Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 352-366

УДК 517.5

І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИМИ ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ КЛАСІВ ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ НЕПЕРЕРВНИХ (ψ, β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ*

Одержано асимптотичні (при $\sigma \to \infty$) рівності для точних верхніх меж відхилень операторів Сердюка $U_\sigma(f;\cdot)$ — цілих функцій експоненціального типу не більшого ніж σ — на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega$ неперервних заданих на дійсній осі функцій в рівномірній метриці.

Нехай C — множина неперервних обмежених на дійсній осі функцій, $\mathfrak{N}$ — одинична куля у просторі істотно обмежених на дійсній осі функцій, $S_\infty = \{\varphi : \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| \le 1\}$, або ж клас $H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega(|t-t'|)\ \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай, далі, $\psi(\upsilon)$ — функція, неперервна при всіх $\upsilon \ge 0$, і β — фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(\upsilon)\cos\left(\upsilon t - \frac{\beta\pi}{2}\right)d\upsilon. \quad (1)$$

Тоді, згідно з О.І. Степанцем [1, 2], через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначаємо множину всіх неперервних функцій f, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ можна представити у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\hat{\psi}_\beta(t)dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \quad (2)$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi\in\mathfrak{N}$, а інтеграл розуміють як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Функцію $\varphi(\cdot)$ у рівності (2) називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

$f_\beta^\psi(\cdot)$.

Як наближаючі агрегати для функцій $f \in \widehat{C}_\beta^\psi\mathfrak{N}$ будемо використовувати функції $U_\sigma(f;\cdot), \sigma \geq 0$, що мають вигляд

$$U_\sigma(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty u_\sigma(t,v)\,dv\,dt, \tag{3}$$

де функція $u_\sigma(t,v) = u_\sigma(\psi,\beta;t,v)$ визначається такою рівністю:

$$u_\sigma(t,v) = \begin{cases} u_\sigma^*(t,v), & 0 \leq v \leq \sigma-1, \\ u_\sigma^*(t,v)+\psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2}), & \sigma-1 < v < \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v, \end{cases}$$

а $u_\sigma^*(t,v)=(\psi(v)-\psi(2\sigma-v))\cos(vt-\frac{\beta\pi}{2})-\psi(2\sigma+v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})$ при $v \in [0,\sigma]$.

Відмітимо, що у випадку, коли $f(x)$ є 2π-періодичними функціями з множин L_β^ψ (див. означення в [3, 4]) і $\sigma = n \in \mathbb{N}$, то функції $U_n(f,\cdot)$ є тригонометричними поліномами порядку $\leq n-1$, апроксимативні властивості яких на відомих класах 2π-періодичних функцій $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $L_{\beta,1}^\psi$ досліджено А.С. Сердюком [5]. Тому функції $U_\sigma(f;\cdot)$ будемо називати операторами Сердюка. У загальному випадку (див. [6] (твердження 1)) функції $U_\sigma(f;\cdot) \in \mathcal{E}_\sigma$, тобто є цілими функціями експоненціального типу, що не перевищує σ.

З результатів роботи [7] і наслідку 2 роботи [6] випливає, що якщо функція $\psi(v)$ визначається рівністю

$$\psi(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0,1), \\ e^{-\alpha v}, & v \geq 1, \end{cases} \tag{4}$$

де α — довільне число, $\alpha > 0$, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi'(v)$ обмеженої варіації на $[0,1]$ і така, що $\psi_1(0)\sin(\beta\pi/2) = 0$ і $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$, а $\beta \in \mathbb{R}$, то при $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_\beta^\psi S_\infty; U_\sigma) \sim E_\sigma(\widehat{C}_\beta^\psi S_\infty) \sim \frac{4}{\pi}e^{-\alpha\sigma},$$

де

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_\beta^\psi\mathfrak{N}; U_\sigma) = \sup_{f\in\widehat{C}_\beta^\psi\mathfrak{N}} |f(x) - U_\sigma(f;x)|, \tag{5}$$

$$E_\sigma(\widehat{C}^\psi_\beta\mathfrak{N}) = \sup_{f\in\widehat{C}^\alpha_\beta\mathfrak{N}} \inf_{g\in\mathcal{E}_\sigma} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|,$$

а запис $f(\sigma)\sim\varphi(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$ означає, що $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{f(\sigma)}{\varphi(\sigma)}=1$.

Мета даної роботи полягає в знаходженні асимптотичних при $\sigma\to\infty$ рівностей для величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma)$ у випадку, коли функція $\psi(v)$, що задає клас $\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$, має вигляд (4). Це дозволить уточнити зроблені в [2, гл. IX] оцінки зверху величин $E_\sigma(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega)$.

Основний результат роботи міститься в такому твердженні.

Теорема. *Нехай функція $\psi(v)$ визначається рівністю* (4), *де $\alpha>0$, і $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді величини*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma) = \sup_{f\in\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega} |f(x)-U_\sigma(f;x)|$$

не залежать від значення x і при $\sigma\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma)=\frac{2\theta_\omega e^{-\alpha\sigma}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t dt+\frac{O(1)e^{-\alpha\sigma}\omega(1/\sigma)}{\alpha^2\sigma}, \qquad (6)$$

де $\theta_\omega\in\left[\frac{2}{3},1\right]$, причому $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по параметрах α,β і σ.

Доведення. Покажемо спочатку, що величини $\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma)$ не залежать від значення x. Класи $\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$ інваріантні відносно зсуву аргумента: якщо $f\in\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$, то для довільного дійсного τ функція $f_1(x)=f(x+\tau)$ також належить до $\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$. Отже, якщо функція f належить до $\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$, то знайдеться функція f_1 з $\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$ така, що $f(x)-U_\sigma(f;x)=f_1(0)-U_\sigma(f_1;0)$. Тому

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma) = \sup_{f\in\widehat{C}^\psi_\beta\mathfrak{N}} |f(0)-U_\sigma(f;0)|.$$

Звідси випливає, що величини $\mathcal{E}(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma)$ дійсно не залежать від значення x.

Для функції $\psi(v)$, означеної рівністю (4), перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду (1) — сумовне на $\mathbb{R}$. Тому, враховуючи, що

$$\int\limits_0^\sigma \left(\psi(2\sigma - v)\cos(vt - \frac{\beta\pi}{2}) + \psi(2\sigma + v)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\right) dv =$$

$$= 2\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})\int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos vt\, dv - \int\limits_\sigma^\infty \psi(v)\cos(vt - \frac{\beta\pi}{2})\, dv -$$

$$- \int\limits_\sigma^\infty \psi(v + 2\sigma)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\, dv,$$

з рівностей (2)–(3), при $f \in \widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$ в кожній точці x отримуємо

$$f(x) - U_\sigma(f;x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta(x-t)\cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos vt dv dt -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta(x-t)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^\sigma \psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^\infty \psi(v + 2\sigma)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\, dv\Big)\, dt. \qquad (7)$$

Розглядаючи точну верхню межу по функціям $f \in \widehat{C}^\psi_\beta H_\omega$ в рівності (7), одержуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega; U_\sigma) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{f\in\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega}\left\|\int\limits_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta(x-t)\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})\int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos vt dv dt\right\|_C +$$

$$+ O(1)\sup_{f\in\widehat{C}^\psi_\beta H_\omega}\Big\|\int\limits_{-\infty}^\infty f^\psi_\beta(x-t)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma-1}^\sigma \psi(3\sigma)(v-\sigma+1)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v+2\sigma)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv\Big)\,dt\Big\|_{C}. \qquad (8)$$

Позначимо перший доданок в правій частині останньої рівності через $\mathfrak{D}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega)$. Помічаючи, далі, що другий доданок є точною верхньою межею відхилень операторів Фур'є $F_\sigma(g;\cdot)$ від функцій g з класу $\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta}H_\omega$ в рівномірній метриці, тобто дорівнює величині $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta}H_\omega;F_\sigma)$, де

$$\psi_\sigma(t)=\begin{cases}\psi\big((2\sigma+1)t\big), & 0\le t\le 1,\\ \psi(t+2\sigma), & t\ge 1,\end{cases} \qquad (9)$$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N};F_\sigma)=\sup_{f\in\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}}|f(x)-F_\sigma(f;x)|,$$

$F_\sigma(f;x)$ — введені в [1] оператори Фур'є порядку σ :

$$F_\sigma(f;x)=A_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x-t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v)\lambda_\sigma(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})dvdt,$$

$$\lambda_\sigma(v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le\sigma-1,\\ 1-(v-\sigma+1)\psi(\sigma)/\psi(v), & \sigma-1<v<\sigma,\\ 0, & \sigma\le v,\end{cases}$$

зі співвідношення (8), маємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega;U_\sigma)=\mathfrak{D}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega)+O(1)\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta}H_\omega;F_\sigma). \qquad (10)$$

Як випливає з теореми 9.12.2 монографії [2], якщо функція $\psi_\sigma(v)$, що задає клас $\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta}H_\omega$, визначається рівністю (9), то при $\sigma\to\infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi_\sigma}_{-\beta}H_\omega;F_\sigma)=O(1)e^{-3\alpha\sigma}\omega(1/\sigma). \qquad (11)$$

Таким чином, зі співвідношень (10) і (11), одержуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega;U_\sigma)=\mathfrak{D}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega)+O(1)e^{-3\alpha\sigma}\omega(1/\sigma). \qquad (12)$$

Знайдемо величину $\mathfrak{D}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega)$. Враховуючи, з одного боку, той факт, що клас $\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega$ інваріантний відносно зсуву аргументу і містить як функцію $f(t)$, так і $f(-t)$, а з іншого, — рівність

$$\int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos vt dv = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha(v+\sigma)}\cos vt dv = \frac{\alpha e^{-\alpha\sigma}}{t^2+\alpha^2}, \quad \sigma \geq 1, \tag{13}$$

та означення величини $\mathfrak{D}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega)$ (див. (8)), отримуємо

$$\mathfrak{D}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega) = \frac{2\alpha e^{-\alpha\sigma}}{\pi} \sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{t^2+\alpha^2} dt \right|. \tag{14}$$

Права частина в (14) є 4-періодичною функцією відносно параметра β. Тому далі достатньо вважати, що $\beta \in [0,4)$.

Спростимо вираз, що знаходиться під знаком модуля в правій частині (14). Для цього, наслідуючи О.І. Степанця [2] (співвідношення (9.12.45), введемо при $\sigma \geq 1$ такі позначення:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \frac{(1+\beta)\pi}{2\sigma} + \frac{k\pi}{\sigma}, \\ t_k &= x_k - \frac{\pi}{2\sigma} = \frac{\beta\pi}{2\sigma} + \frac{k\pi}{\sigma}, \end{aligned}\right. \qquad k \in \mathbb{Z},$$

і

$$l_\sigma(t) = x_k \quad \text{при} \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{15}$$

Тоді в прийнятих позначеннях має місце така лема.

Лема 1. *Нехай* $\varphi \in H_\omega$, *тоді*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{t^2+\alpha^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} dt + \frac{O(1)\omega(1/\sigma)}{\alpha^3\sigma}. \tag{16}$$

Доведення. Для доведення співвідношення (16) розглянемо різницю

$$R_\sigma(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{t^2+\alpha^2} dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) r_\sigma(t) dt. \tag{17}$$

Функція $r_\sigma(t)$ — сумовна на $\mathbb{R}$ і на інтервалах (t_k, t_{k+1}), $k \in \mathbb{Z}$, зберігає знак, почергово змінюючи його зі зміною номера k. Розіб'ємо інтеграл, що стоїть в правій частині (17), на дві частини

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) r_\sigma(t) dt = \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty} \Bigg) \varphi(t) r_\sigma(t) dt \overset{\mathrm{df}}{=} I_\sigma^-(\varphi) + I_\sigma^+(\varphi), \qquad (18)$$

і знайдемо необхідну оцінку для кожної з частин $I_\sigma^-(\varphi)$ і $I_\sigma^+(\varphi)$. Для цього будуть потрібні наступні відомі твердження.

Лема А ([3], лема 5.18.2). *Нехай на відрізку* $[a, a+2h]$, $h > 0$, *задано двічі неперервно диференційовну функцію* $g(t)$ *і*

$$F(t) = |g(t) - g(a+h/2)| - |g(t+h) - g(a+3h/2)|, \ t \in [a, a+h]. \qquad (19)$$

Тоді, якщо $g(t)$ *не зростає на* $[a, a+2h]$ *і* $g''(t) \geq 0$ *при всіх* $t \in [a, a+2h]$, *то*

$$F(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \qquad (20)$$

Якщо ж при цьому $g''(t) \leq 0$ *при всіх* $t \in [a, a+2h]$, *то*

$$F(t) \leq 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \qquad (21)$$

У випадку, коли $g(t)$ *не спадає, з умови* $g''(t) \geq 0$, *випливає співвідношення* (21), *а з умови* $g''(t) \leq 0$ *— співвідношення* (20).

Лема Б ([3], лема 5.1.3). *Нехай* $\varphi(t)$ *— сумовна на* $\mathcal{J}$ *функція* ($\varphi \in L(\mathcal{J})$). *Тоді, якщо* $\mathcal{J} = \{x : a \leq x \leq b\}$ *і* x_k, $k = \overline{1,n}$, $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$, *— деякий набір точок, для яких*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad (22)$$

то $\forall f \in H_\omega(\mathcal{J})$

$$\Bigg| \int\limits_a^b f(t)\varphi(t) dt \Bigg| \leq \max_{a \leq t \leq x_1} |f(t)| \int\limits_a^{x_1} |\varphi(t)| dt + \omega(\Delta) \int\limits_{x_1}^{x_n} |\varphi(t)| dt +$$

$$+ \max_{x_n \le t \le b} |f(t)| \int\limits_{x_n}^{b} |\varphi(t)| dt. \tag{23}$$

Якщо $\mathcal{J} = \{x : x \ge a\}$, *а* x_k, $k = 1, 2, \dots,$ — *знову деякий набір таких точок, що виконується співвідношення* (22) $\forall k \in \mathbb{N}$, *то* $\forall f \in H_\omega(\mathcal{J})$

$$\left| \int\limits_{a}^{\infty} f(t+x)\varphi(t)dt \right| \le \max_{a \le t \le x_1} |f(t)| \int\limits_{a}^{x_1} |\varphi(t)|dt + \omega(\Delta) \int\limits_{x_1}^{\infty} |\varphi(t)|dt. \tag{24}$$

Тут і у співвідношенні (23) $\Delta = \sup\limits_{k} (x_{k+1} - x_k)$.

Твердження А ([3], твердження 5.1.1). *Нехай функція* $\varphi(\cdot)$, *сумовна на* $[a, b]$, *перетворюється в нуль в деяких точках* $t_k \in [a, b]$, $k = \overline{1, n}$, $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$, *а на проміжках* (t_k, t_{k+1}) *майже скрізь зберігає знак, причому* $\operatorname{sign} \alpha_k = -\operatorname{sign} \alpha_{k+1}$, *де*

$$\alpha_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t)dt. \tag{25}$$

Тоді, якщо числа $|\alpha_k|$ *не зростають, то функція*

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{t_n}^{x} \varphi(t)dt \tag{26}$$

перетворюється в нуль, змінюючи знак на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ *в деякій точці* x_k. *Якщо ж числа* $|\alpha_k|$ *не спадають, то таке ж твердження є вірним для функції*

$$\Phi_2(x) = \int\limits_{t_1}^{x} \varphi(t)dt. \tag{27}$$

Твердження Б ([3], твердження 5.1.1′) *Якщо функція* $\varphi(\cdot)$, *сумовна на множині* $t \ge a$, *перетворюється в нуль в деяких точках* t_k, $a \le t_1 < t_2 < \ldots$, *причому* $\operatorname{sign} \alpha_k = = -\operatorname{sign} \alpha_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, *і числа* $|\alpha_k|$ *утворюють незростаючу послідовність, то на кожному проміжку* $[t_k, t_{k+1}], k \in \mathbb{N}$, *функція*

$$\Phi(x) = \int\limits_x^\infty \varphi(t)dt \tag{28}$$

перетворюється в нуль в деякій точці x_k.

Знайдемо спочатку оцінку інтеграла $I_\sigma^+(\varphi)$ зі співвідношення (18). На проміжку $[0, +\infty)$ функція $g(t) = = \frac{1}{t^2+\alpha^2}$ має єдину точку перегину $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, тобто на $(0, \frac{\alpha}{\sqrt{3}})$ функція $g(t)$ спадає і опукла вгору, а на $(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \infty)$ — спадає і опукла вниз. Нехай, далі, числа k_1 і k_2 такі, що точка t_{k_1} є найближчою зліва до точки $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ серед точок t_k, а точка t_{k_2} — найближча справа, і

$$\alpha_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} r_\sigma(t)dt = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{t^2+\alpha^2} - \frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}\right)\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})dt. \tag{29}$$

В такому випадку

$$\operatorname{sign}\alpha_k = (-1)^k \tag{30}$$

і числа $|\alpha_k|$ не спадають при $k = 2, 3, \ldots, k_1 - 1$. Дійсно, нехай для визначеності k — парне число. Тоді згідно з (15) і (29)

$$|\alpha_k| - |\alpha_{k+1}| = \left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{t^2+\alpha^2} - \frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}\right)\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})dt\right| -$$

$$-\left|\int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \left(\frac{1}{t^2+\alpha^2} - \frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}\right)\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})dt\right| =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |g(t) - g(x_k)|\big|\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})\big|dt - \int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} |g(t) - g(x_{k+1})|\big|\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})\big|dt =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(|g(t) - g(x_k)| - |g(t + \frac{\pi}{\sigma}) - g(x_k + \frac{\pi}{\sigma})|\right)|\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})|dt. \tag{31}$$

На інтервалі $[0, t_{k_1}]$ функція $g(t)$ спадає і $g''(t) \leq 0$. Тому, застосовуючи лему А при $a = t_k$ і $h = \frac{\pi}{2\sigma}$, переконуємося, що дійсно

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|, \quad k = 2, 3, \dots, k_1 - 1. \tag{32}$$

Якщо ж $k \geq k_2$, то аналогічно встановлюємо, що

$$\operatorname{sign} \alpha_k = (-1)^k \tag{33}$$

і

$$|\alpha_k| \geq |\alpha_{k+1}|, \quad k = k_2, k_2 + 1, k_2 + 2, \dots. \tag{34}$$

Покладемо

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{t_2}^{x} r_\sigma(t) dt \quad \text{і} \quad \Phi_2(x) = \int\limits_{x}^{\infty} r_\sigma(t) dt. \tag{35}$$

З тверджень А і Б та співвідношень (30)–(34) випливає, що функція $\Phi_1(x)$ на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ має єдиний простий нуль $\bar{x}_k,\ k = 2, 3, \dots, k_1,$ а функція $\Phi_2(x)$ має прості нулі $\bar{x}_k$ на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ при $k = k_2, k_2 + 1, \dots$.

Беручи до відома цю інформацію, покладемо

$$I_\sigma^+(\varphi) = \int\limits_0^{t_2} \varphi(t) r_\sigma(t) dt + \int\limits_{t_2}^{\bar{x}_{k_1-1}} \varphi(t) r_\sigma(t) dt + \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} \varphi(t) r_\sigma(t) dt +$$

$$+ \int\limits_{\bar{x}_{k_2}}^{\infty} \varphi(t) r_\sigma(t) dt \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{4} i_j(\varphi), \tag{36}$$

при цьому

$$0 \leq t_2 < t_{k_1-1} < \bar{x}_{k_1-1} < t_{k_1} < \frac{\alpha}{\sqrt{3}} < t_{k_2} < \bar{x}_{k_2} < t_{k_2+1} < \dots. \tag{37}$$

Враховуючи, що $|l_\sigma(t) - t| \leq \frac{\pi}{2n}$ і

$$\max_{0 \leq t} \frac{l_\sigma(t)}{l_\sigma^2(t) + \alpha^2} \leq \max_{0 \leq t} \frac{t}{t^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}, \tag{38}$$

для довільної функції $\varphi \in H_\omega$ отримуємо

$$|i_1(\varphi)| = \left| \int\limits_0^{t_2} \varphi(t)\cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}) \frac{(l_\sigma(t)-t)(l_\sigma(t)+t)}{(t^2+\alpha^2)(l_\sigma^2(t)+\alpha^2)} dt \right| \le$$

$$\le \frac{O(1)}{\sigma} \int\limits_0^{t_2} \left(\frac{t}{t^2+\alpha^2} \cdot \frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} + \frac{l_\sigma(t)}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} \cdot \frac{1}{t^2+\alpha^2} \right) dt = \frac{O(1)}{\alpha^3\sigma^2}. \qquad (39)$$

Застосовуючи лему Б на проміжках $[t_2, \bar{x}_{k_1-1}]$ і $[\bar{x}_{k_2}, \infty)$, знаходимо

$$|i_2(\varphi)| + |i_4(\varphi)| \le \omega(\frac{4\pi}{\sigma}) \int\limits_{t_2}^{\infty} |r_\sigma(t)| dt, \qquad (40)$$

причому, враховуючи (38),

$$\int\limits_{t_2}^{\infty} |r_\sigma(t)| dt \le \frac{\pi}{2\sigma} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{t^2+\alpha^2} \frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} + \frac{l_\sigma(t)}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} \frac{1}{t^2+\alpha^2} \right) dt =$$

$$= \frac{O(1)}{\alpha\sigma} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{O(1)}{\alpha^2\sigma}. \qquad (41)$$

Беручи до відома співвідношення (40) і (41), одержуємо

$$|i_2(\varphi)| + |i_4(\varphi)| \le \frac{O(1)\omega(1/\sigma)}{\alpha^2\sigma}. \qquad (42)$$

Внаслідок (38), маємо

$$|i_3(\varphi)| = \left| \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} \varphi(t) r_\sigma(t) dt \right| \le$$

$$\le \frac{O(1)}{\sigma^2} \max_{\bar{x}_{k_1-1} \le t \le \bar{x}_{k_2}} \frac{t + l_\sigma(t)}{(t^2+\alpha^2)(l_\sigma^2(t)+\alpha^2)} = \frac{O(1)}{\alpha^3\sigma^2}. \qquad (43)$$

Об'єднуючи співвідношення (36), (39), (42) і (43), маємо

$$|I_\sigma^+(\varphi)| = \frac{O(1)\omega(1/\sigma)}{\alpha^3\sigma}. \tag{44}$$

Зрозуміло, що така сама оцінка буде виконуватись і для величини $|I_\sigma^-(\varphi)|$, і тому згідно з (18) має місце співвідношення (16). Лему 1 доведено.

Продовжуючи доведення теореми, враховуючи (14) і (16), можемо записати

$$\mathfrak{D}(\widehat{C}_\beta^\psi H_\omega) = \frac{2\alpha e^{-\alpha\sigma}}{\pi} \sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}dt\right| + \frac{O(1)\omega(1/\sigma)}{\alpha^2\sigma}. \tag{45}$$

Далі для доведення необхідне таке допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай* $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$, *тоді при* $\sigma \to \infty$

$$I_\sigma(\alpha,\omega) \overset{\text{df}}{=} \sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}dt\right| =$$

$$= \frac{\theta_\omega}{\alpha}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{\sigma})\sin t dt + \frac{O(1)\omega(1/\sigma)}{\alpha^2\sigma}, \tag{46}$$

де $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3};1\right]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по параметрах* α, β *і* σ.

Доведення. Враховуючи (15), для довільної функції $\varphi \in H_\omega$ маємо

$$I_\sigma(\varphi) \overset{\text{df}}{=} \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}dt\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\frac{\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2}dt\right| \le$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_k(\varphi,\sigma)}{x_k^2+\alpha^2}, \tag{47}$$

де

$$e_k(\varphi,\sigma)=\Big|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\cos\big(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2}\big)dt\Big|. \qquad (48)$$

Згідно з (15), одержуємо

$$e_k(\varphi,\sigma)=\Big|\int\limits_{t_k}^{x_k}(\varphi(t)-\varphi(2x_k-t))\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})dt\Big|\le$$

$$\le\int\limits_{t_k}^{x_k}\omega(2(x_k-t))\big|\cos(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})\big|dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/2\sigma}\omega(2t)\sin\sigma t dt=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{\sigma})\sin t dt\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma}. \qquad (49)$$

Отже, об'єднуючи (47)–(49), отримуємо, що

$$I_\sigma(\varphi)\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)}. \qquad (50)$$

Побудуємо функцію $\varphi^*\in H_\omega$, для якої значення $I(\varphi^*)$ буде співпадати з правою частиною (50). Покладемо

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}\ \ \frac{1}{2}\omega\big(2(x_k-t)\big), & t\in[t_k,x_k],\\ -\frac{1}{2}\omega\big(2(t-x_k)\big), & t\in[x_k,t_{k+1}],\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad (51)$$

і

$$\varphi^*(t)=(-1)^{|k|}\varphi_k(t),\quad t\in[t_k,t_{k+1}],\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Нехай спочатку $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Тоді неперервна (за побудовою) функція $\varphi^*(t)$ буде задовольняти нерівність

$$|\varphi^*(t)-\varphi^*(t')|\le\omega(|t-t'|)\quad\forall t,t'\in\mathbb{R} \qquad (52)$$

в силу опуклості функції $\omega(t)$. Це і є шукана екстремальна функція, оскільки $\varphi^*\in H_\omega$ і, як показують безпосередні підрахунки, значення $I_\sigma(\varphi^*)$ буде співпадати з правою частиною (50), тобто

$$I_\sigma(\alpha,\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)}. \qquad (53)$$

Якщо ж $\omega(t)$ не обов'язково опуклий модуль неперервності, то і в цьому випадку для побудованої функції φ^* значення $I(\varphi^*)$ буде співпадати з правою частиною (50), але функція φ^* може не задовольняти умову (52). Покажемо, що для довільного модуля неперервності ω функція $\varphi_*=\frac{2}{3}\varphi^*$ належить до класу H_ω. Дійсно, якщо точки t,t' знаходяться по один бік від точки x_k, то завжди виконується нерівність (52). Якщо, наприклад, $t\in[t_k,x_k]$, а $t'\in[x_k,t_{k+1}]$, то в силу монотонності функції φ_*

$$|\varphi_*(t')-\varphi_*(t)|=\frac{1}{3}(\omega(2t'-2x_k)+\omega(2x_k-2t))=$$

$$=\frac{1}{3}(\omega(2t'-2x_k)+\omega(2(t'-t)+2(x_k-t')))=\Delta(\omega).$$

Бачимо, що у випадку $t'-x_k\le t'-t\le 2(t'-x_k)$

$$\Delta(\omega)\le\frac{1}{3}\omega(2(t'-t))+\frac{1}{3}\omega(t'-t)\le\omega(t'-t),$$

а у випадку, коли $t'-t\ge 2(t'-x_k)$,

$$\Delta(\omega)\le\frac{1}{3}\omega(t'-t)+\frac{1}{3}\omega(2(t'-t))\le\omega(t'-t),$$

тобто $\varphi_*\in H_\omega$.

Для функції $\varphi_*\in H_\omega$

$$I_\sigma(\varphi_*)=\frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)}.$$

Поєднуючи останню рівність з нерівністю (50), отримуємо

$$\frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)}\le I_\sigma(\alpha,\omega)\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e_\sigma(\omega)}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)}. \qquad (54)$$

Для завершення доведення леми 2, покажемо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{O(1)}{\alpha^2\sigma}. \qquad (55)$$

Дійсно, враховуючи (15), маємо

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(x_k^2+\alpha^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} + O(1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\frac{1}{l_\sigma^2(t)+\alpha^2} - \frac{1}{t^2+\alpha^2}\Big) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} + O(1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sigma} \bigvee_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{t^2+\alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{O(1)}{\sigma} \bigvee_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{O(1)}{\alpha^2\sigma}.$$

Об'єднуючи співвідношення (53)–(55), одержуємо (46). Лему 2 доведено.

Поєднуючи тепер співвідношення (45) і (46), отримуємо (6). Теорему повністю доведено.

1. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303, №1. — С. 50–53.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
4. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
5. *Сердюк А.С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 296–338.
6. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Сердюка неперервних (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — Т. 4, № 1. — С. 318–334.
7. *Бушанский А.В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. — Киев: Ин–т математики, 1978. – С. 29-37.