Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 324-333

УДК 517.51

М.В. Савчук
(Ін–т підготовки кадрів державної служби зайнятості України, Київ)

ПІДСУМОВУВАННЯ МЕТОДОМ ТИПУ АБЕЛЯ–ПУАССОНА РЯДІВ ЗА МНОГОЧЛЕНАМИ ФАБЕРА ДРУГОГО РОДУ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

Показано, що в однозв'язних областях зі спрямлюваними жордановими межами за певних умов на гладкість межі, середні розкладу в ряд за многочленами Фабера другого роду функції з простору Смірнова $E_1(\Omega)$, що будуються за методом типу Абеля–Пуассона збігаються в інтегральній метриці до граничних значень функції.

1. Означення і постановка задачі. Нехай Ω – однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$ зі спрямлюваною жордановою межею $\Gamma = \partial\Omega$, Φ – функція, яка конформно і однолисто відображає область $\Omega^- := \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ на область $\mathbb{D}^- := \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ так, що $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$ і $\Psi := \Phi^{-1}$ – функція обернена до Φ .

Простір Смірнова $E_1(\Omega)$ (див., наприклад, [1, с. 422]) – це простір усіх аналітичних в Ω функцій f, для кожної з яких знайдеться послідовність $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ однозв'язних областей зі спрямлюваними жордановими межами $\partial\Omega_j$, яка вичерпує зсередини область Ω, така, що

$$\sup_j \int_{\partial\Omega_j} |f(w)||dw| < \infty. \tag{1}$$

Через $E_\infty(\Omega)$ позначимо простір обмежених аналітичних в Ω функцій.

Добре відомо (див., наприклад, [1, с. 422]), що кожна функція $f \in E_1(\Omega)$ має майже скрізь на межі Γ кутові граничні значення, які позначатимемо тією самою літерою f. До того ж, $f \in L_1(\Gamma)$, тобто $\|f\|_1 := \int_\Gamma |f(\zeta)||d\zeta| < \infty$.

Нехай $1 \leq p \leq \infty$. p-*Фаберовим многочленом* степеня k, $k = 0, 1, \ldots,$ (див., наприклад, [2 – 4]) для області Ω називається многочлен $F_{k,p}$, який збігається з правильною частиною розкладу функції $\Phi^k \cdot (\Phi')^{1/p}$ в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки. Таким чином,

$$F_{0,p}(z) = \Phi'(\infty), \quad z \in \Omega^-,$$

і

$$F_{k,p}(z) = \Phi^k(z) \cdot (\Phi'(z))^{1/p} - Q_{k,p}(z), \quad k = 1, 2, \dots, \; z \in \Omega^-,$$

де $Q_{k,p}$ – певна функція, аналітична в області Ω^- і така, що $Q_{k,p}(\infty) = 0$.

Позначимо $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |\Phi(z)| = R\}$, $\Omega_R := \operatorname{int}\Gamma_R$ і $\Omega_R^- := \operatorname{ext}\Gamma_R$, $R \geq 1$.

Безпосередньо з означення p–фаберових многочленів за теоремою Коші випливають рівності

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \Phi^k(\zeta)\,(\Phi'(\zeta))^{1/p}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{R^{k+1}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^k(\Psi'(R\zeta))^{1-1/p}}{\Psi(R\zeta) - z}d\zeta = \tag{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & z \in \Omega_R, \; k = -1, -2, \dots, \\ F_{k,p}(z), & z \in \Omega_R, \; k = 0, 1, 2, \dots, \\ -\Phi^k(z) \cdot (\Phi'(z))^{1/p}, & z \in \Omega_R^-, \; k = -1, -2, \dots, \\ F_{k,p}(z) - \Phi^k(z) \cdot (\Phi'(z))^{1/p}, & z \in \Omega_R^-, \; k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

в яких $R \geq 1$, а інтегрування проводиться в додатному напрямку. Зазначимо що при $R = 1$ під $\Psi'(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}$, розуміємо кутові граничні значення функції Ψ', які внаслідок спрямлюваності кривої Γ існують майже в кожній точці кола $\mathbb{T}$.

Оскільки далі будемо мати справу тільки з многочленами $F_{k,1}$ і $F_{k,\infty}$, то заради спрощення записів покладаємо $F_{k,\infty} := F_k$. Нагадаємо, що многочлени $F_{k,1}$ називають також многочленами Фабера другого роду, а многочлени F_k – многочленами Фабера першого роду або просто многочленами Фабера.

З рівності (2) випливає справедливість розвинення в ряд Лорана

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(\zeta) - \Psi(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,1}(\Psi(w))\Psi'(w) - w^k}{\zeta^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^{k-1}}{w^k}, \tag{3}$$

який для даного фіксованого $w \in \mathbb{D}^-$ збігається рівномірно і абсолютно відносно ζ в області $\{\zeta : 1 < |\zeta| < |w|\}$. До того ж, для $\zeta \in \mathbb{T}$, тобто коли $\zeta = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, ряд в правій частині (3) є рядом Фур'є неперервної функції $e^{it} \mapsto \Psi'(w)/(\Psi(e^{it}) - \Psi(w))$.

Якщо функція $f \in E_1(\Omega)$, то можна означити послідовність чисел

$$\widehat{f}_{k,1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta)\zeta^{-k-1} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

а якщо ж $f \in E_\infty(\Omega)$, то разом із (4) можна означити і послідовність чисел

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(\Psi(\zeta))\zeta^{-k-1} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Послідовності $\{\widehat{f}_{k,1}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ і $\{\widehat{f}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – це послідовності коефіцієнтів Фур'є функцій $f \circ \Psi \cdot \Psi'$ і $f \circ \Psi$ відповідно, визначених та сумовних на колі $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Кожній функції $f \in E_1(\Omega)$ поставимо у відповідність формальний ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,1} F_{k,1}$, тобто

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{k,1} F_{k,1}(z), \quad z \in \Omega.$$

Цей ряд називають 1–фаберовим рядом або рядом за многочленами Фабера другого роду аналітичної функції f. Аналогічно, якщо функція $f \in E_\infty(\Omega)$, то їй можна поставити у відповідність ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k F_k(z), \quad z \in \Omega, \tag{5}$$

який називається рядом Фабера функції f.

Задача про підсумовування методом Абеля –Пуассона ряду Фабера (5) функції, яка є аналітичною в області Ω і неперервною в замкненій області $\overline{\Omega}$ повністю розв'язана в роботі [5]. А саме, там доведено таке твердження.

Теорема A [5]. *Нехай Ω – однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею. Тоді для будь-якої функції f, яка є аналітич-*

ною в області Ω *і неперервною в замкненій області* $\overline{\Omega}$ *справджується рівність*

$$\lim_{\varrho\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k\widehat{f}_kF_k(z)=f(z)\quad \forall\ z\in\overline{\Omega}.$$

Це твердження є суміжним з теоремою 3 з монографії [6, гл.IX, §3] про підсумовування рядів Фабера всередині області методами, що породжуються δ–подібними ядрами.

Нашою метою є дослідження рядів вигляду

$$A_\varrho(f)(w):=\Psi'(w/\varrho)\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^{2k}\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(w/\varrho)),\quad w\in\mathbb{T},\qquad (6)$$

на предмет їх збіжності при $\varrho\to 1-$ до функції $f\circ\Psi\cdot\Psi'$ в середньому на колі $\mathbb{T}$.

Як буде показано нижче, для кожного фіксованого $\varrho\in[0,1)$ ряд, яким визначається величина $A_\varrho(f)(w)$ є абсолютно збіжним відносно $w\in\mathbb{T}$, а отже, визначає деяку функцію змінної w сумовну на колі $\mathbb{T}$.

У випадку, коли $\Omega=\mathbb{D}$, $\Psi(w)=w$, $F_{k,1}(\Psi(w))=w^k$, простір Смірнова $E_1(\Omega)$ збігається з простором Гарді H_1, $\widehat{f}_{k,1}=\widehat{f}_k$ для будь-якої функції $f\in H_1$, а сума (6) набуває вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k\widehat{f}_kw^k,\quad w\in\mathbb{T},$$

тобто збігаєтьтся з середніми Абеля–Пуассона ряду Фур'є граничної функції $f(e^{it})$, $t\in[0,2\pi]$.

З огляду на це, якщо для будь-якої функції $f\in E_1(\Omega)$ справджується рівність

$$\lim_{\varrho\to 1-}\int_{\mathbb{T}}\left|f(\Psi(w))\Psi'(w)-\Psi'(w/\varrho)\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^{2k}\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(w/\varrho))\right||dw|=0,\quad (7)$$

то будемо казати, що ряд за многочленами Фабера другого роду підсумовується методом типу Абеля–Пуассона в інтегральній метриці.

2. Основний результат роботи міститься в наступному твердженні.

Теорема. *Нехай Ω – однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею і*

$$A := \lim_{R\to 1+} \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(Rw)-\Psi(\zeta)} - \frac{1}{Rw-\zeta} \right| |dw| < \infty. \tag{8}$$

Тоді для будь-якої функції $f \in E_1(\Omega)$ справджується рівність (7).

Наведемо приклад області, для якої виконується умова (8). Для цього нагадаємо таке означення.

Нехай $\theta(s)$ – кут між додатним напрямком дійсної осі і дотичною до гладкої кривої Γ в точці M, яка по довжині дуги на кривій Γ знаходиться на відстані s від фіксованої точки кривої. *Спрямлювана гладка крива Γ називається кривою Альпера, якщо модуль неперервності $\omega(t,\theta)$ функції $\theta(\cdot)$ задовольняє умову*

$$\int_0^1 \omega(t,\theta)\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}dt < \infty. \tag{9}$$

Твердження. *Якщо Ω – однозв'язна область, межа якої є замкненою кривою Альпера, то умова (8) виконується.*

Доведення. В [7], [8] (див. також, [9, гл. VII, §1]) показано, що для області, межа якої задовольняє умову (9), похідна Ψ' є неперервною і відмінною від нуля в замкненій області $\mathbb{D}^- \cup \mathbb{T}$, а її модуль неперервності в цій замкненій області задовольняє умову

$$\int_0^1 \frac{\omega(t,\Psi')}{t}dt < \infty. \tag{10}$$

Зрозуміло, що внаслідок цього існують дві сталі C_1 і C_2 такі, що

$$0 < C_1 \le |\Psi'(w)| \le C_2 < \infty \quad \forall\, w \in \mathbb{D}^- \cup \mathbb{T}. \tag{11}$$

Звідси за теоремою 3 з [6, гл. IX, §4] випливає, що існують дві сталі C_3 і C_4 такі, що

$$0 < C_3 \le \frac{|\Psi(w)-\Psi(\zeta)|}{|w-\zeta|} \le C_4 < \infty \quad \forall\, w,\zeta \in \mathbb{D}^- \cup \mathbb{T}. \tag{12}$$

Нескладно переконатися, що для будь-яких $w, \zeta \in \mathbb{T}$ і $R > 1$ справджується рівність

$$\Psi'(Rw)(Rw-\zeta) - (\Psi(Rw) - \Psi(\zeta)) =$$

$$= \int_{\zeta}^{Rw} (\Psi'(Rw) - \Psi'(\tau))d\tau = \left(\int_{\gamma} + \int_{I}\right)(\Psi'(Rw) - \Psi'(\tau))d\tau =$$

$$= \int_{\gamma}(\Psi'(w) - \Psi'(\tau))d\tau + \int_{I}(\Psi'(Rw) - \Psi'(\tau))d\tau +$$

$$+(\Psi'(Rw) - \Psi'(w))(w-\zeta),$$

в якій інтегрування проводиться вздовж кривої, яка складається з меншої дуги $\gamma := \widetilde{(z_1, z_2)}$ кола $\mathbb{T}$, що з'єднує точки $z_1 = \zeta$ і $z_2 = w$ та відрізка $I := I[z_2, z_3]$, що з'єднує точки z_2 і $z_3 = Rw$. На основі цієї рівності та співвідношень (11) і (12) для функції

$$F(w,\zeta) := \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - \Psi(\zeta)} - \frac{1}{w-\zeta}, \quad w, \zeta \in \mathbb{D}^- \cup \mathbb{T},$$

для будь-яких $w, \zeta \in \mathbb{T}$ і $R \in (1, 2]$ справджується оцінка

$$|F(Rw,\zeta)| = \frac{|\Psi'(Rw)(Rw-\zeta) - (\Psi(Rw) - \Psi(\zeta))|}{|Rw-\zeta|^2} \frac{|Rw-\zeta|}{|\Psi(Rw) - \Psi(\zeta)|} \le$$

$$\le \frac{1}{C_3} \frac{|\Psi'(Rw)(Rw-\zeta) - (\Psi(Rw) - \Psi(\zeta))|}{|Rw-\zeta|^2} \le$$

$$\le \frac{1}{C_3|w-\zeta|^2} \int_{\gamma} |\Psi'(w) - \Psi'(\tau)||d\tau| +$$

$$+ \frac{2C_2}{C_3} \frac{R-1}{|Rw-\zeta|^2} + \frac{|\Psi'(Rw) - \Psi'(w)|}{C_3|Rw-\zeta|} \le$$

$$\le \frac{\omega\left(|w-\zeta|, \Psi'\right)}{C_3|w-\zeta|} + \frac{6C_2}{C_3} \frac{R^2-1}{|Rw-\zeta|^2} + \frac{\omega(R-1, \Psi')}{C_3|Rw-\zeta|}.$$

Отже,

$$\int_{\mathbb{T}} |F(Rw,\zeta)||dw| \le \frac{1}{C_3} \int_{\mathbb{T}} \frac{\omega\left(|w-\zeta|, \Psi'\right)}{|w-\zeta|}|dw| +$$

$$+\frac{6C_2}{C_3}\int_{\mathbb{T}}\frac{R^2-1}{|Rw-\zeta|^2}|dw|+\frac{1}{C_3}\omega(R-1,\Psi')\int_{\mathbb{T}}\frac{|dw|}{|Rw-\zeta|}=:$$
$$=: B_1(R)+B_2(R)+B_3(R).$$

Перший доданок $B_1(R)$ не залежить від R і є обмеженим внаслідок (10). Другий доданок $B_2(R)$ являє собою інтеграл від ядра Пуассона, а отже, $B_2(R) = 12\pi C_2/C_3$. Для оцінки третього доданка $B_3(R)$ зауважимо, що (див., наприклад, [9, с. 219])

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{|dw|}{|Rw-\zeta|}\le 2\pi\ln\frac{R+1}{R-1}\quad\forall\ R>1,\ \zeta\in\mathbb{T}.$$

Тому, внаслідок (10)

$$\lim_{R\to1+}B_3(R)\le\frac{2\pi}{C_3}\lim_{R\to1+}\omega(R-1,\Psi')\ln\frac{R+1}{R-1}=$$
$$=\frac{2\pi}{C_3}\lim_{t\to0+}\omega(t,\Psi')\ln\frac{1}{t}=0.$$

Об'єднавши вищенаведені факти, переконаємося в тому, що

$$A=\lim_{R\to1+}\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|F(Rw,\zeta)||dw|<\infty.$$

Доведення теореми. Візьмемо $R>1$ і $w\in\mathbb{T}$. Тоді згідно з (3) маємо рівність

$$F_{k,1}(\Psi(Rw))\Psi'(Rw)=R^kw^k-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\zeta^k\left(\frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(Rw)-\Psi(\zeta)}-\frac{1}{Rw-\zeta}\right)d\zeta,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Візьмемо $r>0$ таке, що $r<1/R$. Тоді з останньої рівності випливає формула

$$\Psi'(Rw)\sum_{k=0}^{\infty}r^k\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(Rw))=\sum_{k=0}^{\infty}r^kR^k\widehat{f}_{k,1}w^k-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}r^k\widehat{f}_{k,1}\zeta^k\right)\left(\frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(Rw)-\Psi(\zeta)}-\frac{1}{Rw-\zeta}\right)d\zeta.$$

Зрозуміло, що внаслідок абсолютної збіжності обох рядів у правій частині (13) (вони мажоруються рядами $\|f\|_1 \sum_{k=0}^{\infty}(rR)^k$), абсолютно збігатиметься й ряд у лівій частині.

Врахувавши те, що для будь-якої функції $f \in E_1(\Omega)$ згідно з теоремою Коші (див., наприклад, [1, с. 423])

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\mathbb{T} f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta) - \Psi(Rw)} = 0, \quad z = \Psi(Rw),$$

і згідно з (3)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\mathbb{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} r^{|k|} \widehat{f}_{k,1} \zeta^k \right) \left(\frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(Rw) - \Psi(\zeta)} - \frac{1}{Rw - \zeta} \right) d\zeta = 0,$$

останню формулу перепишемо у вигляді

$$\Psi'(Rw) \sum_{k=0}^{\infty} r^k \widehat{f}_{k,1} F_{k,1}(\Psi(Rw)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R^k r^k \widehat{f}_{k,1} w^k + \frac{1}{2\pi i} \int_\mathbb{T} f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) \frac{d\zeta}{Rw - \zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\mathbb{T} \left(f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}_{k,1} \zeta^k \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(Rw) - \Psi(\zeta)} - \frac{1}{Rw - \zeta} \right) d\zeta. \tag{13}$$

Позначимо

$$(f \circ \Psi \cdot \Psi')_\varrho(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\mathbb{T} f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) \frac{1 - \varrho^2}{|1 - \varrho w \bar{\zeta}|} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Нехай $r = 1/R^2$ і покладемо $\varrho := 1/R$. Тоді $r = \varrho^2$. В цих позначеннях формула (13) набуває вигляду

$$\Psi'(w/\varrho) \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{2k} \widehat{f}_{k,1} F_{k,1}(\Psi(w/\varrho)) =$$

$$= (f\circ\Psi\cdot\Psi')_\varrho(w) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\big(f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) - (f\circ\Psi\cdot\Psi')_{\varrho^2}(\zeta)\big)\times$$
$$\times\left(\frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho)-\Psi(\zeta)} - \frac{1}{w/\varrho-\zeta}\right)d\zeta$$

Функція $(f\circ\Psi\cdot\Psi')_\varrho(\cdot)$ – це інтеграл Пуассона функції $f\circ\Psi\cdot\Psi'$, яка є сумовною на колі $\mathbb{T}$. Тому за відомою теоремою (див., наприклад [10, гл. 2])

$$\lim_{\varrho\to1-}\int_{\mathbb{T}}|f(\Psi(w))\Psi'(w) - (f\circ\Psi\cdot\Psi')_\varrho(w)|\,|dw| = 0. \tag{14}$$

Отже,

$$\lim_{\varrho\to1-}\int_{\mathbb{T}}\left|f(\Psi(w))\Psi'(w) - \Psi'(w/\varrho)\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^{2k}\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(w/\varrho))\right|\,|dw| =$$
$$= \lim_{\varrho\to1-}\int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}}\big(f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) - (f\circ\Psi\cdot\Psi')_{\varrho^2}(\zeta)\big)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho)-\Psi(\zeta)} - \frac{1}{w/\varrho-\zeta}\right)d\zeta\right|\,|dw|. \tag{15}$$

Згідно з умовою (8) інтеграл в правій частині останньої рівності можна оцінити так

$$\int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}}\big(f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) - (f\circ\Psi\cdot\Psi')_{\varrho^2}(\zeta)\big)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho)-\Psi(\zeta)} - \frac{1}{w/\varrho-\zeta}\right)d\zeta\right|\,|dw| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{T}}\big|(f(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta) - (f\circ\Psi\cdot\Psi')_{\varrho^2}(\zeta)\big|\,|d\zeta|\times$$
$$\times\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\left|\frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho)-\Psi(\zeta)} - \frac{1}{w/\varrho-\zeta}\right|\,|dw|.$$

Підставивши цю оцінку в (15), внаслідок співвідношень (8) і (14), отримаємо твердження теореми.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.

2. *Кокилашвили В. М.* О приближении аналитических функций класса E_p// Докл. АН СССР. – 1967. – **177**, № 2. – С. 261 – 264.

3. *Дынькин Е. М.* Скорость полиномиальной аппроксимации в $E^p(G)$// Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 3. – С. 529 – 531.

4. *Andersson J.-E.* On the degree of polynomial approximation in $E^p(D)$// J. Approx. Theory – 1977. – 19. – P. 61 – 68.

5. *Tietz H.* Zur Summierbarkeit von Faber–Reihen // Abh. Braunschweig.Wiss.Ges. – 1992. – 43. – P. 35 – 43.

6. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 508 с.

7. *Warshawski S.* Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung// Math. Z. – 1932. – **35.** – P. 321 – 456.

8. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**, 6. – С. 423 – 444.

9. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.

10. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963. – 311 с.