Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 367-384

УДК 517.51

С.А. Стасюк, С.Я. Янченко
(Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ $L_p(R^d)$

Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних цілими функціями експоненціального типу в просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$.

В роботі розглянуто класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних, елементами яких є функції з простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є неперіодичним аналогом класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (зберігаємо таке ж позначення) функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ 2π–періодичних по кожній змінній, які були розглянуті в [1].

Одержано точні за порядком оцінки наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ за допомогою елементів підпростору цілих функцій експоненціального типу, а точніше за допомогою функцій із $L_p(\mathbb{R}^d)$, носій перетворення Фур'є яких зосереджений на спеціальних областях із $\mathbb{R}^d$ (теорема 1). Базою в таких оцінках є встановлена теорема про еквівалентність норми функцій із просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ спеціальному виразу (теорема 2).

1. Означення класів функцій та апроксимативних величин. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідовий простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Означимо основні об'єкти, що вивчаються в даній роботі, — класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ..., x_d)$$

— різниця l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ з кроком h_j за змінною x_j,

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\Delta_{h_{d-1}}^l ... (\Delta_{h_1}^l f(x)), \ h = (h_1, \ldots, h_d),$$

і

$$\Omega_l(f,t)_p := \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^l f(x)\|_p$$

— мішаний модуль неперервності функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Тут $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$ (надалі будемо писати $t \ge 0$), $|h| := (|h_1|, ..., |h_d|)$ і нерівність $|h| \le t$ означає, що $|h_j| \le t_j$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, що визначена на $\mathbb{R}_+^d$ і задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0, \ t > 0; \ \Omega(t) = 0, \quad \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \Big)^l \Omega(t), \ m_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1,d};$

4) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$.

Також будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [2] і які полягають в наступному.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), $l \in \mathbb{N}$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}} \ , \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i,\ i \neq j$. Стверджуючи це, (також і для функції $\omega(t)$ однієї змінної) будемо використовувати запис: $\Omega \in \Psi_l,\ l \in \mathbb{N}$.

Нехай далі $e_d := \{1,2,...,d\}$, $d \in \mathbb{N}$, $e = \{j_1,...,j_m\}$, $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_m \le d$, $t^e = (t_{j_1},\dots,t_{j_m})$, $\bar{t}^e := (\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_d)$, де

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_i, & i \in e, \\ 1, & i \in e_d \setminus e. \end{cases}$$

Отже, для $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і функції $\Omega(t) = \Omega(t_1,\dots,t_d)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l покладемо

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in L_p(\mathbb{R}^d):\ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \left(\int_0^2 \dots \int_0^2 \Big(\frac{\Omega_{l^e}(f,t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \Big)^{\theta} \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad (1)$$

при $1 \le \theta < \infty$ та

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} := \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \sup_{t^e > 0} \frac{\Omega_{l^e}(f,t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)}. \qquad (2)$$

Зазначимо також, що

$$\Omega_{l^e}(f,t^e)_p := \sup_{|h^e| \le t^e} \|\Delta^{l^e}_{h^e} f(\cdot)\|_p, \quad h^e := (h_{j_1},\dots,h_{j_m}),$$

$$\Delta^{l^e}_{h^e} f(x) = \Delta^l_{h_{j_m}} (\Delta^l_{h_{j_{m-1}}} ... (\Delta^l_{h_{j_1}} f(\dots,x_{j_1},\dots,x_{j_m},\dots))).$$

Тепер дамо означення апроксимативної величини, яка буде досліджуватись.

Для $s = (s_1,...,s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d}$, покладемо

$$Q_{2^s} := \big\{\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d):\ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \le |\lambda_j| < 2^{s_j},\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,d}\big\}$$

і

$$\rho(s) := Q_{2^s} \cap \mathbb{Z}^d,$$

де вважаємо, що $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1,\ t > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$ введемо позначення

$$\overset{1}{Q}_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} Q_{2^s},$$

де $\|s\|_1 = s_1 + ... + s_d$. Множина $\overset{1}{Q}_n$ породжує в $\mathbb{R}^d$ так званий східчастий гіперболічний хрест. Для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ через $\mathfrak{F}f$ позначимо перетворення Фур'є функції f, а через $\mathfrak{F}^{-1}f$ — її обернене перетворення. Покладемо

$$G_p(\overset{1}{Q}_n) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \mathfrak{F}f \subseteq \overset{1}{Q}_n \right\}.$$

Множина $G_p(\overset{1}{Q}_n)$ — підпростір в $L_p(\mathbb{R}^d)$, а її елементи — цілі функції експоненціального типу.

Величина

$$E_n(f)_p := E(f, G_p(\overset{1}{Q}_n))_p := \inf_{g \in G_p(\overset{1}{Q}_n)} \|f - g\|_p$$

називається найкращим наближенням функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ функціями із $G_p(\overset{1}{Q}_n)$.

Для $F \subset L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$E_n(F)_p = \sup_{f \in F} E_n(f)_p. \tag{3}$$

2. Основний результат (формулювання). Надалі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$.

Всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_s(f,x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{Q_{2^s}})$$

і

$$S_n(f,x) = \sum_{\|s\|_1<n} \delta^*_s(f,x).$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *— функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку* l, $\omega \in \Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді мають місце порядкові співвідношення*

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \asymp \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$, $p^* = \min\{p;\ 2\}$.

3. Допоміжні результати.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [3, с. 81]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3\|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s\ge 0} |\delta^*_s(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_4 \|f\|_p.$$

Як наслідок з теореми A легко отримати таке співвідношення (див., наприклад, [4, с. 17])

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_{s\ge 0} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}},\ \ p^* = \min\{p, 2\}. \qquad (4)$$

Далі сформулюємо і доведемо важливе твердження про представлення норми функцій з простору $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в термінах, відмінних від тих, в яких подається її вихідне означення (див. (1) і (2)). Дане твердження буде суттєво використане в подальших міркуваннях і в доведенні основної теореми 1.

Теорема 2. *Нехай $1 < p < \infty$ і $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, $\Omega \in \Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$. Функція $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\{ \sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\delta_s^*(f, \cdot)||_p^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\delta_s^*(f, \cdot)||_p^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

де, для $s = (s_1, \dots, s_d)$, $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$.

Функція $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{s \ge 0} \frac{||\delta_s^*(f, \cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \ge 0} \frac{||\delta_s^*(f, \cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{5}$$

Доведення. *Оцінки зверху.*

Нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, тобто

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1.$$

Покажемо спочатку, що

$$\left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{6}$$

для $e = e_d$, тобто, що

$$\left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{7}$$

Тут же зауважимо, що доведення (6) для випадку $e \subset e_d$ і $e \neq e_d$ аналогічне.

Оскільки $[0,2]^d = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^d_+} [2^{-k}, 2^{-k+1}]$, де $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$ і $[2^{-k}, 2^{-k+1}] = [2^{-k_1}, 2^{-k_1+1}] \times ... \times [2^{-k_d}, 2^{-k_d+1}]$, то

$$\int\limits_0^2 ... \int\limits_0^2 \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} = \sum_{k \geq 0} \int\limits_{2^{-k_1}}^{2^{-k_1+1}} ... \int\limits_{2^{-k_d}}^{2^{-k_d+1}} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \ll \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\Omega_l(f, 2^{-k})_p}{\Omega(2^{-k})} \right)^{\theta}, \tag{8}$$

(тут і надалі, якщо $k = (k_1, \dots, k_d)$, то $2^{-k} := (2^{-k_1}, \dots, 2^{-k_d})$).

Далі, згідно з означенням модуля неперервності, й того, що $f(x) = \sum\limits_{s \geq 0} \delta^*_s(f,x)$ (див., наприклад, [5, с. 145]), можна записати

$$\Omega_l(f, 2^{-k})_p = \sup_{|h| \leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p \leq \sum_{s \geq 0} \sup_{|h| \leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h \delta^*_s(f,\cdot)\|_p.$$

Використовуючи нерівність $\|\Delta^l_{h_j} g\|_p \leq |h_j|^l \left\| \frac{\partial^l g}{\partial x^l_j} \right\|_p$ (див., наприклад, [3, с. 202]) та нерівність Бернштейна для цілих функцій експоненціального типу, отримуємо

$$\|\Delta^l_h \delta^*_s(f,\cdot)\|_p \leq \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^d \min\{1, |h_j|^l 2^{s_j l}\}.$$

Звідси випливає, що

$$\sup_{|h| \leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h \delta^*_s(f,\cdot)\|_p \leq \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^d \min\{1, 2^{l(s_j - k_j)}\}$$

і

$$\Big(\Omega_l(f, 2^{-k})_p \Big)^{\theta} \ll \left(\sum_{s \geq 0} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^d \min\{1, 2^{l(s_j - k_j)}\} \right)^{\theta} =$$

$$= \left(\sum_{e \subset e_d} \sum_{s \in \Upsilon_e(2^{-k})} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\} \right)^{\theta}, \qquad (9)$$

де $\Upsilon_e(2^{-k}) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d : s_j \le k_j,$ якщо $j \in e$, і $s_j > k_j$, якщо $j \in e_d \backslash e\}$.

Таким чином, враховуючи (8) і (9), можемо записати

$$\left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \sum_{e \subset e_d} \left(\sum_{k \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-k}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{s \in \Upsilon_e(2^{-k})} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\} \right)^{\theta} \right). \qquad (10)$$

Далі, проводячи для правої частини співвідношення (10) міркування, аналогічно, як і в [1] (з формальною заміною $\|\delta_s(f,\cdot)\|_p$ на $\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p$), встановлюємо співвідношення

$$\sum_{k \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-k}) \left(\sum_{s \in \Upsilon_e(2^{-k})} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\} \right)^{\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta}. \qquad (11)$$

Об'єднуючи (10) і (11), отримуємо (7). Беручи до уваги те, що кількість підмножин $e \subset e_d$ залежить лише від d, і враховуючи також, що

$$\|f\|_p \le \sum_{s \ge 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \ll \sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \qquad (11^*)$$

з (1) і (6), одержуємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \left(\sum_{s \ge 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Нехай тепер $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$, тобто

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \sup_{t^e > 0} \frac{\Omega_{l^e}(f,t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \le 1.$$

Доведемо, що для $e = e_d$ виконується співвідношення

$$\sup_{t^e>0} \frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \ll \sup_{s\geq 0} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p, \tag{12}$$

тобто

$$\sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \ll \sup_{s\geq 0} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p. \tag{13}$$

Доведення (12) для випадку $e \subset e_d$ $(e \neq e_d)$ аналогічне.

Використовуючи нерівність

$$\sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \ll \sup_{k\geq 0} \frac{\Omega_l(f, 2^{-k})_p}{\Omega(2^{-k})}, \tag{14}$$

аналогічно, як і у випадку $1 \leq \theta < \infty$, одержуємо

$$\sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \ll \sum_{e\subset e_d} \Big(\sup_{k\geq 0} \Omega^{-1}(2^{-k}) \sum_{s\in \Upsilon_e(2^{-k})} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\} \Big).$$

Далі, міркуючи аналогічно, як і в роботі [6], встановлюємо справедливість співвідношення

$$\sup_{k\geq 0} \Omega^{-1}(2^{-k}) \left(\sum_{s\in \Upsilon_e(2^{-k})} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\} \right) \ll$$

$$\ll \sup_{s\geq 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \Omega^{-1}(2^{-s}).$$

З (11^*) для $\theta = \infty$ маємо

$$\|f\|_p \ll \sup_{s\geq 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \Omega^{-1}(2^{-s}). \tag{14*}$$

Доведення (12) для випадку $e \subset e_d$ і $e \neq e_d$ — аналогічне, а отже, із (2), (12) і (14^*), отримуємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \ll \sup_{s\geq 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \Omega^{-1}(2^{-s}).$$

Оцінки знизу.

Спочатку покажемо, що для довільного $s=(s_1,\dots,s_d)\in\mathbb{Z}_+^d$

$$\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \ll \Omega_l(f,2^{-s})_p. \tag{15}$$

Безпосередньо із означення модуля неперервності, застосовуючи теорему A, отримуємо

$$\Omega_l(f,2^{-s})_p \geq \|\Delta_{2^{-s}}^l f(\cdot)\|_p \gg \|\Delta_{2^{-s}}^l \delta_s^*(f,\cdot)\|_p =$$

$$= \Bigg\| \sum_{k\in\rho(s)} c_k^\gamma \Bigg(\prod_{j=1}^d \Big(e^{ik_j\frac{\pi}{\gamma}2^{-s_j}} - 1 \Big)^l \Bigg) e^{i\frac{\pi}{\gamma}(k,\cdot)} \Bigg\|_p, \tag{16}$$

де

$$c_k^\gamma = \frac{1}{(2t)^d}\int_{\square_\gamma} f(p) e^{-i\frac{\pi}{\gamma}(k,p)}\,dp,$$

$\square_{\gamma_0}=\{|x_j|<\gamma_0, j=\overline{1,d}\}$ — множина, до якої належить носій функції $f(x)$, а $\gamma\geq\gamma_0$.

Зауважимо, що

$$\delta_s^*(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k^\gamma e^{i\frac{\pi}{\gamma}(k,x)}.$$

Неважко показати, що числа

$$\big(\lambda_{k_j}^l(s_j)\big)^{-1} = \Big(\big(e^{ik_j\frac{\pi}{\gamma}2^{-s_j}} - 1 \big)^l \Big)^{-1}, \quad \eta(s_j)2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j},$$

задовольняють умову теореми Марцинкевича (див., наприклад, [3, с. 69]), а тому

$$\|\Delta_{2^{-s}}^l \delta_s^*(f,\cdot)\|_p \gg \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p.$$

Підставляючи останнє співвідношення в (16), отримуємо (15).

Отже, якщо $1\leq\theta<\infty$, то згідно з (15) будемо мати

$$\Bigg(\sum_{s\geq 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll \Bigg(\sum_{s\geq 0} \Omega_l^\theta(f,2^{-s})_p \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\geq 0} \int\limits_{2^{-s_1}}^{2^{-s_1+1}} \dots \int\limits_{2^{-s_d}}^{2^{-s_d+1}} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Аналогічно, для випадку $\theta = \infty$, враховуючи (15), одержуємо

$$\sup_{s\geq 0} \frac{\|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \sup_{s\geq 0} \frac{\Omega_l(f,2^{-s})_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}}.$$

Оцінки знизу встановлені.

Теорему доведено.

Зауваження 1. При $\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{r_d}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами $S^r_{p,\theta}B$ (див., [7, 8]) і в цьому випадку з теореми 2 випливає відповідне твердження для класів $S^r_{p,\theta}B$, яке одержане в роботі [5].

4. Доведення теореми 1. При доведенні теореми 1 будемо використовувати деякі факти, які ми тут наводимо.

Лема А. *Нехай $\Lambda(t) = \lambda(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\lambda(\tau)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, що задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$. Тоді*

$$\left(\sum_{\|s\|_1\geq n} \Lambda^a(2^{-s}) \right)^{1/a} \asymp \lambda(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{a}}, \quad a > 0.$$

Доведення. Оскільки $\Lambda(t) = \lambda\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big)$ задовольняє умову (S) із деяким $\alpha > 0$, то

$$\frac{\lambda(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}} \ll \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \tag{17}$$

при $\|s\|_1 \geq n$.

Тому, з одного боку, з урахуванням (17) одержуємо

$$\left(\sum_{\|s\|_1\geq n} \Lambda^a(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{a}} = \left(\sum_{\|s\|_1\geq n} \left(\frac{\lambda(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}} 2^{-\alpha\|s\|_1} \right)^a \right)^{\frac{1}{a}} \ll$$

$$\ll \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} \left(2^{-\alpha\|s\|_1}\right)^a \Big)^{\frac{1}{a}} = \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Big(\sum_{m=n}^{\infty} \left(2^{-\alpha m}\right)^a \sum_{\|s\|_1=m} 1 \Big)^{\frac{1}{a}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\, 2^{-\alpha n}\, n^{\frac{d-1}{a}} = \lambda(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{a}}. \qquad (18)$$

З другого боку, маємо

$$\Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Lambda^a(2^{-s}) \Bigg)^{\frac{1}{a}} \gg \Bigg(\sum_{\|s\|_1 = n} \Lambda^a(2^{-s}) \Bigg)^{\frac{1}{a}} \asymp \lambda(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{a}}. \qquad (19)$$

Із (18) та (19) випливає твердження леми.

Має місце також наступне співвідношення.

Якщо $1 < p < \infty$ і $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, то (див., [5, с. 146])

$$\|f - S_n f\|_p \asymp E_n(f)_p.$$

Почнемо зі встановлення оцінок зверху в теоремі 1.

Розглянемо випадок $p^* < \theta < \infty$, $p^* = \min\{p;\ 2\}$. Скориставшись послідовно теоремою А, співвідношенням (4), нерівністю Мінковського та нерівністю $|a+b|^v \leq |a|^v + |b|^v$, $0 \leq v \leq 1$, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ отримаємо

$$\|f - S_n f\|_p \asymp \Bigg\| \Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg\|_p \ll \Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{p^*} \Bigg)^{\frac{1}{p^*}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{p^*} \Omega(2^{-s}) \Bigg)^{\frac{1}{p^*}} =: J_1.$$

Застосовуючи до J_1 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{p^*}$ та лему А, будемо мати

$$J_1 := \Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\|s\|_1 \geq n} (\Omega(2^{-s}))^{\frac{p^*\theta}{\theta - p^*}} \Bigg)^{\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})}.$$

Якщо $\theta = \infty$, то для $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$ з (5) випливає співвідношення

$$\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \ll \Omega(2^{-s}), \qquad (20)$$

використовуючи яке для оцінки виразу, що визначається символом J_1, з подальшим застосуванням леми А, отримуємо

$$\|f - S_n f\|_p \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{p^*}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\frac{1}{p^*}}.$$

Нехай тепер $1 \leq \theta \leq p^*$. Використовуючи (4) та нерівність $\left(\sum\limits_k |a_k|^{v_2} \right)^{\frac{1}{v_2}} \leq \left(\sum\limits_k |a_k|^{v_1} \right)^{\frac{1}{v_1}}$, $0 < v_1 \leq v_2 < \infty$ (див., [9, с. 43]), отримуємо

$$\|f - S_n f\|_p \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \sup_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}).$$

Оцінки знизу.

Для доведення оцінок знизу достатньо вказати функції $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ (можливо різні для різних співвідношень між параметрами p і θ), для яких

$$E_n(f) \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Для $k \in \mathbb{N}^d$ розглянемо функцію

$$D_k(x) := \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j),$$

де

$$D_{k_j}(x_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1}$$

і

$$D_{\frac{1}{2}}(x_j) := D_0(x_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Зрозуміло, що для перетворення Фур'є

$$\mathfrak{F}D_k(x) = \chi_k(x) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

а для оберненого перетворення

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(t) = D_k(x).$$

Має місце також наступне твердження.

Лема Б [8]. *Нехай* $1 < p < \infty$. *Тоді для функції*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j-1}}(x_j),$$

виконується співвідношення

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{k \geq 0} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

А) Нехай $1 < p \leq 2, \ \theta = \infty$.

Покладемо

$$f_{p,n}(x) := C_5 \sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) 2^{-\frac{\|s\|_1}{p'}} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x),$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $C_5 > 0$ — деяка стала.

Враховуючи, що [8, с. 460]

$$\Big\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x) \Big\|_p \ll 2^{\frac{1}{p'}\|s\|_1}, \tag{21}$$

будемо мати

$$\|f_{p,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f_p, \cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|s\|_1 \geq n} 2^{-\frac{\|s\|_1}{p'}} \Big\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x) \Big\|_p \ll \sup_{\|s\|_1 \geq n} 2^{-\frac{\|s\|_1}{p'}} 2^{\frac{1}{p'}\|s\|_1} = 1,$$

тобто $f_{p,n} \in B^{\Omega}_{p,\infty}$ при деякому значенні сталої C_5.

Врахувавши, що $S_n f_{p,n} = 0$ та застосувавши теорему А, отримаємо

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})^p_p \geq E_n(f_{p,n})^p_p \gg \|f_{p,n}\|^p_p \asymp \left\| \Big(\sum_{\|s\|_1 \geq n} |\delta^*_s(f_{p,n}, \cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|^p_p \geq$$

$$\geq \sum_{\|s\|_1 \geq n} \int\limits_{\Delta(s)} |\delta^*_s(f_{p,n}, x)|^p dx, \qquad (22)$$

де

$$\Delta(s) := \{x : 2^{-s_j - 1} \leq x_j < 2^{-s_j}, \ j = \overline{1, d}\}.$$

Зрозуміло, що $\Delta(s) \bigcap \Delta(s') = \emptyset$ при $s \neq s'$.

Продовжуючи оцінку останнього інтегралу з (22), будемо мати

$$\int\limits_{\Delta(s)} |\delta^*_s(f_{p,n},x)|^p dx \gg \Omega^p(2^{-s}) 2^{\frac{-p\|s\|_1}{p'}} \int\limits_{\Delta(s)} \left| \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin 2^{s_j - 2} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \gg$$

$$\gg \Omega^p(2^{-s}) 2^{\frac{-p\|s\|_1}{p'}} \int\limits_{\Delta(s)} 2^{p\|s\|_1} \prod_{j=1}^{d} dx_j \gg$$

$$\gg \Omega^p(2^{-s}) 2^{\frac{-p\|s\|_1}{p'}} 2^{(p-1)\|s\|_1} = \Omega^p(2^{-s}). \qquad (23)$$

Об'єднавши (22), (23) та застосувавши лему А, будемо мати

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \geq E_n(f_{p,n})_p \gg \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^p(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}}.$$

Б) Нехай $2 < p < \infty, \ \theta = \infty$.

Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) := C_6 \sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(x_j),$$

де $C_6 > 0$ — деяка стала. Тоді

$$\delta_s^*(\varphi_n, x) = C_6 \Omega(2^{-s}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j).$$

Далі переконаємося, що функція $\varphi_n \in B_{p,\infty}^{\Omega}$ при певному виборі сталої C_6.

Дійсно,

$$\|\varphi_n\|_{B_{p,\infty}^{\Omega}} \asymp \sup_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\delta_s^*(\varphi_n, \cdot)\|_p \ll 1.$$

Отже, використовуючи леми Б та А з $\Lambda(t) = \Omega(t)$, отримаємо

$$E_n(B_{p,\infty}^{\Omega})_p \geq E_n(\varphi_n)_p \gg \left\| \sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j-1}}(x_j) \right\|_p \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega^2(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

В) Нехай $1 < p \leq 2,\ p \leq \theta < \infty$.

Розглянемо функцію

$$f_{p,\theta,n}(x) := C_7 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{p'}} \sum_{\|s\|_1 = n} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x).$$

Враховуючи (21), отримуємо

$$\|\delta_s^*(f_{p,\theta,n}, \cdot)\|_p = C_7 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{p'}} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x) \right\|_p \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) \tag{24}$$

і

$$\|f_{p,\theta,n}\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \ll \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f_{p,\theta,n}, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\|s\|_1 = n} n^{-(d-1)} \omega^{\theta}(2^{-n}) \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_{p,\theta,n} \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_7 > 0$. Далі, аналогічно, як і для функції $f_{p,n}(x)$ (див. п. А), доводимо, що

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \gg \left(\sum_{\|s\|_1=n} \int\limits_{\Delta(s)} |\delta^*_s(f_{p,\theta,n}, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}.$$

Г) Нехай $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le p^*$.

Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) := C_8 \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j),$$

де $s:\ \|s\|_1 = n$.

При деякому значенні сталої $C_8 > 0$ $\varphi_n \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, бо

$$\|\varphi_n\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\left\| \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_p^{\theta} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1$$

і оскільки $S_n \varphi_n = 0$, то

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \ge E_n(\varphi_n)_p \asymp \|\varphi_n - S_n\varphi_n\|_p = \|\varphi_n\|_p \asymp \omega(2^{-n}).$$

Д) Нехай $2 < p < \infty,\ 2 \le \theta < \infty$.

Покладемо

$$\psi_{\theta,n}(x) := C_9 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j).$$

Покажемо, що $\psi_{\theta,n} \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ з деякою сталою $C_9 > 0$. Дійсно

$$\|\psi_{\theta,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = C_9 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Оскільки $S_n\psi_{\theta,n}=0$, то за лемою Б, отримуємо

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})\gg E_n(\psi_{\theta,n})_p\geq\|\psi_{\theta,n}\|_p\asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\omega(2^{-n})\left\|\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}D_{2^{s_j-1}}(x_j)\right\|_q\asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\omega(2^{-n})\left(\sum_{\|s\|_1=n}1\right)^{\frac{1}{2}}\asymp\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінки знизу доведено.

Теорема доведено.

Зауваження 2. Результат теореми 1 у випадку $\Omega(t)=t^r:=t_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot t_d^{r_1}$, $r=(r_1,\ldots,r_1)>0$, тобто, коли класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами $S^r_{p,\theta}B$ встановлено в [8].

1. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.
2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.
4. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic function. — New York: Nova Science, 1993. — 272 p.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.
6. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — P. 35 – 48.
7. *Аманов Т.И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{r}_{p,\theta}{}^{*}B$, $0\leq x_j\leq 2\pi$ // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1965. — **77**. — С. 5 – 34.
8. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions// Northeast. Math. J. — 1995. — **11(4)**. — С. 454 – 466.
9. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
10. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.