Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 385-394

УДК 517.5

Э. А. Стороженко (Одес. гос. ун-т, Одесса)

О ПРИРАЩЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0-МЕТРИКЕ

Посвящается светлой памяти
Александра Ивановича Степанца

Обобщается неравенство С. Н. Бернштейна

$$\|T_n(x+h) - T_n(x-h)\|_C \le 2\sin nh \, \|T_n\|_C, \quad 0 < h \le \frac{\pi}{2n},$$

на случай алгебраических полиномов для приращения вдоль дуги и вдоль радиуса единичного круга при любых $0 < h < \pi$ и $0 < r < 1$ в L_0-метрике. Рассматриваются также специальные разности m-го порядка.

1. Неравенство С.Н. Бернштейна [1] о приращении тригонометрического полинома $T_n(x)$

$$\|T_n(x+h) - T_n(x-h)\|_C \le 2\sin nh \, \|T_n\|_C, \quad 0 < h \le \frac{\pi}{2n} \tag{1}$$

является более общим по сравнению с классической оценкой того же автора

$$\|T_n'\|_C \le n \, \|T_n\|_C \tag{2}$$

(в пределе при $h \to 0$ из (1) следует (2)).

Если наряду с первой разностью полинома $T_n(x)$ рассматривать разности порядка m, определенные равенствами

$$\Delta_n^m T_n(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k T_n(x + (m-2k)h), \quad m{=}2, 3, \ldots, \tag{3}$$

то справедливы аналогичные оценки

$$\|\Delta_n^m T_n(x)\|_C \le (2\sin nh)^m \, \|T_n\|_C, \quad 0 < h \le \frac{\pi}{2n}. \tag{4}$$

Константы в неравенствах (1), (2) и (4) точные. Перечисленные неравенства распространены на L_p-пространства с $p \geq 1$ (см., например, [2, с. 228]). Сохраняя прежнюю методику доказательства, разным авторам ([3,4]) удалось получить L_p-аналоги неравенства (2) с $0 < p < 1$, однако в правой части (2) почвилась константа, неограничено возрастающая при $p \to 0$.

Решающая роль в нахождении точной L_p-оценки, когда $0 < p < 1$, в (2) принадлежит В.В. Арестову. Именно он впервые доказал, что оценка (2) справедлива во всех L_p, $0 \leq p \leq \infty$ с одной и той же константой. Работы В.В. Арестова [5,6] содержат ряд теорем, позволяющих доказывать различные L_p-неравенства на основе оценок в L_0 для комплексных алгебраических полиномов.

Под влиянием этих исследований появилась статья автора о неравенствах вида (1) в L_0 (см. [7]).

В настоящей работе результаты статьи [7] дополнены новыми оценками, в которых увеличена верхняя граница для h: $0 < h < \pi$. Ограничение $0 < h \leq \frac{\pi}{2n}$ в (1) и (4) связаны с методом доказательства. С.Б. Стечкин [8], занимаясь близкими задачами, заметил, что было бы интересно расширить значения для h.

Кроме того, нами получен аналог неравенства (4). Но специфика "квазинормы"в L_0 повлияла на другой выбор m-ых разностей по сравнению с (3).

2. Приведем определения и формулировки теорем, которые будут использованы в доказательствах.

Пусть $P_n(z)$ — полином степени n с комплексными коэффициентами. Тогда

$$\|P_n\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P_n\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\right).$$

Следуя К. Малеру, величину $\|P_n\|_0$ будем называть мерой полинома P_n.

При изучении свойств пространств Харди нами были введены специальные разности порядка m (см. [9]), которые основываются на следующих соображениях: значения полинома P_n выбираются в равноотстоящих точках на окружности и разности порядка $m \leq n$ должны аннулировать все полиномы степени $m - 1$.

Обозначая такие разности квадратными скобками, запишем для них рекуррентное соотношение:

$$[P_n, z]_h^m = [P_n, z]_h^{m-1} - e^{i(m-1)h}\left[P_n, ze^{ih}\right]_h^{m-1}. \qquad (5)$$

В частности,

$$[P_n, z]_h^1 = P_n(z) - P_n\left(ze^{ih}\right),$$

$$[P_n, z]_h^2 = P_n(z) - \left(1 + e^{-ih}\right)P_n\left(ze^{ih}\right) + e^{-ih}P_n\left(ze^{2ih}\right).$$

Всюду в дальнейшем полином P_n будем записывать в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k. \qquad (6)$$

Индукцией по m на основании (5) и (6) выразим разность $[P_n, z]_h^m$ через коэффициенты $P_n(z)$:

$$[P_n, z]_h^m = \sum_{k=m}^{n} C_n^k a_k \left(1 - e^{ikh}\right)\left(1 - e^{i(k-1)h}\right)\dots\left(1 - e^{i(k-m+1)h}\right)z^k, \qquad (7)$$

$$m = 1, 2, \dots, n.$$

Важную роль в доказательствах играет связь между мерами полиномов, образующих композицию по Сеге. Если записать полиномы P_n, Q_n и R_n в виде (6) с коэффициентами, соответственно равными a_k, b_k и c_k, предполагая $c_k = a_k b_k$, то полином R_n образует композицию P_n и Q_n; условимся это записывать так: $R_n = P_n \otimes Q_n$.

Теорема A (В.В.Арестов [6], частный случай теоремы 1). *Если* $R_n = P_n \otimes Q_n$, *то* $\|R_n\|_0 \le \|Q_n\|_0 \cdot \|P_n\|_0$.

Сформулируем теорему из [7] о приращении полинома P_n в L_0.

Теорема B.

$$\left\|P_n(z) - P_n\left(ze^{ih}\right)\right\|_0 \le 2\left(n \sin\frac{nh}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|P_n\|_0, \quad 0 < h \le \frac{\pi}{n}, \qquad (8)$$

$$\|P_n(z) - P_n(rz)\|_0 \le n(1-r)\|P_n\|_0, \quad 1 - r \le 4\sin^2\frac{\pi}{n}, \qquad (9)$$

Знак равенства в (8) и (9) *достигается на полиноме* $(1+z)^n$ *при* $h = \frac{\pi}{n}$ *и* $1 - r = 4\sin^2\frac{\pi}{n}$.

3. Приведем результаты настоящей статьи.

Теорема 1.

$$\left\|P_n\left(z\right)-P_n\left(ze^{ih}\right)\right\|_0 \le 2n\sin\frac{h}{2}\cdot\left(e\sin^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{4}\right)^{\frac{(n-1)h}{\pi}}\left\|P_n\right\|_0,\ 0<h<\pi, \tag{10}$$

$$\left\|P_n\left(z\right)-P_n\left(rz\right)\right\|_0 \le n\left(1-r\right)\cdot e^{\frac{2(n-1)}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{1-r}}{2}}\left\|P_n\right\|_0,\ 0<r<1, \tag{11}$$

При $h=\frac{\pi}{n-1}r=1-\sin^2\frac{\pi}{n}$ *оценки* (10) *и* (11) *по порядку относительно* n *совпадают с наилучшими.*

Теорема 2.

$$\left\|\left[P_n,z\right]_h^m\right\|_0 \le 2^m\left(\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\sin\frac{(n-k)\,h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|P_n\right\|_0,\ m\le n,\ 0<h\le\frac{\pi}{n}, \tag{12}$$

или

$$\left\|\left[P_n,z\right]_h^m\right\|_0 \le \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^m\cdot\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\cdot\left(e\sin^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{4}\right)^{\frac{hm}{\pi}\left(n-\frac{m-1}{2}\right)}\left\|P_n\right\|_0, \tag{12}$$

$$0<h<\pi.$$

4. ***Доказательство теоремы 1.*** В процессе доказательств неравенств (10) и (11) понадобится одно элементарное неравенство для комплексных чисел a и b:

$$\left|a^n-b^n\right|\le\left|a-b\right|\cdot n\sup\left(\left|a\right|^{n-1},\left|b\right|^{n-1}\right),\quad n\in N, \tag{13}$$

и оценка интеграла

$$-\int_0^\alpha \ln\sin t dt\le\alpha\left(-\ln\sin\alpha+1\right),\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Начнем доказательство с оценки (10). Составляем композицию разности $P_n\left(z\right)-P_n\left(ze^{ih}\right)$ с полиномами P_n и Q_n. Очевидно, $Q_n\left(z\right)=$

$\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \left(1 - e^{ikh}\right) z^k = (1+z)^n - \left(1 + ze^{ih}\right)^n$. По теореме А достаточно оценить интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|Q_n\left(e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\left(1+e^{i\varphi}\right)^n-\left(1+e^{i(\varphi+h)}\right)^n\right|d\varphi.$$

Чтобы применить неравенство (13) к выражению под знаком ln, определим те значения φ, при которых $\left|1+e^{i(\varphi+h)}\right| \le \left|1+e^{i\varphi}\right|$. Решая это неравенство, получаем

$$\left|1+e^{i(\varphi+h)}\right| \le \left|1+e^{i\varphi}\right|, \quad -\frac{h}{2} \le \varphi \le \pi - \frac{h}{2}.$$

Для остальных значений φ $\pi - \frac{h}{2} \le \varphi \le 2\pi - \frac{h}{2}$ выполняется противоположное неравенство. Следовательно, согласно (13)

$$I\le \ln 2n\sin\frac{h}{2}+\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-h/2}^{\pi-h/2}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|^{n-1}d\varphi+\int\limits_{\pi-h/2}^{2\pi-h/2}\ln\left|1+e^{i(\varphi+h)}\right|^{n-1}d\varphi\right].$$

Убеждаемся в том, что каждый из интегралов в квадратных скобках равен друг другу. Поэтому

$$I \le \ln 2n\sin\frac{h}{2} + \frac{n-1}{\pi}\int\limits_{-h/2}^{\pi-h/2}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|d\varphi.$$

Последний интеграл преобразуем с учетом равенства нулю интеграла $\int\limits_0^{\pi}\ln\left|1+e^{i\varphi}d\varphi\right|$:

$$\int\limits_{-h/2}^{\pi-h/2}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|d\varphi = \int\limits_{-h/2}^{0}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|d\varphi - \int\limits_{\pi-h/2}^{\pi}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{h/2}\ln\left|1+e^{i\varphi}\right|d\varphi - \int\limits_{-h/2}^{0}\ln\left|1-e^{i\varphi}\right|d\varphi = \int\limits_0^{h/2}\ln\left|\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right|d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{h/2} \ln \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} d\varphi \le -2 \int\limits_0^{h/4} \ln \sin\varphi d\varphi.$$

Далее продолжаем оценку I при помощи (14):

$$I \le \ln 2n \sin\frac{h}{2} + \frac{n-1}{\pi}\cdot\frac{h}{2}\left(-\ln\sin\frac{h}{4}+2\right).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\|Q_n\|_0 \le 2n\sin\frac{h}{2}\cdot e^{\frac{n-1}{\pi}h}\cdot\left(\sin\frac{h}{4}\right)^{-\frac{n-1}{\pi}\cdot\frac{h}{2}}$$

и (10) доказано. Отметим, что всюду в доказательстве можно считать $0 < h < \pi$.

Перейдем к оценке (11). Сохраняя предыдущий способ рассуждений, опустим некоторые подробности.

Композиция Сеге и теорема А приводят к нахождению меры полинома $Q_n(z) = (1+z)^n - (1+rz)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-r^k\right)z^k$. Так как все коэффициенты Q_n действительные числа, то в определении меры Q_n достаточно ограничится промежутком $[0,\pi]$.

Определим φ, при которых $\left|1+re^{i\varphi}\right| \le \left|1+e^{i\varphi}\right|$. Из неравенства $(1-r)^2 + 4r\cos^2\frac{\varphi}{2} \le 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$ вытекает, что $\cos\frac{\varphi}{2} \ge \frac{\sqrt{1-r}}{2}$. Обозначим $\alpha = 2\arccos\frac{\sqrt{1-r}}{2}$. Тогда

$$\left|1+re^{i\varphi}\right| \le \left|1+e^{i\varphi}\right|, \quad 0\le\varphi\le\alpha,$$

$$\left|1+e^{i\varphi}\right| \le \left|1+re^{i\varphi}\right| \le \sqrt{1-r}, \quad \alpha\le\varphi\le\pi.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \ln\max\left(\left|1+e^{i\varphi}\right|^{n-1}, \left|1+re^{i\varphi}\right|^{n-1}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\alpha}\ln\left(\left|1+e^{i\varphi}\right|^{n-1}\right)d\varphi + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\pi}\ln\left(\left|1+re^{i\varphi}\right|^{n-1}\right)d\varphi$$

и

$$\frac{\pi}{n-1}I \leq \int\limits_{\alpha}^{\pi} \ln\left(\sqrt{1-r}\right) d\varphi - \int\limits_{\alpha}^{\pi} \ln 2\cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= (\pi-\alpha)\ln\sqrt{1-r} - (\pi-\alpha)\ln 2 - \int\limits_{\alpha}^{\pi} \ln\cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= (\pi-\alpha)\ln\frac{\sqrt{1-r}}{2} - 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \ln\sin\varphi d\varphi \leq (\pi-\alpha)\left[\ln\frac{\sqrt{1-r}}{2} - \ln\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right] =$$

$$= \pi-\alpha = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{1-r}}{2}\right) = 2\arcsin\frac{\sqrt{1-r}}{2}.$$

Таким образом,

$$\|Q_n\|_0 \leq n(1-r)\sin\frac{h}{2}\cdot e^{\frac{2(n-1)}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{1-r}}{2}}$$

и (11) доказано.

Вопрос об окончательности полученных неравенств можно решить сравнением (10) и (11) с (8) и (9) при $h=\frac{\pi}{n}$ и $1-r=4\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Если $h=\frac{\pi}{n}$, то коэффициент в (8) равен $2\sqrt{n}$. Пусть $h=\frac{\pi}{n-1}$, коэффициент в (10) не превосходит $2e\cdot n\sin\frac{\pi}{2(n-1)}\sqrt{2(n-1)}$, т.е. порядок относительно nодин и тот же.

При $1-r=4\sin^2\frac{\pi}{n}$ коэффициент в (11) $n(1-r)\sin\frac{h}{2}\cdot e^{\frac{2(n-1)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}} \leq e^2 n(1-r)$, т.е. отличается от коэффициента в (9) на множитель e^2.

Такое сравнение позволяет считать, что наш метод вполне удовлетворительный в смысле точности.

5. ***Замечание к теореме 1.*** Замечание касается оценки меры полинома Q_n снизу. Если воспользоваться неравенством

$$|a^n-b^n| \geq |a-b|\cdot n\inf\left(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}\right), \quad n\in N$$

и определять inf по аналогии с sup, как это делалось при доказательстве теоремы, то $\inf=(\sup)^{-1}$. Поэтому наилучшая оценка $\|Q_n\|_0$ без учета множителя $|a-b|\cdot n$ будет в том случае, когда h или $1-r$ выбрать таким образом, чтобы inf и sup после подстановки значений h или $1-r$ не зависили от n.

Например, в оценке (10) множитель $\left(\sin\frac{h}{4}\right)^{-\frac{n-1}{\pi}\cdot\frac{h}{2}}$ не зависит от n, если $h=\frac{\pi}{(n-1)\ln n}$, и тогда

$$C_1 n\sin\frac{h}{2}\le\|Q_n\|_0\le C_2 n\sin\frac{h}{2}.$$

Оценки $C_3\le\|Q_n\|_0\le C_4$ возможны и при более медленном убывании $h=\frac{\pi}{(n-1)\sqrt{\ln n}}$.

Очевидно, при $1-r=4\sin^2\frac{\pi}{n}$

$$n\,(1-r)\le\|Q_n\|_0\le e^2 n\,(1-r)\,,$$

а если $1-r=\left(\frac{\ln n-2\ln\ln n}{n}\right)^2$, то $\|Q_n\|_0$ ограничено сверху и снизу константой.

6. *Доказательство теоремы 2.* Полином $[P_n,z]_h^m$ на основании равенства (7) образует композицию с полиномами P_n и

$$Q_n=\sum_{k=m}^{n}C_n^k\left(1-e^{ikh}\right)\dots\left(1-e^{i(k-m+2)h}\right)\left(1-e^{i(k-m+1)h}\right)z^k=[(1+z)^n,z]_n^m,$$

и по теореме A $\|[P_n,z]_h^m\|_0\le\|Q_n\|_0\cdot\|P_n\|_0$.

Вычислять меру $\|Q_n\|_0$ будем последовательным применением теоремы B и при этом заметим, что мера полинома не изменяется, если его разделить или умножить на некоторую степень z.

После деления на z^{m-1} полином Q_n можно рассматривать как первую разность полинома

$$R_{n-m+1}=\sum_{k=m-1}^{n}C_n^k\left(1-e^{ikh}\right)\dots\left(1-e^{i(k-m+2)h}\right)z^{k-m+1},$$

и тогда по теореме B

$$\|Q_n\|_0=\left\|z^{-m+1}Q_n\right\|_0=\left\|[R_{n-m+1},z]_h^1\right\|_0\le$$

$$\leq 2\left((n-m+1)\sin\frac{(n-m+1)\,h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\|R_{n-m+1}\|_0\,,\quad h\leq\frac{\pi}{n-m+1}.$$

Теперь полином zR_{n-m+1} представляет первую разность полинома

$$S_{n-m+2}=\sum_{k=m-2}^{n}C_n^k\left(1-e^{ikh}\right)\dots\left(1-e^{i(k-m+3)h}\right)z^{k-m+2},$$

и поэтому

$$\|R_{n-m+1}\|_0=\|zR_{n-m+1}\|_0=\left\|[S_{n-m+2},z]_h^1\right\|_0\leq$$

$$\leq 2\left((n-m+2)\sin\frac{(n-m+2)\,h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\|S_{n-m+2}\|_0\,,\quad h\leq\frac{\pi}{n-m+2}.$$

Продолжая рассуждать по индукции в конечном счете придем к полиному

$$U_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left(1-e^{ikh}\right)z^k,$$

который как раз и является первой разностью $(1+z)^n$. Значит,

$$\|U_{n-1}\|_0=\left\|[(1+z)^n\,,z]_h^1\right\|_0\leq 2\left(n\sin\frac{nh}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad h\leq\frac{\pi}{n}.$$

Перемножая полученные меры и выбирая наименьшее значение $h\leq\frac{\pi}{n}$, приходим к окончательному результату (12).

Вместо теоремы В можно использовать теорему 1 (оценку 10). Тогда получим неравенство для $\|[P_n,z]_h^m\|_0$ с более громоздким коэффициентом

$$\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^m\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\cdot\left(e\sin^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{4}\right)^{\frac{h}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{m-1}(n-k-1)}=$$

$$=\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^m\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)\cdot\left(e\sin^{-\frac{1}{2}}\frac{h}{4}\right)^{\frac{hm}{\pi}\left(n-\frac{m-1}{2}\right)},\quad 0<h<\pi.$$

7. *Замечание к теореме 2.* Можно рассматривать значения полинома P_n вдоль некоторого радиуса и разность порядка m задать суммой (сохраняя для неё прежнее треугольное обозначение):

$$\Delta_{1-r}^{m} P_n(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k P_n(z(1-k(1-r))).$$

Такие разности были введены А.В. Товстолисом и Р.М.Тригубом [9] для определения радиальных модулей гладкости в пространствах H^p, $p > 0$. Как и разности (3) они обладают свойствами: $\Delta_{1-r}^{m} P_n(z) = \Delta_{1-r}^{1} \Delta_{1-r}^{m-1} P_n(z)$ и аннулируют многочлены степени не выше $m-1$.

Поэтому метод индукции при помощи неравенств (9) и (1) дает две оценки

$$\left\|\Delta_{1-r}^{m} P_n(z)\right\|_0 \le (1-r)^m \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) \left\|P_n\right\|_0, \quad 1-r \le 4\sin^2\frac{\pi}{n},$$

$$\left\|\Delta_{1-r}^{m} P_n(z)\right\|_0 \le$$

$$\le (1-r)^m \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) \cdot e^{\frac{2m}{\pi}\left(n-\frac{m-1}{2}\right)\arcsin\frac{\sqrt{1-r}}{2}} \cdot \left\|P_n\right\|_0, \quad 0 < r < 1.$$

1. *Бернштейн С.Н.* Распространение неравенства С.Б.Стечкина на целые функции конечной степени // Докл. АН СССР. — 1948. — **16**. — С. 1487–1490.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматиз, 1960. — 624 с.
3. *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, 0<p<1 // Мат. сб. — 1975. — **98(140)**, №3(11). — С. 395–415.
4. *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для 0<p<1 // Мат. зам. — 1975. — **18**, С. 641–658.
5. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1981. **45**, С. 3-22.
6. *Арестов В.В.* Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. зам. — 1990. — **48**, №4. — С. 7-18.
7. *Стороженко Э.А.* Разностные неравенства для полиномов в L_0 // Мат. студії. — **22**, №1. — С. 3-22.
8. *Стечкин С.Б.* Обобщение некоторых неравенств С.Н.Бернштейна // Докл. АН СССР. — 1948. — **60**, №9, С. 1511–1514.
9. *Товстолис А.В., Тригуб Р.М.* Эквивалентность разных модулей гладкости в пространствах Харди // Тр. Ин-та прикл. мат. и мех. НАН Украины. — 1998. — **3**. — С. 201-210.