Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 23-29

УДК 517.5

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМИ И ОДНОРОДНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ МЕРАМИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Построен пример меры из множества $\det \mathcal{S} \setminus \det_{\mathrm{h}} \mathcal{S}$, *где* $\det \mathcal{S}$ *обозначает множество всех мер, определенных в смысле Стилтьеса,* $\det_{\mathrm{h}} \mathcal{S} := \{\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+) \mid \Gamma_\beta \mu \in \det \mathcal{S}$ для всех $\beta \in \pi_\infty\}$, $\Gamma_\beta \mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A/\beta_k)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\pi_\infty := \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \mid 0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_n < \infty\,,\ 1 \leq n < \infty\}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *обозначает семейство всех борелевских подмножеств* $\mathbb{R}$ *и* $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ *— множество всех борелевских мер на* $\mathbb{R}^+$ *со всеми конечными моментами.*

1. Главный результат. Обозначим через $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ и $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ множества всех борелевских мер на $\mathbb{R}$ со всеми конечными моментами $s_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$, $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$, и с непустым носителем $\operatorname{supp} \mu := \{x \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0 : \mu((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0\}$, содержащимся в $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}$, соответственно.

Каждой мере $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ставится в соответствие множество V_μ (V_μ^+) всех тех мер $\nu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$), для которых $s_n(\nu) = s_n(\mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Мера $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$) называется *неопределенной* в смысле Гамбургера (Стилтьеса) (сокращенно: $\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H}$ ($\operatorname{indet} \mathcal{S}$)), если $V_\mu \setminus \{\mu\} \neq \emptyset$ ($V_\mu^+ \setminus \{\mu\} \neq \emptyset$), и *определенной* в смысле Гамбургера (Стилтьеса) (сокращенно: $\mu \in \det \mathcal{H}$ ($\det \mathcal{S}$)), если $V_\mu (V_\mu^+) = \{\mu\}$. Меры из множества $\det \mathcal{S}$ мы также будем называть *определенными на* $\mathbb{R}^+$.

Определим индекс определенности произвольной меры $\mu \in \det \mathcal{H}$ следующим образом:

$$\operatorname{ind}(\mu) := \sup\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \mu_k \in \det \mathcal{H}\}\ ,$$

где $d\mu_s(x) := (x^2+1)^s d\mu(x)$, $s \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\operatorname{ind}(\mu)$ совпадает с индексом $\operatorname{ind}_i \mu$, введенным в работе [3, p.2795]. Пусть

$$\pi_\infty := \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \mid 0 < \beta_1 \le \beta_2 \le ... \le \beta_n < \infty \,,\ 1 \le n < \infty\} \ .$$

Для произвольной меры $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ и произвольного набора $\beta := (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \pi_\infty$ обозначим через $\Gamma_\beta \mu$ меру следующего вида

$$\Gamma_\beta \mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A/\beta_k), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ,$$

где $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ обозначает семейство всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Меры из множества

$$\det{}_{\mathrm{h}} \mathcal{S} \ := \left\{\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+) \mid \Gamma_\beta \mu \in \det \mathcal{S} \text{ для всех } \beta \in \pi_\infty\right\} \qquad (1)$$

будем называть *однородно определенными на* $\mathbb{R}^+$. Очевидно, что

$$\det{}_{\mathrm{h}} \mathcal{S} \subset \det \mathcal{S} \ ,$$

и

$$\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+) \cap \det \mathcal{H} \subset \det \mathcal{S} \ .$$

Так как из $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ вытекает $\mu_s \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ для произвольного $s \in \mathbb{R}$, то из $\mu_k \in \det \mathcal{H}$ будет следовать $\mu_k \in \det \mathcal{S}$, и значит,

$$\mathrm{ind}(\mu) \le \sup\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \mu_k \in \det \mathcal{S}\}\,, \quad \mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+) \ .$$

В работе [2] после доказательства леммы 2.1 было указано, что множество $\det \mathcal{S} \setminus \det{}_{\mathrm{h}} \mathcal{S}$ содержит меры $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ со свойством $\mathrm{ind}(\mu) := +\infty$. И в качестве примера такой меры была без доказательства приведена мера $d\mu(x) = \sum_{k\ge1} e^{-1,5k^2} \delta(x - e^k)$. Целью настоящей работы является доказательство такого более общего факта.

Теорема 1. *Пусть дискретная мера* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ *определена равенством*

$$d\mu(x) = \sum_{k\ge1} e^{-1,5k^2} \delta(x - e^k) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ . \qquad (2)$$

Тогда

$$(\,\Gamma_{(1,0.75)}\mu\,)_{-n} \notin \det \mathcal{S} \quad \forall\; n \geq 0\;,$$

но

$$\mu_n \in \det \mathcal{H} \quad \forall\; n \geq 0\;,$$

то есть $\operatorname{ind}(\mu) := +\infty$.

Теорема 1 показывает, что свойства мер μ и $\Gamma_{(1,0.75)}\mu$ могут отличаться друг от друга существенным образом, и поэтому требование однородной определенности на $\mathbb{R}^+$ существенно сильнее требования определенности на $\mathbb{R}^+$.

2. Предварительные сведения. Для $\rho > 0$ введем

$$\Lambda^{\rho} := \Big\{\; \{\lambda_k\}_{k\geq 1}\,|\lambda_1 \geq 1+\rho, \lambda_{k+1}-\lambda_k \geq \rho\lambda_k, k\geq 1 \Big\}\;, \tag{3}$$

и обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех действительных алгебраических полиномов, т.е. полиномов с действительными коэффициентами, через $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ — множество всех полунепрерывных сверху функций $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, удовлетворяющих $\|\,x^n\,\|_w < \infty\ \forall\ n\geq 0$, где $\|\,f\,\|_w := \sup_{x\in\mathbb{R}} w(x)\,|\,f(x)\,|$, через $\mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ — множество таких функций $w\in\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, что $\mathcal{P}$ плотно в пространстве C_w^0, определенном как множество всех $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывных на $\mathbb{R}$ и с $\lim_{|\,x\,|\to\infty} w(x)f(x)=0$, снабженное полунормой $\|\cdot\|_w$.

Следующая теорема [5, Th.17] характеризует специальные дискретные веса.

Теорема А. *Пусть* $\rho>0$, $\{\lambda_k\}_{k\geq1}\in\Lambda^{\rho}$, $h\in\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *и* $S_h := \{\,x\in\mathbb{R}\,|\,h(x)>0\,\} = \{\lambda_k\}_{k\geq1}$, *т.е.*

$$h(x) = \sum_{k\geq1} h_k\cdot\chi_{\{\lambda_k\}}(x)\;,\quad x\in\mathbb{R}\;,\quad h_k>0\ \ \forall\ k\geq1\;,$$

и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, h_k\lambda_k^m = 0$ *для каждого* $m\geq 0$.

Обозначим

$$\varepsilon_1(h) := \lambda_1\;,\quad \varepsilon_k(h) := \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{k-1}\cdot\lambda_k^{2-k}\;,\; k\geq 2\;.$$

Тогда справедливы следующие свойства:

1. *Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{h_k}{\varepsilon_k(h)} = 0$ *то* $h \in \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$.

2. *Если* $\sum_{k\geq 1} \dfrac{\varepsilon_k(h)}{h_k} < \infty$ *то* $h \notin \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$.

Нам также понадобится следствие 2.1 из [1, p.39].

Теорема B. *Мера* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *порождает определенную проблему моментов Гамбургера тогда и только тогда, когда она может быть представлена в следующей форме:*

$$\mu(A) = \int_A \frac{w(x)^2}{1+x^2}\, d\nu(x) \quad \forall\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ , \tag{4}$$

где $w \in \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ *и* ν *является некоторой конечной положительной борелевской мерой на* $\mathbb{R}$ *.*

Напомним также, известная теорема М.Рисса из [6] утверждает, что $\mathcal{P}$ плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \det \mathcal{H}$.

3. Доказательство теоремы 1.

3.1. Рассмотрим вес

$$\omega(x) = \sum_{k\geq 1} e^{-0.75k^2} \cdot \chi_{\{e^k\}}(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть

$$\rho(x) := \omega(x) + \omega(x/0.75) = \sum_{k\geq 1} e^{-0.75k^2} \cdot \chi_{\{e^k\}}(x) + \sum_{k\geq 1} e^{-0.75k^2} \cdot \chi_{\{e^k\}}(x/0.75) = \sum_{k\geq 1} e^{-0.75k^2} \cdot \chi_{\{e^k\}}(x) + \sum_{k\geq 1} e^{-0.75k^2} \cdot \chi_{\{0.75\cdot e^k\}}(x) =: \sum_{k\geq 1} \rho_k \cdot \chi_{\{\mu_k\}}\ ,$$

где для $k \geq 1$

$$\mu_{2k-1} = 0.75 \cdot e^k\ , \quad \mu_{2k} = e^k\ , \ \rho_{2k-1} = \rho_{2k} = e^{-0.75k^2}\ .$$

Очевидно, что при $k \geq 1$

$$\mu_{2k+2}=e^{k+1}>\mu_{2k+1}=0.75e^{k+1}>\mu_{2k}=e^{k}>\mu_{2k-1}=0.75\cdot e^{k},$$
$$\mu_{2k}-\mu_{2k-1}=0.25\cdot\mu_{2k-1},\mu_{2k+1}-\mu_{2k}=(0.75e-1)\mu_{2k}>\mu_{2k},$$

откуда

$$\{\mu_k\}_{k\geq 1}\in\Lambda^{0.25}\ ,\quad \{e^k\}_{k\geq 1}\in\Lambda^{1}\ .$$

Более того,

$$\varepsilon_k(\omega)=e^{-\frac{k^2}{2}+\frac{3k}{2}}\ ,\quad \varepsilon_{2k}(\rho)=\frac{0.75^k}{e^k}\cdot\varepsilon_k(\omega)^2=0.75^k\cdot e^{-k^2+2k}\ ,$$
$$\varepsilon_{2k+1}(\rho)=\frac{\varepsilon_k(\omega)^2}{0.75^{k-1}e^{k+1}}=0.75^{1-k}e^{-k^2+2k-1}\ .$$

Но по теореме A для $n \geq 0$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{(1+e^{2k})^n\cdot e^{-0.75k^2}}{\varepsilon_k(\omega)}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{(1+e^{2k})^n\cdot e^{-0.75k^2}}{e^{-\frac{k^2}{2}+\frac{3k}{2}}}=0\,,$$
$$\sum_{k\geq 2}\frac{(1+\mu_k^2)^n\cdot\varepsilon_k(\rho)}{\rho_k}=\sum_{k\geq 1}\frac{(1+\mu_{2k}^2)^n\cdot\varepsilon_{2k}(\rho)}{\rho_{2k}}+$$
$$\sum_{k\geq 1}\frac{(1+\mu_{2k+1}^2)^n\cdot\varepsilon_{2k+1}(\rho)}{\rho_{2k+1}}=\sum_{k\geq 1}\frac{(1+e^{2k})^n\cdot 0.75^k\cdot e^{-k^2+2k}}{e^{-0.75k^2}}+$$
$$\sum_{k\geq 1}\frac{(1+0.75e^{2k+2})^n\cdot 0.75^{1-k}e^{-k^2+2k-1}}{e^{-0.75(k+1)^2}}<\infty\ ,$$

откуда для произвольного $n \geq 0$

$$(1+x^2)^n\cdot\omega\in\mathcal{W}_1^*(\mathbb{R}),\quad (1+x^2)^{-n}\cdot\rho\notin\mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})\ . \tag{5}$$

3.2. Введем на $\mathbb{R}$ такие дискретные меры:

$$d\delta_\lambda(x)=\sum_{k\geq 1}\delta(x-e^k)\ ,\quad d\delta_\mu(x)=\sum_{k\geq 1}\delta(x-\mu_k)\ ,$$

Тогда для меры μ, определенной в (2), имеем:

$$(1+x^2)^{2n} d\mu(x) = \sum_{k\geq 1} (1+e^{2k})^{2n} e^{-1,5k^2} \delta(x-e^k) =$$
$$= \frac{(1+x^2)^{2n+2}\omega(x)^2}{1+x^2} \cdot \left(\frac{d\delta_\lambda(x)}{1+x^2}\right) ,$$

т.е. по теореме В и (5): $\mu \in \det \mathcal{H}$, $\mathrm{ind}(\mu) := +\infty$.

Предположим теперь, что существует такое неотрицательное целое число n, что мера:

$$(1+x^2)^{-2n}\,(d\mu(x) + d\mu(x/0.75)) = (1+x^2)^{-2n}\rho(x)^2\, d\delta_\mu(x) =$$
$$= \sum_{k\geq 1} \frac{\rho_k^2}{(1+\mu_k^2)^{2n}} \delta(x-\mu_k) ,$$

является определенной по Стилтьесу. По теореме В это означает, что существует вес

$$h(x) = \sum_{k\geq 1} h_k \cdot \chi_{\{\mu_k\}}(x) \in \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R}) \tag{6}$$

и конечная неотрицательная борелевская мера

$$d\theta(x) = \sum_{k\geq 1} \theta_k \cdot \delta(x-\mu_k) ,\ \alpha^2 := \sum_{k\geq 1} \theta_k < \infty ,$$

такие, что

$$h_k^2\theta_k = \frac{\rho_k^2}{(1+\mu_k^2)^{2n}} ,\quad k \geq 1 ,$$

откуда

$$h_k^2 \geq \frac{\rho_k^2}{\alpha^2 \cdot (1+\mu_k^2)^{2n}} ,$$

и потому в силу неравенства, предшествующему (5), имеем

$$\sum_{k\geq 2} \frac{\varepsilon_k(h)}{h_k} \leq \sum_{k\geq 2} \frac{\alpha \cdot (1+\mu_k^2)^n \cdot \varepsilon_k(\rho)}{\rho_k} < \infty.$$

Поэтому по теореме A: $h \notin \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$, что противоречит (6). Таким образом

$$(\,\Gamma_{(1,0.75)}\mu\,)_{-2n} \notin \det\mathcal{H} \;\forall\; n \geq 0\;.$$

По вышеупомянутой теореме М.Рисса из [6] алгебраические многочлены неплотны в пространстве

$$L_2\left(\mathbb{R}, \frac{d\,\Gamma_{(1,0.75)}\mu(x)}{(1+x^2)^{2n-2}}\right) \quad \forall\; n \geq 0\;,$$

и по теореме 3.8 из [4, p.219], утверждающей, что мера $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ принадлежит $\det\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда алгебраические полиномы $\mathcal{P}$ плотны в пространствах $L_2(\mathbb{R},(1+x)d\mu)$ и $L_2(\mathbb{R},x(1+x)d\mu)$, мы получим

$$(\,\Gamma_{(1,0.75)}\mu\,)_{-n} \notin \det\mathcal{S} \quad \forall\; n \geq 0\;,$$

что и требовалось доказать.

1. *Bakan A.G.* Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem// Approximation, Optimization and Mathematical Economics. — Heidelberg: Physica, 2001. — P. 37 — 46.

2. *Bakan A. and Ruscheweyh St.* Solution of the Karlin problem for zero-diminishing sequences satisfying a Carleman condition// Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — **136**. — № 8. — P. 2665 — 2674.

3. *Berg Ch. and Duran A.* The index of determinacy for measures and the l^2-norm of orthonormal polynomials// Trans.Amer.Math.Soc. — 1995. — **347**. — P. 2795 — 2811.

4. *Berg Ch. and Thill M.* Rotation invariant moment problems// Acta Math. — 1991. — **167**. — P. 207 — 227.

5. *Mergelyan S.N.* Weighted approximation by polynomials// Успехи мат. наук. — 1956. — **11**. — C. 107 — 152.

6. *Riesz M.* Sur le probleme des moments et le theoreme de Parseval correspondant// Acta Litt. Ac. Sci. Szeged. — 1923. — **1**. — P. 209 — 225.