Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 334-351

УДК 517.5

А. С. Сердюк, Є. Ю. Овсій (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ НА КЛАСАХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА*

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена в рівномірній метриці на класах 2π-періодичних функцій $C^{\psi}_{\bar\beta,s}$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, і $C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega$, що задаються мультиплікаторами $\psi(k)$ і зсувами по аргументу β_k за умови, що послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше ніж будь-яка геометрична прогресія (в цьому випадку функції із зазначених класів допускають регулярне продовження на всю комплексну площину). Аналогічні результати одержано в метриках просторів L_s, $1\leqslant s\leqslant\infty$, для класів $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ та в метриці L_1 для класів $L^{\psi}_{\bar\beta}H_{\omega_1}$.

Нехай L_s, $1\leqslant s<\infty$, — простір сумовних на $(0,2\pi)$ в s-му степені 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_s}=\|f\|_s=\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^s\,dt\Big)^{1/s}$, $L_\infty=M$ — простір вимірних і істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_\infty}=\|f\|_M=\operatorname*{ess\,sup}_t|f(t)|$, C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C=\max\limits_t|f(t)|$.

В роботах О.І. Степанця [1, 2] введено класи $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій наступним чином. Нехай $f(\cdot)$ — 2π-періодична сумовна на періоді функція ($f\in L_1$) і

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x) \qquad (1)$$

— її ряд Фур'є. Якщо послідовності $\psi=\psi(k)$ і $\bar\beta=\beta_k$, $k\in\mathbb{N}$, дійсних чисел такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\Big(a_k\cos\big(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\big)+b_k\sin\big(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\big)\Big), \qquad (2)$$

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L_1$, то її називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають через $f_{\bar{\beta}}^{\psi}$, при цьому кажуть, що функція $f(\cdot)$ належить множині $L_{\bar{\beta}}^{\psi}$. Якщо $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}$ і $f_{\bar{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, то вважають, що $f \in L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$. Покладемо далі $C_{\bar{\beta}}^{\psi} = C \cap L_{\bar{\beta}}^{\psi}$, $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} = C \cap L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$, $L_{\bar{\beta},s}^{\psi} = L_{\bar{\beta}}^{\psi}U_s^0$, $C_{\bar{\beta},s}^{\psi} = C_{\bar{\beta}}^{\psi}U_s^0$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Якщо $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, то будемо писати, що $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} = L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ і $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N} = C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ і $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ позначатимемо через $L_{\bar{\beta}}^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ і $C_{\bar{\beta}}^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ відповідно. При $r = 1$ і $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, класи $C_{\bar{\beta}}^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ є класами інтегралів Пуассона

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)P_{\alpha,\beta}(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{N} \subset L_1^0, \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

де

$$P_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},$$

— ядра Пуассона з параметрами α і β, а L_1^0 — множина функцій $\varphi \in L_1$ з середнім значенням на періоді рівним нулю: $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0$.

В роботі в ролі $\mathfrak{N}$ будуть виступати множини вигляду:

$$U_s^0 = \bigl\{\varphi \in L_s :\ \|\varphi\|_s \leqslant 1,\ \varphi \perp 1\bigr\}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \infty,$$

$$H_\omega = \bigl\{\varphi \in C :\ \omega(\varphi; t) \leqslant \omega(t)\bigr\}$$

і

$$H_{\omega_1} = \bigl\{\varphi \in L_1 :\ \omega_1(\varphi; t) \leqslant \omega(t)\bigr\},$$

де $\omega(\varphi; t)$ і $\omega_1(\varphi; t)$ — модулі неперервності функції φ в просторах C і L_1 відповідно, а $\omega(t)$ — фіксована мажоранта типу модуля неперервності.

Через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \qquad q \in [0, 1). \tag{3}$$

Якщо послідовності $\psi(k)$, що визначають класи $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$, задовольняють умову (3) ($\psi \in \mathcal{D}_q$) при деякому $q \in (0,1)$, то, як добре відомо (див., наприклад, [2, с. 139 — 145]), множини $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ складаються з 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, які допускають регулярне продовження у смугу $|\mathrm{Im} z| \leqslant \ln 1/q$ комплексної площини. У випадку, коли $\psi \in \mathcal{D}_0$, класи $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ складаються з функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто з цілих функцій. Прикладом класів $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ ($L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$), для яких $\psi \in \mathcal{D}_0$, є, зокрема, класи $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ ($L^{\alpha,r}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$) при довільних $\alpha > 0$ і $r > 1$.

В даній роботі на класах $C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ і $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ вивчаються апроксимативні властивості сум Валле Пуссена [3], тобто поліномів вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x), \tag{4}$$

де $S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k, а $p = p(n)$ — певний натуральний параметр, $p \leqslant n$. Для сум $V_{n,p}(f;x)$ має місце представлення (див., наприклад, [4, с. 1100])

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,p}(k/n)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

де

$$\lambda_{n,p}(k/n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

При $p = 1$ суми Валле Пуссена $V_{n,1}(f;x)$ співпадають з частинними сумами Фур'є $S_{n-1}(f;x)$, а при $p = n$ — з відомими сумами Фейєра $\sigma_{n-1}(f;x)$ [5].

Метою даної роботи є знаходження при $n-p \to \infty$ асимптотичних рівностей для величини

$$\mathcal{E}\Big(\mathfrak{N}; V_{n,p}\Big)_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \big\| f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot) \big\|_X, \tag{6}$$

у випадках:

a) $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\bar{\beta},s},\ 1 \leqslant s \leqslant \infty,\ X = C$;

b) $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega},\ X = C$;

c) $\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\bar{\beta},1},\ X = L_s,\ 1 \leqslant s \leqslant \infty$;

d) $\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1},\ X = L_1$

при довільних $\psi \in \mathcal{D}_0$ і $\bar{\beta} = \beta_k \in \mathbb{R}$.

Асимптотичні рівності для величин вигляду (6) за умови, що $p=1$, тобто коли $V_{n,p}(f;x) = S_{n-1}(f;x)$, у ряді важливих випадків було одержано в роботах [1, 2, 6 — 14]. Зокрема, у роботах [9] і [10] знайдено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\bar{\beta},\infty}; S_{n-1}\big)_C$ та $\mathcal{E}\big(L^{\psi}_{\bar{\beta},1}; S_{n-1}\big)_{L_s}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, коли $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$.

Дана робота тісно пов'язана з роботами [15 — 18], де для певних важливих випадків було встановлено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}\big)_C$, $\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; V_{n,p}\big)_C$, $\mathcal{E}\big(L^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}\big)_C$ і $\mathcal{E}\big(L^{\psi}_{\beta,1}; V_{n,p}\big)_{L_1}$ при $\psi \in \mathcal{D}_q,\ q \in (0,1),\ \beta \in \mathbb{R}$. Що стосується випадку $\psi \in \mathcal{D}_q,\ q = 0$, то він з тих чи інших причин до цього часу залишався недослідженим.

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0,\ \beta_k \in \mathbb{R},\ k,p,n \in \mathbb{N},\ p \leqslant n$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar{\beta},\infty}; V_{n,p}\Big)_C = \frac{1}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi}\psi(n-p+1)+$$

$$+O(1)\bigg(\frac{\psi^2(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} + \gamma_3(\psi;n;p)\bigg)\Bigg), \qquad (7)$$

де $\gamma_3(\psi;n;p)$ *означається за допомогою формули*

$$\gamma_m(\psi;n;p) \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{p\sum_{k=m}^{\infty}\psi(n-p+k), \sum_{k=m}^{\infty}k\psi(n-p+k)\}, \quad m \in \mathbb{N}, \ (8)$$

а $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* $n,\ p,\ \psi(k)$ *і* β_k.

Доведення. Нехай $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},\infty}$, де $\psi \in \mathcal{D}_0$. Згідно з пунктом 3.1 роботи [1, с. 51] для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N} \subset L_1$ і $\psi \in \mathcal{D}_0$, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x) - V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{1,n,p}(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{N} \subset L_1^0, \tag{9}$$

в якій

$$\Psi_{j,n,p}(t) = \Psi_{j,n,p}(\psi;\bar{\beta};t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),\ j \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

а

$$\tau_{n,p}(k) = \tau_{n,p}(\psi;k) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{k-n+p}{p}\psi(k), & n-p+1 \leqslant k \leqslant n, \\ \psi(k), & k \geqslant n. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді

$$f(x) - V_{n,p}(f;x) =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Bigg[\cos\left((n-p+1)t - \frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\right) +$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\cos\left((n-p+2)t - \frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2}\right)\Bigg]\,dt + R_{3,n,p}(f;x), \tag{12}$$

де

$$R_{j,n,p}(f;x) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{j,n,p}(t)\,dt, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Оскільки

$$k-n+p < p \quad \text{при} \quad k = n-p+j, ..., n-1, \quad p > j, \quad j \in \mathbb{N}$$

і

$$k-n+p \geqslant p \quad \text{при} \quad k \geqslant n,$$

то згідно з (11), при $p > j$ отримуємо нерівності

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k) = \sum_{k=n-p+j}^{n-1} \frac{k-n+p}{p}\psi(k) + \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) < \sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k) \tag{14}$$

та

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k) < \frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k). \tag{15}$$

Якщо ж $p \leqslant j$, то згідно з (11)

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k) = \sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k). \tag{16}$$

Неважко переконатися, що при $p \leqslant j$

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k) < \frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k), \tag{17}$$

тому з урахуванням формул (14) — (16) і (8), одержуємо

$$\sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k) \leqslant \min\left\{\sum_{k=n-p+j}^{\infty}\psi(k), \frac{1}{p}\sum_{k=n-p+j}^{\infty}(k-n+p)\psi(k)\right\} =$$

$$= \frac{\gamma_j(\psi;n;p)}{p}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Застосовуючи нерівність (18) при $j = 3$, одержуємо рівномірну по всіх $x \in \mathbb{R}$ оцінку

$$R_{3,n,p}(f;x) = O(1)\sum_{k=n-p+3}^{\infty}\tau_{n,p}(k) = O(1)\frac{\gamma_3(\psi;n;p)}{p}. \tag{19}$$

Враховуючи інваріантність класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},\infty}$ відносно зсуву аргумента, виконуючи заміну змінних в першому інтегралі правої частини рівності (12) і беручи до уваги (19), отримуємо

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\bar{\beta},\infty}; V_{n,p}\big)_C = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\mathcal{J}_{\bar{\beta},n,p}(\psi) + O(1)\frac{\gamma_3(\psi;n;p)}{p}, \tag{20}$$

де

$$\mathcal{J}_{\bar\beta,n,p}(\psi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\varphi\in U^0_\infty} \Bigg| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\bigg(\cos(n-p+1)t +$$

$$+2\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)} \cos\Big((n-p+2)t + \alpha_{\bar\beta,n,p}\Big)\bigg)\, dt\Bigg|,$$

$$\alpha_{\bar\beta,n,p} = \frac{\beta_{n-p+2}\pi}{2} - \frac{n-p+2}{n-p+1}\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}.$$

Згідно з лемою 1 роботи С.О. Теляковського [11, с. 512], при $a \to 0$ виконується асимптотична рівність

$$\sup_{\varphi\in U^0_\infty} \Bigg| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)(\cos mt + a\cos((m+1)t+\alpha))\, dt \Bigg| = 4 + O(1)a^2, \quad (21)$$

де $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

При $m = n-p+1$, $\alpha = \alpha_{\bar\beta,n,p}$ і $a = \frac{2\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}$, із (21) випливає

$$\mathcal{J}_{\bar\beta,n,p}(\psi) = 4 + O(1)\left(\frac{\psi(n-p+2)}{\psi(n-p+1)}\right)^2. \quad (22)$$

Об'єднуючи формули (20) і (22), одержуємо (7). Теорему 1 доведено.

Зокрема, якщо $n \to \infty$ і p обмежене, то формула (7) є асимптотичною рівністю, оскільки, як показано в [2, с. 300, 301],

$$\lim_{m\to\infty} (\psi(m))^{-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k) = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \psi \in \mathcal{D}_0.$$

Поклавши в рівності (7) $p = 1$ і враховуючи (17), при $n \to \infty$ одержуємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}; S_{n-1}\Big)_C = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\bigg(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\bigg), \quad (23)$$

в якій $O(1)$ рівномірно обмежена відносно n, β_k і $\psi(k)$. Рівність (23) доведено С.О. Теляковським в [11, с. 512] (див. також [2, с. 314]).

При $p=n$ з (7) випливає лише порядкова оцінка

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty};\sigma_{n-1}\Big)_C \asymp \frac{1}{n},$$

де "$\asymp$" — символ "слабкої" асимптотики.

Теорема 2. *Нехай* $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k,p,n\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$ *і* $1\leqslant s\leqslant\infty$. *Тоді при* $n\to\infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta,s};V_{n,p}\Big)_C=\frac{1}{p}\bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\gamma_2(\psi;n;p)\bigg),\quad (24)$$

в якій величина $\gamma_2(\psi;n;p)$ *означається формулою (8),* $s'=s/(s-1)$, *а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Нехай $f\in C^{\psi}_{\bar\beta,s}$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_0$. Запишемо рівність (9) у вигляді

$$f(x)-V_{n,p}(f;x)=$$

$$=\frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\right)dt+$$

$$+R_{2,n,p}(f;x),\quad (25)$$

де величина $R_{2,n,p}(f;x)$ означена формулою (13). В силу нерівності Гельдера, очевидних нерівностей

$$\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\right\|_C\leqslant\begin{cases}\|\varphi\|_{M}\|K\|_1, & \varphi\in M,\ K\in L_1,\\ \|\varphi\|_1\|K\|_{M}, & \varphi\in L_1,\ K\in M,\end{cases}$$

(див., наприклад, [2, с. 138]) та оцінки (18), застосованої при $j=2$, маємо

$$\|R_{2,n,p}(f;\cdot)\|_C\leqslant\frac{1}{\pi}\|\varphi\|_s\big\|\Psi_{2,n,p}\big\|_{s'}\leqslant\frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}}\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}} \frac{\gamma_2(\psi; n; p)}{p}. \tag{26}$$

Покладемо

$$A_m(\mathfrak{N}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos mt \, dt \right|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L_1. \tag{27}$$

Враховуючи інваріантність класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},s}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, відносно зсуву аргумента, на основі співвідношень (25) і (26), отримуємо

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar{\beta},s}; V_{n,p}\Big)_C = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} A_{n-p+1}(U^0_s) + O(1)\frac{\gamma_2(\psi; n; p)}{p}. \tag{28}$$

Згідно з нерівністю (див. [19, с. 391])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) K(t) \, dt \leqslant \|\varphi\|_s \|K\|_{s'}, \ \varphi \in L_s, \ K \in L_{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

де $1 \leqslant s \leqslant \infty$, маємо

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos(n-p+1)t \, dt \right| \leqslant \|\varphi\|_s \|\cos t\|_{s'} \leqslant \|\cos t\|_{s'}.$$

Оскільки, як неважко переконатися, останнє співвідношення є точною рівністю для функції

$$\varphi_0(t) = \|\cos t\|_{s'}^{1-s'} |\cos(n-p+1)t|^{s'-1} \operatorname{sign} \cos(n-p+1)t$$

з множини U^0_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, то

$$A_{n-p+1}(U^0_s) = \|\cos t\|_{s'}. \tag{29}$$

Об'єднуючи рівності (28), (29) і враховуючи (18), отримуємо (24). Теорему 2 доведено.

При $p=1$ із теореми 2 і нерівності (17) одержуємо асимптотичну при $n\to\infty$ рівність

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta,s};S_{n-1}\Big)_C=\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi}\psi(n)+O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k),\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1,\ (30)$$

де $1\leqslant s\leqslant\infty$. Рівність (30) встановлено в роботі [9, с. 1094].

Теорема 3. *Нехай* $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k,p,n\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$. *Тоді при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega;V_{n,p}\Big)_C=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{2\theta_\omega}{\pi}\psi(n-p+1)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t\,dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\gamma_2(\psi;n;p)\right),\qquad(31)$$

де величина $\gamma_2(\psi;n;p)$ *означається формулою (8),* $\theta_\omega\in[2/3,1]$, *причому* $\theta_\omega=1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Нехай $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega$, $\psi\in\mathcal{D}_0$. Тоді в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність (25). З урахуванням ортогональності функції $\Psi_{j,n,p}(\cdot)$ вигляду (10) для будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-p+j-1}(\cdot)$ порядку, який не перевищує $n-p+j-1$, при $j=2$ можемо записати

$$R_{2,n,p}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\varphi(x-t)-t_{n-p+1}(x-t)\big)\Psi_{2,n,p}(t)\,dt.\qquad(32)$$

Із (32), випливає

$$|R_{2,n,p}(f;x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|\varphi(x-t)-t_{n-p+1}(x-t)\big|\big|\Psi_{2,n,p}(t)\big|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\big\|\varphi(\cdot) - t_{n-p+1}(\cdot)\big\|_C \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \tau_{n,p}(k).$$

Вибираючи в якості $t_{n-p+1}(\cdot)$ поліном $t^*_{n-p+1}(\cdot)$ — найкращого наближення в просторі C функції $\varphi(\cdot)$, тобто такий, що

$$\big\|\varphi(\cdot)-t^*_{n-p+1}(\cdot)\big\|_C = \inf_{t_{n-p+1}\in\mathcal{T}_{n-p+1}} \big\|\varphi(\cdot) - t_{n-p+1}(\cdot)\big\|_C \overset{\mathrm{df}}{=} E_{n-p+2}(\varphi)_C,$$

де $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$, — множина тригонометричних поліномів порядку не більшого ніж m, користуючись нерівністю Джексона (див., наприклад, [1, с. 227], [19, с. 257]) та формулою (18) при $j = 2$, отримуємо рівномірну по всіх $x \in \mathbb{R}$ оцінку

$$R_{2,n,p}(f;x) = O(1)\omega\bigg(\frac{1}{n-p+1}\bigg) \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \tau_{n,p}(k) =$$

$$= O(1)\omega\bigg(\frac{1}{n-p+1}\bigg)\frac{\gamma_2(\psi;n;p)}{p}. \tag{33}$$

На підставі формул (25) і (33) та із врахуванням інваріантності класів $C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega$ відносно зсуву аргумента одержуємо

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega; V_{n,p}\Big)_C =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} A_{n-p+1}(H^0_\omega) + O(1)\omega\bigg(\frac{1}{n-p+1}\bigg)\frac{\gamma_2(\psi;n;p)}{p}, \tag{34}$$

де величина $A_{n-p+1}(H^0_\omega)$ означена формулою (27) при $m = n-p+1$ і $\mathfrak{N} = H^0_\omega = \{\varphi:\ \varphi \in H_\omega,\ \varphi \perp 1\}$.

Згідно з [20, с. 247] (див., також, [7, с. 789])

$$A_{n-p+1}(H^0_\omega) = 2\theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\bigg(\frac{2t}{n-p+1}\bigg)\sin t\, dt, \tag{35}$$

де $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Тому за допомогою формул (34), (35) і (18) отримуємо рівність (31). Теорему 3 доведено.

При $p=1$ із теореми 3 і нерівності (17) при $n\to\infty$ одержуємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega;S_{n-1}\Big)_C=\frac{2\theta_\omega}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t\,dt+O(1)\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k),\tag{36}$$

де величини θ_ω і $O(1)$ мають той же сенс, що і в теоремі 3. Формулу (36) одержав О.І. Степанець в роботі [8, с. 1104] (див. також [2, с. 295]).

Теорема 4. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k,p,n\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$ і $1\leqslant s\leqslant\infty$. Тоді при $n\to\infty$*

$$\mathcal{E}\Big(L^{\psi}_{\bar\beta,1};V_{n,p}\Big)_{L_s}=\frac{1}{p}\bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi}\psi(n-p+1)+O(1)\gamma_2(\psi;n;p)\bigg),\tag{37}$$

де величина $\gamma_2(\psi;n;p)$ означається формулою (8), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Доведення. Нехай $f\in L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, де $\psi\in\mathcal{D}_0$. Тоді, враховуючи п. 3.1 [1, с. 51], майже для всіх $x\in\mathbb{R}$ має місце рівність (25). Користуючись нерівністю (див. [19, с. 43])

$$\bigg\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\bigg\|_s\leqslant\|\varphi\|_1\|K\|_s,\quad 1\leqslant s\leqslant\infty,\quad \varphi\in L_1,\quad K\in L_s,\tag{38}$$

і оцінкою (18) при $j=2$, для величини $R_{2,n,p}(f;\cdot)$, що визначається формулою (13), отримуємо

$$\|R_{2,n,p}(f;\cdot)\|_s\leqslant\frac{1}{\pi}\|\varphi\|_1\|\Psi_{2,n,p}\|_s\leqslant\frac{2^{1/s}}{\pi^{1-1/s}}\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\tau_{n,p}(k)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2^{1/s}}{\pi^{1-1/s}}\frac{\gamma_2(\psi;n;p)}{p}.\tag{39}$$

За лемою 1 роботи [10] має місце співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\|K(\cdot)-K(\cdot+h)\|_s\leqslant\varepsilon(K)_s\leqslant\frac{1}{\pi}\|K\|_s,\quad 1\leqslant s\leqslant\infty,\tag{40}$$

де

$$\varepsilon(K)_s \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\right\|_s, \quad K\in L_s.$$

Тоді, покладаючи $K(t)=\cos((n-p+1)t-\beta_{n-p+1}\pi/2)$ і враховуючи, що в даному випадку точна верхня межа в лівій частині формули (40) досягається при $h=\pi$, отримуємо

$$\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left((n-p+1)t-\frac{\beta_{n-p+1}\pi}{2}\right)dt\right\|_s=\|\cos t\|_s. \quad (41)$$

За допомогою формул (25), (39), (41) і (18), одержуємо рівність (37). Теорему 4 доведено.

При $p=1$, тобто коли $V_{n,p}(f;\cdot)=S_{n-1}(f;\cdot)$, теорему 4 доведено в роботі [10, с. 1406].

Теорема 5. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k,p,n\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$. Тоді при $n\to\infty$*

$$\mathcal{E}\Big(L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1};V_{n,p}\Big)_{L_1}=$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi}\psi(n-p+1)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t\,dt+\right.$$
$$\left.+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\gamma_2(\psi;n;p)\right), \quad (42)$$

де величина $\gamma_2(\psi;n;p)$ означається формулою (8), $\theta_{\omega_1}\in[1/2,1]$, причому $\theta_{\omega_1}=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Доведення. Нехай $f\in L^{\psi}_{\beta}H_{\omega_1}$, $\psi\in\mathcal{D}_0$. Згідно з пунктом 3.1 роботи [1, с. 51] майже для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність (25). Користуючись нерівністю (38) при $s=1$ і формулою (32), маємо

$$\|R_{2,n,p}(f;\cdot)\|_1\leqslant 2\|\varphi(\cdot)-t_{n-p+1}(\cdot)\|_1\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\tau_{n,p}(k).$$

Вибираючи в якості $t_{n-p+1}(\cdot)$ поліном $t^*_{n-p+1}(\cdot)$ — найкращого наближення в просторі L_1 функції $\varphi(\cdot)$:

$$\left\|\varphi(\cdot) - t^*_{n-p+1}(\cdot)\right\|_1 = \inf_{t_{n-p+1}\in\mathcal{T}_{n-p+1}} \left\|\varphi(\cdot) - t_{n-p+1}(\cdot)\right\|_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} E_{n-p+2}(\varphi)_1,$$

а також користуючись нерівністю Джексона в просторі L_1 (див., [1, с. 227]) та формулою (18) при $j = 2$, отримуємо

$$\|R_{2,n,p}(f;\cdot)\|_1 \leqslant 2E_{n-p+2}(\varphi)_1 \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \tau_{n,p}(k) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{\gamma_2(\psi;n;p)}{p}, \tag{43}$$

де C_0 — деяка абсолютна стала.

За допомогою співвідношень (25) і (43) отримуємо

$$\mathcal{E}\Big(L^{\psi}_{\bar\beta} H_{\omega_1}; V_{n,p}\Big)_{L_1} =$$

$$= \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p} \sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos(n-p+1)t\,dt \right\|_1 +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{\gamma_2(\psi;n;p)}{p}, \tag{44}$$

де $H^0_{\omega_1} = \{\varphi:\ \varphi \in H_{\omega_1},\ \varphi \perp 1\}$. Як випливає з роботи [21, с. 510] (див. також [2, с. 296])

$$\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\cos(n-p+1)t\,dt \right\|_1 =$$

$$= 2\theta_{\omega_1} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t\,dt, \tag{45}$$

де $\theta_{\omega_1} \in [1/2, 1]$, причому $\theta_{\omega_1} = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Враховуючи формули (44) і (45), отримуємо рівність (42). Теорему 5 доведено.

Зазначимо, що для величин $\gamma_m(\psi; n; p)$, які означаються формулою (8), при $m \geqslant m_0 \stackrel{\text{df}}{=} \min\{k \in \mathbb{N} : \ \varepsilon_k < 1\}$, $\varepsilon_k \stackrel{\text{df}}{=} \sup\limits_{j \geqslant k} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}$ справедлива оцінка

$$\gamma_m(\psi; n; p) \leqslant \frac{\psi(n-p+m)}{1-\varepsilon_{n-p+m}} \min\{p, m(1-\varepsilon_{n-p+m})^{-1}\}, \qquad (46)$$

яка є наслідком таких нерівностей:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \psi(n-p+k) < \frac{\psi(n-p+m)}{1-\varepsilon_{n-p+m}}, \quad m \geqslant m_0,$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} k\psi(n-p+k) < m\frac{\psi(n-p+m)}{(1-\varepsilon_{n-p+m})^2}, \quad m \geqslant m_0.$$

Із (46) випливає, що при $n-p \to \infty$ справедлива рівномірна відносно всіх параметрів оцінка

$$\gamma_m(\psi; n; p) = O(1)\frac{\psi(n-p+m)}{(1-\varepsilon_{n-p+m})^{\sigma(p)}} m^{\sigma(p)-1}, \qquad (47)$$

де

$$\sigma(p) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{якщо, } p \leqslant m, \\ 2, & \text{якщо, } p > m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (48)$$

Розглянемо послідовність $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$. Як неважко переконатися, для неї $\varepsilon_k = \sup\limits_{j \geqslant k} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}$ і $m_0 = 1$, тому з урахуванням оцінки (47), при $n - p \to \infty$ маємо

$$\gamma_m(e^{-\alpha k^r}; n; p) =$$

$$= O(1)m^{\sigma(p)-1}\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n-p+m)^{r-1}}\right)^{\sigma(p)} e^{-\alpha(n-p+m)^r}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Наведемо наслідки з теорем 1 — 5 для випадку, коли $\psi(k)=e^{-\alpha k^r}$, $\alpha>0$, $r>1$. Як зазначено вище, в цьому випадку класи $C^{\psi}_{\bar\beta,s}$, $C^{\psi}_{\bar\beta}H_\omega$, $L^{\psi}_{\bar\beta,s}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta}H_{\omega_1}$ позначаються через $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,s}$, $C^{\alpha,r}_{\bar\beta}H_\omega$, $L^{\alpha,r}_{\bar\beta,s}$ і $L^{\alpha,r}_{\bar\beta}H_{\omega_1}$ відповідно.

Наслідок 1. *Нехай* $\alpha>0,\ r>1,\ \beta_k\in\mathbb{R},\ k,p,n\in\mathbb{N},\ p\leqslant n$. *Тоді при* $n-p\to\infty$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,\infty};V_{n,p}\Big)_C=\frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\bigg(\frac{4}{\pi}+O(1)\bigg(\frac{e^{2\alpha(n-p+1)^r}}{e^{2\alpha(n-p+2)^r}}+$$

$$+\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+3)^{r-1}}\Big)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+3)^r}}\bigg)\bigg),\tag{49}$$

де $\sigma(p)$ *означається формулою (48), а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Покладаючи в (49) $p=1$, одержуємо

$$\mathcal{E}\Big(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,\infty};S_{n-1}\Big)_C=e^{-\alpha n^r}\bigg(\frac{4}{\pi}+O(1)\bigg(\frac{e^{2\alpha n^r}}{e^{2\alpha(n+1)^r}}+$$

$$+\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n+2)^{r-1}}\Big)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+2)^r}}\bigg)\bigg).\tag{50}$$

Рівність (50) відтворює результат С.О. Теляковського [11, с. 515], який посилив результат О.І. Степанця [1, с. 131] за рахунок кращої оцінки залишкового члена.

Наслідок 2. *Нехай* $\alpha>0,\ r>1,\ \beta_k\in\mathbb{R},\ k,p,n\in\mathbb{N},\ p\leqslant n$ *і* $1\leqslant s\leqslant\infty$. *Тоді при* $n-p\to\infty$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,s};V_{n,p}\Big)_C=\frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi}+$$

$$+O(1)\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\Big)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\bigg),\tag{51}$$

$$\mathcal{E}\Big(L^{\alpha,r}_{\bar\beta,1};V_{n,p}\Big)_{L_s}=\frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\bigg(\frac{\|\cos t\|_{s}}{\pi}+$$

$$+O(1)\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\Big)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\bigg),\tag{52}$$

де $\sigma(p)$ означається формулою (48), $s' = s/(s-1)$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

При $p = 1$ рівності (49) і (51) були встановлені в роботах [9, c. 1095] і [10, c. 1408] відповідно.

Наслідок 3. *Нехай $\alpha > 0,\ r > 1,\ \beta_k \in \mathbb{R},\ k, p, n \in \mathbb{N},\ p \leqslant n$. Тоді при $n - p \to \infty$*

$$\mathcal{E}\Big(C^{\alpha,r}_{\bar{\beta}} H_\omega; V_{n,p}\Big)_C = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{2\theta_\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\Big(\frac{2t}{n-p+1}\Big)\sin t\,dt+$$

$$+O(1)\omega\Big(\frac{1}{n-p+1}\Big)\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\Big)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\Bigg), \quad (53)$$

$$\mathcal{E}\Big(L^{\alpha,r}_{\bar{\beta}} H_{\omega_1}; V_{n,p}\Big)_{L_1} = \frac{e^{-\alpha(n-p+1)^r}}{p}\Bigg(\frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\Big(\frac{2t}{n-p+1}\Big)\sin t\,dt+$$

$$+O(1)\omega\Big(\frac{1}{n-p+1}\Big)\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n-p+2)^{r-1}}\Big)^{\sigma(p)}\frac{e^{\alpha(n-p+1)^r}}{e^{\alpha(n-p+2)^r}}\Bigg), \quad (54)$$

де $\sigma(p)$ означається формулою (48), величини θ_ω, θ_{ω_1} мають той же сенс, що і в теоремах 3 і 5 відповідно, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Рівності (53) і (54) для сум Фур'є встановлено О.І. Степанцем в роботі [1, c. 131, 155].

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. 1. — 427 с.
3. *Ch. La Valle Poussin.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné. // C.r. Acad. sci. Paris. — 1918. — **166**. — P. 799 — 802.
4. *Степанец А.И., Рукасов В.И.* Аппроксимативные свойства метода Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 8. — С. 1100 — 1125.
5. *Feier L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Math. Ann. — 1904. — **58**. — S. 501 — 569.
6. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.

7. *Степанец А.И.* Уклонение сумм Фурье на классах целых функций // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 6. — С. 783 — 789.

8. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Там же. — 1997. — **49**, № 8. — С. 1069 — 1113.

9. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Там же. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1079 — 1096.

10. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Там же. — 2005. — **57**, № 10. — С. 1395 — 1408.

11. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Там же. — 1989. — **41**, №4. — С. 510 — 518.

12. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Там же. — 2002. — **52**, № 3. — С. 375 — 395.

13. *Степанець О.І.* Наближення сумами Фур'є класів згорток: нові результати // Там же. — 2002. — **54**, № 5. — С. 581 — 602.

14. *Степанець О.І., Сердюк А.С.* Наближення аналітичних функцій сумами Фур'є // Доп. НАН України. — 2000. — № 12. — С. 20 — 24.

15. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97 — 107.

16. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. — 1998. — **20**. — С. 228 — 241.

17. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, №12. — С. 1653–1668.

18. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Там же. — 2003. — **55**, №6. — С. 806 — 816.

19. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

20. *Ефимов А.В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — **24**, № 2. — С. 243–296.

21. *Бердышев В.И.* Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Там же. — 1965. — **29**, № 3. — С. 505 — 526.