\bar\Psi;\sigma)-\sigma)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Зауваження 2. Порівнюючи знайдені порядкові оцінки для величин $e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p$ та $D_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p$ бачимо, що у вказаних випадках виконується порядкова при $\sigma\to\infty$ рівність:

$$e_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p \asymp D_\sigma(\Psi U_\Phi^q)_p, \quad 0<p<q<\infty.$$

Зазначимо, що для просторів S^p_φ твердження, аналогічні до теорем 9 та 11, було отримано в роботах [19] та [2] (Гл. 14).

1. *Степанец А.И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 1. — С. 47–92.
2. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций. — Киев., 2007. — 103 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).
3. *Степанец А.И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 10. — С. 1392–1423.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — 333 с.
5. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
6. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближений. — М.: Наука, 1970. — 320 с.
7. *Степанець О.І., Шидліч А.Л.* Екстремальні задачі для інтегралів від невід'ємних функцій // Доп. НАН України. — 2007. — № 3. — С. 25–31.
8. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 3. — С. 392–416.
9. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 8. — С. 1121–1146.
10. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін–ту математики НАН Украини. — 2002. — Т. 40, ч. II. — 468 с.
11. *Степанец А.И., Рукасов В.И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 2. — С. 264–277.
12. *Рукасов В.И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.
13. *Степанець О.І., Шидліч А.Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 8. — С. 1107–1126.
14. *Шидліч А. Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 283–306.
15. *Fang Gensun, Qian Lixin.* Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings // J. Approximation Theory. — 2006. — V. 140 , Issue 2 (June 2006). — P. 178–190.
16. *Софман Л.Б.* Поперечники октаэдров // Матем. заметки. — 1969. — Т. 5, №4. — С. 429–436.

17. *Софман Л.Б.* Поперечники бесконечного октаэдра // Вестник московского ун-та. — 1973. — №5. — С. 54–56.

18. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory// Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985. – 291 p.

19. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ // Нелін. колив. — 2007. — № 4. — С. 528-559.

20. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 40, ч.I. — 427 с.

21. *Степанец А.И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 5. — С. 688–702.