Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 395-403

УДК 517.5

М. Ф. Тиман, О. Б. Шаврова
(Днепропетр. гос. аграр. ун-т, Днепорпетровск)

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ L_p^m И S_m^p

Рассматриваются подпространства $\widetilde{S}_m^p$ и $\widetilde{L}_m^p$ из известных пространств S_p^m и L_p^m со специальными рядами Фурье, носящие "каскадный" характер прямоугольного типа. Для таких пространств доказаны аналоги теорем типа Пэли, Харди–Литтлвуда, П.Л.Ульянова для случая функций многих переменных, а также, теоремы типа вложения классов функций в пространствах А.И.Степанца S_m^p.

Пусть $L_p^m, 1 \le p \le \infty$, — известное пространство 2π-периодических по каждой из переменных интегрируемых по Лебегу на кубе $[0, 2\pi]^m = Q^m$ функций $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ с нормой

$$\|f(x)\|_{L_p^m} = \begin{cases} \left(\int\limits_{Q^m} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{Vrai\,sup} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_m), \quad dx = \prod\limits_{k=1}^{m} dx_k.$

Подпространством $\widetilde{L}_m^p$ пространства L_p^m является совокупность функций $f(x)$ из пространства L_p^m (рассмотренное в работе [1]), ряды Фурье которых имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n S_n^*(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{1}$$

где

$$S_n^*(x_1, x_2, ..., x_m) = D_n(x_1, x_2, ..., x_m) - D_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{2}$$

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_m) = \prod_{k=1}^{m} D_n(x_k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D_n(x_k) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Через S_m^p, $1 \le p < \infty$, обозначим (см. [2]) пространство периодических периода 2π по каждой из переменных интегрируемых по Лебегу на кубе $[0,\, 2\pi]^m = Q^m$ функций $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, для которых кратный числовой ряд, состоящий из p-ых степеней модулей всех коэффициентов Фурье функции $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ сходится. За норму в пространстве $S_m^p, 1 \le p < \infty$, принимается величина

$$\|f\|_{S_m^p} = \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \rho_{n_1,\ldots,n_m}^p \right\}^{1/p},$$

где $\rho_{n_1,\ldots,n_m} = \sqrt{\mu_{n_1,\ldots,n_m} \sum\limits_{\nu_1=1}^{2} \cdots \sum\limits_{\nu_m=1}^{2} \left(a_{n_1,\ldots,n_m}^{(\nu_1,\ldots,\nu_m)} \right)^2}$, $a_{n_1,\ldots,n_m}^{(\nu_1,\ldots,\nu_m)}$— коэффициенты Фурье функции $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ по системам $\{\sin n_\mu x,\, \cos n_\mu x\}$, $\mu = 1, 2, ..., n$. Подпространство тех функций из пространства S_m^p, у которых ряд Фурье имеет вид (1), обозначим через $\tilde{S}_m^p$.

Для случая функций одной переменной $(m = 1)$

$$\tilde{L}_p^1 = L_p^1 = L_p, \quad \text{а} \;\; \tilde{S}_1^p = S_1^p = S^p.$$

Отметим также (см. [4, с.140]) следующий аналог теоремы Пэли (см. [3, с.181]).

Теорема 1. *Пусть $f \in \widetilde{L}_m^p$. Тогда при $1 < p \le 2$ справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{m\,(p-1)-1} \le M_1(p, m)\ \|f\|_{L_p^m}^p\,,$$

а, при $2 \le p < \infty$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{m\,(p-1)-1}$ вытекает, что числа $\{c_n\}$ являются коэффициентами Фурье некоторой функции $f \in \tilde{L}_p^m$ и верно неравенство

$$\|f\|_{\tilde{L}_p^m}^p \le M_2(p, m) \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{m\,(p-1)-1},$$

где $M_1(p,\ m)$ и $M_2(p,\ m)$ — некоторые константы, не зависящие от f.

Аналогом теоремы Харди–Литтлвуда (см. [3, с.191]) является (см. [4, с.139])

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_m) \in \widetilde{L}_1^m$ и ее коэффициенты Фурье ряда* (1) *$\{c_n\}$ удовлетворяют условию $c_{n+1} \le c_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Для того, чтобы при некотором $p, 1 < p < \infty$, функция $f \in \tilde{L}_p^m$, необходимо и достаточно, выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{m\ (p-1)-1} < \infty.$$

Общая теорема вложения для классов функций из пространств $L_p^m, 1 \le p < \infty$, содержится в следующем утверждении (см. [4, с.134]).

Теорема 3. *Пусть $f \in \widetilde{L}_m^p, 1 \le p < \infty$, и при некотором $r \quad (r > p)$ сходится ряд*

$$R(f, m, p, r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n,\ldots,n}^r(f)_{L_p^m}\ n^{m\ \left(\frac{r}{p}-1\right)-1}, \tag{3}$$

где $E_{n,\ldots,n}(f)_{L_p^m}$ — полное наилучшее приближение функции $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ тригонометрическими полиномами степени $\le n$ по каждой из переменных $x_k,\ k = 1,\ 2, ..., m$, в метрике пространства L_p^m. Тогда $f \in L_r^m$ и справедливо неравенство

$$\|f(x)\|_{L_r^m} \le M(p, m) R(f, m, p, r). \tag{4}$$

Отметим, что при $m = 1$ теорема 3 принадлежит П.Л.Ульянову (см. [5]). По поводу доказательства теоремы 3 при $m = 1$ см. также [6].

В [4] установлено также, что сходимость ряда (3) является не только достаточным для вложения функций из L_p^m пространства в пространство $L_r^m,\ r > p \ge 1$. На всем пространстве L_p^m оно является также и необходимым. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям $0 < \alpha_{n+1} \le \alpha_n,\ n = 0, 1, \ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и при* *некоторых* $1 \le p < r < \infty$ *расходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^r n^{m\left(\frac{r}{p}-1\right)-1}$. *Тогда в пространстве* L_p^m *найдется функция* $f_0(x_1, x_2, ..., x_m)$, *у которой* $E_{n,...,n}(f_0)_{L_p^m} = O(\alpha_n)$, *но она не принадлежит пространству* L_r^m.

Утверждение теоремы 4 при $m = 1$ установлено в [6], для любого $m \ge 1$ — в работе [9]. Функция

$$f_0(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum c_n S_n^*(x_1, x_2, ..., x_m),$$

где $c_n = \left\{ \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \frac{(\nu-n+1)\,(\alpha_\nu^p - \alpha_{\nu+1}^p)}{(\nu+1)^{m\,(p-1)+1}} \right\}^{\frac{1}{p}}$, $n = 0,\ 1,\ 2, ...$, о которой идет речь в теореме 4, является одной из функций подпространства $\widetilde{L}_p^m$. Этот факт, в некоторой степени характеризует роль подпространства $\widetilde{L}_p^m$ в некоторых вопросах теории аппроксимации функций.

Далее рассматриваются вопросы аналогичного характера для вложения S_m^p, $1 \le p < \infty$, — классов функций.

Установление теорем вложения S_m^p классов функций опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \widetilde{S}_m^p$. *Тогда при любом* $p, 1 \le p < \infty$,

$$\|f\|_{S_m^p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^{m-1} \right\}^{1/p},$$

где $\{c_k\}$ — *коэффициенты Фурье функции* $f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Лемма 2. *Если* $f \in \tilde{S}_m^p, 1 \le p < \infty$, *то*

$$E_{n,...n}(f)_{\tilde{S}_m^p} = \|f(x_1, x_2, ..., x_m) - S_{n,...,n}(f, x_1, ..., x_m)\|_{\tilde{S}_m^p},$$

$E_{n,...,n}(f)_{\tilde{S}_m^p}$ — *полное наилучшее приближение порядка* n *функции* $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *полиномами вида*

$$T_n(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k^*(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{5}$$

а $S_n(f, x_1, x_2, ..., x_m)$ — *частные суммы порядка* n *по каждой из переменных* $x_k, k = 1, 2, ..., m$, *ряда Фурье* (1) *функции* $f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Лемма 3. *Пусть числа* p *и* r *удовлетворяют условию* $1 \le p < r < \infty$. *Тогда для каждого полинома вида* (5) *справедливо неравенство*

$$\|T_n\|_{\tilde{S}^p_m} \le A(m)\, n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\, m}\, \|T_n\|_{\tilde{S}^r_m}\,, \tag{6}$$

где $A(m)$ — *константа, зависящая лишь от* m.

Утверждение леммы 1 вытекает из определения нормы в пространстве S^p_m.

Утверждение леммы 2 для пространств S^p_m установлено А.И. Степанцом (см. [2]).

Доказательство леммы 3. Очевидно, что из определения нормы в пространстве S^p_m вытекает, что

$$\|T_n\|_{S^p_m} = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k S^*_k(x_1, x_2, ..., x_m) \right\|_{S^p_m} \le A(m) \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\, k^{m-1} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Применяя к правой части этого неравенства (7) неравенство Гельдера с показателями $q = \frac{r}{p}$, $q' = \frac{r}{r-p}$, находим, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\, k^{m-1} \le n^{m\,\left(1-\frac{p}{r}\right)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r\, k^{(m-1)\frac{r}{p}} \right\}^{\frac{p}{r}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\, k^{m-1} \le n^{m\,\left(1-\frac{p}{r}\right)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r\, k^{(m-1)} \right\}^{\frac{p}{r}} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^r\, n^{m-1} \right\}^{\frac{p}{r}} n^{(m-1)\,\frac{p}{r}\,\left(\frac{r}{p}-1\right)} n^{\frac{r-p}{r}},$$

т.е.

$$\|T_n\|_{\tilde{S}^p_m} \le A(m)\, n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\, m}\, \|T_n\|_{\tilde{S}^r_m}\,.$$

Лемма 3 доказана.

С помощью лемм 1, 2 и 3 для вложения $\tilde{S}^p_m$ классов функций устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $f \in \tilde{S}_m^r, 1 < r < \infty,$ *и для некоторого числа* $p, 1 \le p < r < \infty,$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E^p_{n,\dots,n}(f)_{\tilde{S}^p_m} n^{m\,\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}, \qquad (8)$$

$E_{n,\dots n}(f)_{\tilde{S}^r_m}$ — *полное наилучшее приближение порядка* n *функции* $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *тригонометрическими полиномами степени* $\le$ *nвида (5) в метрике пространства* S^r_m. *Тогда* $f \in \tilde{S}^p_m$ *и справедлива оценка*

$$\|f\|^p_{\tilde{S}^p_m} \le A(m) \sum_{n=1}^{\infty} E^p_{n,\dots,n}(f)_{\tilde{S}^p_m} n^{m\,\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}. \qquad (9)$$

Верно также и утверждение, обратное к теореме 5.

Теорема 6. *Пусть функция* $f \in \tilde{S}^p_m, 1 \le p < \infty,$ *и ее коэффициенты Фурье* $\{c_n\}$ *таковы, что при некотором* $r > p$ *последовательность* $c_n n^{(m-1)\frac{1}{r}}$ *монотонно стремится к нулю. Тогда для этого числа* r *ряд* (8) *сходится.*

Доказательство теоремы 5. Пусть ряд (8) сходится, тогда на основании леммы 1 сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^r\, k^{m-1} \right)^{\frac{p}{r}} n^{m\,\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}. \qquad (10)$$

Далее, покажем, что из сходимости ряда (10) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{m\,-1} \quad . \qquad (11)$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^{m-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |c_k|^p k^{m-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu(f, m, p),$$

где $\Delta_\nu(f, m, p) = \sum\limits_{k=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |c_k|^p k^{m-1}.$

Оценивая величину $\Delta_\nu(f,m,p)$, находим, что на основании леммы 3

$$\Delta_\nu(f,m,p)=\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}|c_k|^p k^{m-1}\le 2^{\nu m(1-\frac{p}{r})}\left(\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}|c_k|^r k^{m-1}\right)^{\frac{p}{r}}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p k^{m-1}\le\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu m(1-\frac{p}{r})}E^p_{2^{\nu-1},\dots,2^{\nu-1}}(f)_{\widetilde{S}^r_m}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}E^p_{k,\dots,k}(f)_{\widetilde{S}^r_m}k^{m(1-\frac{p}{r})}.$$

Таким образом, из сходимости ряда (9) вытекает сходимость ряда (11), и следовательно, $f\in\widetilde{S}^p_m$.

Доказательство теоремы 6. Из принадлежности функции $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ к $\widetilde{S}^p_m$ на основании леммы 1 вытекает, что ряд (11) сходится.

Рассмотрим ряд (9). В силу лемм 1 и 2 получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}E^p_{n,\dots,n}(f)_{\widetilde{S}^r_m}n^{m\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}\le A(m)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^r\,k^{m-1}\right)^{\frac{p}{r}}n^{m\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}. \tag{12}$$

Далее, используя неравенство А.Конюшкова (см. [7]) о том, что при $0<\delta<1$, $c<1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}\left(\sum_{k=n}^{\infty}d_k\right)^{\delta}\le\sum_{n=1}^{\infty}(n\;d_n)^{\delta}n^{-c},$$

находим, что ряд в правой части неравенства (12) будет сходящимся, если будет сходиться ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{m\left(1-\frac{p}{r}\right)-1}(n\;|c_n|^r\,n^{m-1})^{\frac{p}{r}}=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p n^{m-1}. \tag{13}$$

А так как $f \in \tilde{S}^p_m$, то на основании леммы 1 ряд (13) сходится, а, следовательно, сходится и ряд (9).

Отметим, что условия для вложения $\tilde{S}^p_m$ классов функций, указанные в теореме 6 сформулированы в конструктивных терминах (терминах наилучших приближений). Однако такие условия могут быть сформулированы и в структурных терминах функций $f \in S^p_m$.

Действительно, в силу аналогов теорем типа Джексона для $f \in S^p$, $1 \le p < \infty$, (см. [8]) справедливо неравенство

$$E_{n,\ldots,n}(f)_{S^p_m} \le A(p,m)\,\omega_l(f,\frac{1}{n})_{S^p_m}, \tag{14}$$

где $A(p,m)$ — константа, не зависящая от функции, l — любое натуральное число,

$$\omega_l(f,\rho)_{S^p_m} = \omega_l(f,h_1,h_2,...,h_m)_{S^p_m} =$$

$$= \sup \left\| \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{l-\nu} \left(\begin{array}{c} l \\ \nu \end{array} \right) f(x_1+\nu t_1,...,x_m+\nu t_m) \right\|_{S^p_m}$$

— полный модуль гладкости порядка l функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, верхняя грань берется по всем $\sqrt{t_1^2+t_2^2+...+t_m^2} \le \rho = \sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_m^2}$.

Поэтому, благодаря теореме 5 для вложения функции $f \in S^r_m$ в класс $f \in S^p_m$, $1 \le p < r < \infty$, вместо условия сходимости ряда (8) может быть использовано следующее условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_l^p \left(f,\frac{1}{n}\right)_{\tilde{S}^r_m} n^{m\,(1-\frac{p}{r})-1} < \infty.$$

Указанные выше в статье утверждения показывают каким образом теоремы вложения для пространств S^p_m отличаются от аналогичных утверждений для пространств L^m_p.

1. *Тиман М.Ф.* Об одном классе кратных рядов Фурье // Теоретические и прикладные вопросы математики. Сентябрь 1985, Тарту. — С. 180-181.
2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p. — Киев, 2001. — 85 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М, 1965. — Т.1.

4. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Днепропетровск: “Полиграфист”, 2000. — 320 с.

5. *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и наилучшие приближения // Докл. АН СССР Сер. Матем. — 1969. — Т.184, № 5. – С. 1045–1047.

6. *Тиман М.Ф.* Ортонормированные системы, удовлетворяющие неравенству С.Н.Никольского // Analysis Mathematic. — 1978. — № 4. — С.75-82.

7. *Конюшков А.А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, 86:11 — С.53–84.

8. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространствах S^p // Укр. мат. журн. — 2002. – Т.54, № 1 — С.106–124.

9. *Тиман М.Ф.* Некоторые дополнения к теоремам вложения П.Л. Ульянова // Изв.ВУЗов, Математика. — 1984. — № 5,— С.57–63