Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 309-323

УДК 517.51

В.В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ 2π–ПЕРІОДИЧНИХ І ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИМИ ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Для класів дійснозначних 2π – періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ і для класів голоморфних в одиничному крузі функцій H^{ψ}_p у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка їх породжує, є моментною, побудовано лінійний метод наближення вигляду

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\varrho)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де $\{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних на $[0,1]$ функцій, що визначаються послідовністю $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Знайдено формули для точних верхніх меж відхилення середніх $U_{\varrho,\Lambda}$ від функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ і H^{ψ}_p. Як частинний випадок отриманих результатів наведено рівності для верхніх меж відхилень узагальнених середніх Абеля–Пуассона та середніх Тейлора–Абеля–Пуассона від функцій з класів $W^r, \overline{W}^r$ і H^r_p відповідно.

1. Нехай дійснозначна 2π–періодична функція $f \in L = L(-\pi, \pi)$ і

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– її ряд Фур'є. Нехай далі $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність функцій, неперервних на відрізку $[0,1]$. Припустимо, що для даної функції $f \in L$ і всіх $\varrho \in [0,1]$ тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\varrho)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є сумовної функції, яку позначимо через $U_{\varrho,\Lambda}(f)$. Нехай $\mathfrak{A}$ — деякий клас функції з L і $\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}$ — множина усіх функціональних послідовностей Λ, які стосовно функцій класу $\mathfrak{A}$ задовольняють припущення, зроблені вище.

В даній роботі будемо досліджувати величину

$$\mathscr{E}(\mathfrak{A}, \Lambda, \varrho)_C := \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|f - U_{\varrho,\Lambda}(f)\|_C, \quad \varrho \in [0, 1),$$

де $\mathscr{L}_{\mathfrak{A}} \ni \Lambda$ — фіксована функціональна послідовність, $C = C[-\pi, \pi]$ — простір неперервних на дійсні осі 2π– періодичних функцій f з нормою $\|f\|_C = \max_{x \in [-\pi,\pi]}$, а у ролі $\mathfrak{A}$ вибирається клас О.І. Степанця $L^{\psi}_{\beta,\infty}$ [1]. Нагадаємо його означення. Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність дійсних чисел, відмінних від нуля і β — фіксоване дійсне число. Якщо для даної функції $f \in L$ тригонометричний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то цю функцію називають (ψ, β)–похідною функції f і позначають f^{ψ}_{β}. Тоді

$$L^{\psi}_{\beta,\infty} := \left\{ f \in L : \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [-\pi,\pi]} |f^{\psi}_{\beta}(x)| \leq 1 \right\}.$$

Основний результат роботи міститься в наступному твердженні.

Теорема 1. *Нехай* $\beta \in \mathbb{Z}$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність додатних чисел, які задовольняють умови*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = 0 \tag{1}$$

і

$$\psi_k = \int_0^1 t^{k-1} d\lambda(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $\lambda(\cdot)$ *— функція обмеженої варіації на* $[0, 1]$, $\lambda(0) := \lambda(+\,0) = 0$, *а* $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду*

$$\lambda_k(\varrho) = \frac{1}{\psi_k} \int_0^{\varrho} t^{k-1} d\lambda(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \ \varrho \in [0, 1].$$

Тоді:

1) якщо β — парне число, то

$$\mathscr{E}(L^{\psi}_{\beta,\infty}, \Lambda, \varrho)_C = \frac{4}{\pi}\int_{\varrho}^{1} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, d\lambda(t) \quad \forall\ \varrho \in [0,1); \tag{3}$$

2) якщо β — непарне число і λ задовольняє умову

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t} d\lambda(t) < \infty, \tag{4}$$

то

$$\mathscr{E}(L^{\psi}_{\beta,\infty}, \Lambda, \varrho)_C = \frac{2}{\pi}\int_{\varrho}^{1} \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t} d\lambda(t) \quad \forall\ \varrho \in [0,1). \tag{5}$$

Доведення. В [2] показано, що за умов (1) і (2) для всіх $x \in \mathbb{R}$ можливо за виключенням точок $x = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, справджується рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{(\cos x - t)\cos(\beta\pi/2) + \sin x \sin(\beta\pi/2)}{1 - 2t\cos x + t^2} d\lambda(t). \tag{6}$$

Обґрунтуємо сумовність функції $D_{\psi,\beta}$. Припустимо, що λ – неспадна функція. Тоді послідовність ψ є абсолютно монотонною і спадною до нуля. Отже, при парних β сумовність функції $D_{\psi,\beta}$ випливає з теореми 1.5 в монографії [3, гл. V], а при непарних β – з теореми 1.14 в цій книзі, на підставі того, що збіжність ряду $\sum \psi_k/k$ випливає з умови (4). Випадок довільної функції λ зводиться до розгзлянутого за допомогою теореми Жордана про зображення функції обмеженої варіації у вигляді різниці двох неспадних функцій.

Ці факти дозволяють скористатися твердженням 7.2 з [1, с. 136], згідно з яким для будь-якої функції $f \in L^{\psi}_{\beta,\infty}$ справджується рівність

$$f(x) = \widehat{f}_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-y) D_{\psi,\beta}(y) dy \quad \forall\ x \in [-\pi,\pi]. \tag{7}$$

Звідси, зокрема, випливає, що $f \in C$.

Позначимо

$$P(y,t) := \frac{1-t^2}{1-2t\cos y+t^2}, \quad \widetilde{P}(y,t) := \frac{2t\sin y}{1-2t\cos y+t^2}$$

і

$$P(g)(x,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)P(y,t)dy,$$
$$\widetilde{P}(g)(x,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\widetilde{P}(y,t)dy,$$

де $g \in L_1(\mathbb{T})$.

Візьмемо довільне $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \pi$ і покладемо $e := e(\varepsilon) := [-\varepsilon, \varepsilon]$, $E := E(\varepsilon) := [-\pi, \pi] \setminus e$. Тоді, використовуючи формулу (6) та теорему Фубіні, одержимо низку рівностей

$$\frac{1}{\pi}\int_E f_\beta^\psi(x-y)D_{\psi,\beta}(y)dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_E f_\beta^\psi(x-y)\int_0^1 \left((P(y,t)-1)\cos\frac{\beta\pi}{2} + \widetilde{P}(y,t)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{d\lambda(t)}{t}\,dy =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_E f_\beta^\psi(x-y)\left((P(y,t)-1)\cos\frac{\beta\pi}{2} + \widetilde{P}(y,t)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dy\,\frac{d\lambda(t)}{t}.$$

Розглянемо функцію

$$F_\varepsilon(x) := \begin{cases} f_\beta^\psi, & x \in e(\varepsilon), \\ 0, & x \in E(\varepsilon). \end{cases}$$

З останньої рівності з урахуванням того, що $\widehat{(f_\beta^\psi)}_0 = 0$ отримуємо такі співвідношення:

$$\frac{1}{\pi}\int_{E(\varepsilon)} f_\beta^\psi(x-y)D_{\psi,\beta}(y)dy =$$
$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}\left(\int_0^1 P(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t} - \int_0^1 (P(F_\varepsilon)(x,t) - P(F_\varepsilon)(x,0))\frac{d\lambda(t)}{t}\right), \tag{8}$$

якщо β — парне і

$$\frac{1}{\pi}\int_{E(\varepsilon)} f_\beta^\psi(x-y)D_{\psi,\beta}(y)dy =$$

$$=\sin\frac{\beta\pi}{2}\left(\int_0^1 \widetilde{P}(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t} - \int_0^1\left(\widetilde{P}(F_\varepsilon)(x,t) - \widetilde{P}(F_\varepsilon)(x,0)\right)\frac{d\lambda(t)}{t}\right), \tag{9}$$

якщо β — непарне.

За лемою Шварца (про оцінки обмежених гармонічних функцій) [4] для норм підінтегральних функцій в правих частинах (8) і (9) маємо оцінки

$$\left.\begin{array}{c}\left\|P(f_\beta^\psi)(\cdot,t)\right\|_{L_\infty}, \\ \|P(F_\varepsilon)(\cdot,t) - P(F_\varepsilon)(\cdot,0)\|_{L_\infty}\end{array}\right\} \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} t \quad \forall\, t\in[0,1), \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{c}\left\|\widetilde{P}(f_\beta^\psi)(\cdot,t)\right\|_{L_\infty}, \\ \left\|\widetilde{P}(F_\varepsilon)(\cdot,t) - \widetilde{P}(F_\varepsilon)(\cdot,0)\right\|_{L_\infty}\end{array}\right\} \leq \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad \forall\, t\in[0,1). \tag{11}$$

Візьмемо довільний $x\in[-\pi,\pi]$ і розглянемо дві сім'ї функцій $\{g_{\varepsilon,x}\}_{0<\varepsilon<1}$, і $\{h_{\varepsilon,x}\}_{0<\varepsilon<1}$, де

$$g_{\varepsilon,x}(t) = (P(F_\varepsilon)(x,t) - P(F_\varepsilon)(x,0))/t$$

і

$$h_\varepsilon(t) = (\widetilde{P}(F_\varepsilon)(x,t) - \widetilde{P}(F_\varepsilon)(x,0))/t.$$

Другі співвідношення в (10) і (11) та умова (4) вказують на те, що функції $g_{\varepsilon,x}$ і $h_{\varepsilon,x}$ задовольняють умови теореми Лебега про обмежену збіжність, внаслідок якої

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 g_{\varepsilon,x}(t)d\lambda(t) = \int_0^1 \lim_{\varepsilon\to0} g_{\varepsilon,x}(t)d\lambda(t) \tag{12}$$

і

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 h_{\varepsilon,x}(t)d\lambda(t)\int_0^1 \lim_{\varepsilon\to0} h_{\varepsilon,x}(t)d\lambda(t). \tag{13}$$

Оскільки $\lim_{\varepsilon\to 0} g_{\varepsilon,x}(t) = \lim_{\varepsilon\to,0} h_{\varepsilon,x}(t) = 0$ для будь-якого $t \in [0,1)$, то, об'єднавши (7)–(9), (12) і (13), отримаємо таку формулу

$$f(x) = \widehat{f}_0 + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{E(\varepsilon)} f_\beta^\psi(x-y)D_{\psi,\beta}(y)dy =$$

$$= \widehat{f}_0 + \begin{cases} \cos\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 P(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{парне},\\[2ex] \sin\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \widetilde{P}(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{непарне}.\end{cases}$$

Неважко показати, що для будь-якого $\varrho \in [0,1)$

$$U_{\lambda,\varrho}(f)(x) =$$

$$= \widehat{f}_0 + \begin{cases} \cos\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_0^\varrho P(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{парне},\\[2ex] \sin\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_0^\varrho \widetilde{P}(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$f(x) - U_{\lambda,\varrho}(f)(x) =$$

$$= \begin{cases} \cos\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_\varrho^1 P(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{парне},\\[2ex] \sin\dfrac{\beta\pi}{2}\displaystyle\int_\varrho^1 \widetilde{P}(f_\beta^\psi)(x,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{непарне}.\end{cases} \tag{14}$$

Тепер, скориставшись першими співвідношеннями в (10) і (11), для будь-якого $\varrho \in [0,1)$ отримаємо оцінки

$$\mathscr{E}(L_{\beta,\infty}^\psi, \Lambda, \varrho)_C \le \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}d\lambda(t), & \beta - \text{парне},\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}d\lambda(t), & \beta - \text{непарне}.\end{cases} \tag{15}$$

Розглянемо функції $g(x) := \operatorname{sign}\cos x$ і $h(x) := \operatorname{sign}\sin x$. Їх розвинення в ряди Фур'є мають вигляд

$$S[g](x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)x)$$

і

$$S[h](x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)x).$$

Отже, для будь-яких $t \in [0,1),\ x \in [-\pi,\pi]$

$$P(g)(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}t^{2k+1}\cos((2k+1)x)$$

і

$$\widetilde{P}(h)(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}t^{2k+1}\cos((2k+1)x).$$

Зокрема

$$P(g)(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}t^{2k+1} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} t \quad \forall\ t \in [0,1) \tag{16}$$

і

$$\widetilde{P}(h)(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}t^{2k+1} = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad \forall\ t \in [0,1). \tag{17}$$

Візьмемо тепер функцію f^*, для якої

$$f_\beta^{*\psi}(x) := \begin{cases} \cos\dfrac{\beta\pi}{2}\ g(x), & \beta - \text{парне}, \\[2ex] \sin\dfrac{\beta\pi}{2}\ h(x), & \beta - \text{непарне}. \end{cases}$$

Тоді згідно з (14),(16) і (17) для функції f^* мають місце рівності

$$f^*(0) - U_{\lambda,\varrho}(f^*)(0) = \begin{cases} \displaystyle\int_\varrho^1 P(g)(0,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{парне}, \\ \displaystyle\int_\varrho^1 \widetilde{P}(h)(0,t)\frac{d\lambda(t)}{t}, & \beta - \text{непарне}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\frac{4}{\pi}\int_\varrho^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} d\lambda(t), & \beta - \text{парне}, \\ \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_\varrho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t} d\lambda(t), & \beta - \text{непарне}, \end{cases} \quad \forall\ \varrho \in [0,1).$$

Отже,

$$\mathscr{E}(L^\psi_{\beta,\infty}, \Lambda, \varrho)_C \geq f^*(0) - U_{\lambda,\varrho}(f^*)(0) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\frac{4}{\pi}\int_\varrho^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} d\lambda(t), & \beta - \text{парне}, \\ \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_\varrho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t} d\lambda(t), & \beta - \text{непарне}, \end{cases} \quad \forall\ \varrho \in [0,1),$$

що в поєднанні з (15) і доводить рівності (3) і (5).

2. Розглянемо тепер аналогічні питання для класів функцій, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини.

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ і $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ — множина усіх функцій голоморфних в крузі $\mathbb{D}$.

Простір Гарді H_p, $p \geq 1$, — це множина усіх функцій $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<\varrho<1} M_p(f)(\varrho) < \infty,$$

де

$$M_p(f)(\varrho) := \begin{cases} \displaystyle\left(\int_\mathbb{T} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w)\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|z|=\varrho} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

і σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Нехай $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді ряд Тейлора функції $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ можна записати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \ z \in \mathbb{D}.$$

Позначимо

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\varrho)\widehat{f}_k z^k, \quad \varrho \in [0,1], \ z \in \mathbb{D},$$

припустивши при цьому, що функції $\lambda_k(\cdot)$ є такими, що ряд в правій частині має радіус збіжності не менше одиниці.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел відмінних від нуля. Якщо для даної функції $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{k+m}}{\psi_k} z^k$$

збігається в крузі $\mathbb{D}$, то його суму назвемо ψ–похідною порядку m функції f і позначимо $f^{\psi,m}$. Зауважимо, що дане поняття ψ–похідної порядку m можна тлумачити і як похідну Гельфонда –Леонтьєва [5, с. 60] і як похідну в розумінні Степанця.

Для функціонального класу

$$H_p^{\psi,m} := \Big\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f^{\psi,m}\|_{H_p} \le 1 \Big\}$$

знайдемо точні значення величини

$$\mathscr{E}(H_p^{\psi,m}, \Lambda, \varrho)_{H_p} = \sup_{f \in H_p^{\psi,m}} \|f - U_{\varrho,\Lambda}(f)\|_{H_p}, \quad \varrho \in [0,1),$$

в якій $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}$ — послідовність функцій вигляду

$$\lambda_k(\varrho) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \dfrac{1}{\psi_{k-m}} \displaystyle\int_0^{\varrho} t^{k-m} d\lambda(t), & k = m, m+1, \ldots, \end{cases} \qquad \varrho \in [0,1]. \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k = \int_0^1 t^k d\lambda(t), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{19}$$

де λ *— функція така, як в теоремі 1 і* $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду (18). Тоді*

$$\mathscr{E}(H_p^{\psi,m}, \Lambda, \varrho)_{H_p} = \int_{\varrho}^1 d\lambda(t) = (1 - \lambda_m(\varrho))\psi_0 \quad \forall\ \varrho \in [0, 1). \tag{20}$$

Доведення. Нехай f — будь-яка функція з $H_p^{\psi,m}$. Тоді з урахуванням (19) на основі розвинення в ряд Тейлора, справджується рівність

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}_k z^k + z^m \int_0^1 f^{\psi,m}(zt) d\lambda(t) \quad \forall\ z \in \mathbb{D},$$

і

$$U_{\Lambda,\varrho}(f)(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}_k z^k + z^m \int_0^{\varrho} f^{\psi,m}(zt) d\lambda(t) \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$f(z) - U_{\Lambda^*,\varrho}(f)(z) = z^m \int_{\varrho}^1 f^{\psi,m}(zt) d\lambda(t) \quad \forall\ \varrho \in [0, 1].$$

Звідси за інтегральною нерівністю Мінковського одержимо співвідношення

$$M_p\left(f - U_{\Lambda,\varrho}(f)\right)(R) \le R^m \int_{\varrho}^1 M_p\left(f^{\psi,m}\right)(Rt) d\lambda(t) \tag{21}$$

$$\le R^m \int_{\varrho}^1 d\lambda(t), \quad R = |z|.$$

Отже,

$$\sup_{f \in H_p^{\psi,m}} M_p\left(f - U_{\Lambda^*,\varrho}(f)\right)(R) \le R^m \int_{\varrho}^1 d\lambda(t). \tag{22}$$

Легко бачити, що для будь-якої функції вигляду

$$f^*(z) = \psi_0 e^{i\alpha} z^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k,$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$ і a_k — довільні комплексні числа, справджується рівність

$$M_p\left(f^* - U_{\Lambda,\varrho}(f^*)\right)(R) = R^m \int_\varrho^1 d\lambda(t).$$

Тому співвідношення (22), насправді, є рівністю. Тепер, спрямувавши R до 1, одержимо (20).

3. Наведемо деякі приклади, якими частково проілюструємо історію задач, розглянутих у цій роботі.

Нехай $r \in \mathbb{N}$, W^r — клас 2π–періодичних функцій, у яких існують r похідних, серед яких похідні до $r-1$–го порядку включно є абсолютно неперервними, а $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{(r)}(x)| \le 1$ і $\overline{W}^r$ — клас функцій, спряжених до функцій класу W^r.

Виберемо функцію λ так, щоб

$$d\lambda(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt.$$

Тоді в теоремі 1

$$\psi_k = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 t^{k-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt = \frac{1}{k^r}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

і

$$\lambda_k(\varrho) = \frac{k^r}{(r-1)!}\int_0^\varrho t^{k-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt =$$
$$= \varrho^k \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!}\left(k \ln\frac{1}{\varrho}\right)^j, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

При цьому $L^\psi_{r,\infty} = W^r$, $L^\psi_{r-1,\infty} = \overline{W}^r$. Отже, з теореми 1 випливає такий

Наслідок 1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $\Lambda = \{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність функцій вигляду (23). Тоді для будь-якого $\varrho \in [0,1)$*

$$\mathscr{E}(W^r, \Lambda, \varrho)_C = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_{\varrho}^{1} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r - \textit{парне}, \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{\varrho}^{1} \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r - \textit{непарне}, \end{cases}$$

і

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, \Lambda, \varrho)_C =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{\varrho}^{1} \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r - \textit{парне}, \\ \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_{\varrho}^{1} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt, & r - \textit{непарне}, \end{cases} \tag{25}$$

Зокрема, при $\varrho \to 1-$ справджуються асимптотичні рівності

$$\mathscr{E}(W^r, \Lambda, \varrho)_C =$$

$$= \frac{1}{r!} \begin{cases} (1-\varrho)^r + O(1)(1-\varrho)^{r+1}, & r - \textit{парне}, \\ \dfrac{2}{\pi}(1-\varrho)^r \ln \dfrac{1}{1-\varrho} + O(1)(1-\varrho)^r, & r - \textit{непарне}, \end{cases} \tag{26}$$

і

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, \Lambda, \varrho)_C =$$

$$= \frac{1}{r!} \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(1-\varrho)^r \ln \dfrac{1}{1-\varrho} + O(1)(1-\varrho)^r, & r - \textit{парне}, \\ (1-\varrho)^r + O(1)(1-\varrho)^{r+1}, & r - \textit{непарне}. \end{cases} \tag{27}$$

Ці факти випливають з рівностей

$$\int_{\varrho}^{1} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt =$$

$$= \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \varrho \left(\ln \frac{1}{\varrho}\right)^r + \frac{1}{r} \int_\varrho^1 \frac{1}{1+t^2} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^r dt$$

і

$$\int_\varrho^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt =$$

$$= \int_0^{1-\varrho} \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t} \left(\ln \frac{1}{1-t}\right)^{r-1} dt =$$

$$= -\int_0^{1-\varrho} t^{r-1} \left(\ln t + \frac{1}{r}\right) dt +$$

$$+ \int_0^{1-\varrho} \left(\frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t} \left(\left(\ln \frac{1}{1-t}\right)^{r-1} - t^{r-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t^t} + \frac{1}{r}\right) t^{r-1}\right) dt.$$

В загальному випадку, для довільного натурального r, низку апроксимативних властивостей методу наближення, породженого послідовністю функцій вигляду (23) встановлено в [6, с. 286–295]. Там цей метод названо узагальненими середніми Абеля–Пуассона. Співвідношення (24)—(27) для довільного натурального r тут виписані, мабуть, вперше. Якщо ж у наслідку 1 $r = 1$, то $\lambda_k(\varrho) = \varrho^k, k = 1, 2, \ldots$, а функції

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– це середні Абеля–Пуассона функції f. У такому випадку асимтотична рівність (26) вперше отримана в [7], формула (24) в [8], а (25) і (27) в [9].

Зафіксуємо $r \in \mathbb{N}$ і виберемо функцію λ так, щоб

$$d\lambda(t) = \frac{1}{(r-1)!} (1-t)^{r-1} dt.$$

Тоді, поклавши в теоремі 2 $m = r$, отримаємо

$$\psi_k = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 t^k (1-t)^{r-1} dt = \frac{k!}{(k+r)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

і

$$\lambda_k(\varrho)=\begin{cases}1, & k=0,1,\ldots,r-1,\\ \dfrac{k!}{(r-1)!(k-r)!}\displaystyle\int_0^{\varrho}t^{k-r}(1-t)^{r-1}dt, & k=r,r+1,\ldots,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1, & k=0,1,\ldots,r-1,\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}\binom{k}{j}(1-\varrho)^j\varrho^{k-j}, & k=r,r+1,\ldots,\end{cases}\quad \varrho\in[0,1]. \qquad (28)$$

При цьому

$$H_p^{\psi}=H_p^r:=\left\{f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}):\|f^{(r)}\|_{H_p}\le 1\right\}.$$

Отже, з теореми 2 випливає такий

Наслідок 2. *Нехай* $1\le p\le\infty$, $r\in\mathbb{N}$ *і* $\Lambda=\{\lambda_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовність функцій вигляду (28). Тоді*

$$\mathscr{E}(H_p^r,\Lambda,\varrho)_{H_p}=\frac{1}{r!}(1-\varrho)^r\quad\forall\ \varrho\in[0,1). \qquad (29)$$

Метод наближення, що породжується послідовність функцій вигляду (28) для довільного натурального r вперше розглядався в [10], де він названий середніми Тейлора–Абеля–Пуассона. Там само й отримано рівність (29). Апроксимативні властивості середніх Тейлора–Абеля–Пуассона для функцій багатьох змінних досліджувалися в [11]. У випадку, коли $r=1$ маємо $\lambda_k(\varrho)=\varrho^k$ і

$$U_{\varrho,\Lambda}(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k\widehat{f}_k z^k,$$

тобто $U_{\varrho,\Lambda}(f)$ — це сума Абеля–Пуассона голоморфної функції f. У такому випадку рівність (29) можна знайти в [12].

Автор висловлює подяку рецензентові за корисні зауваження і за запропонований спосіб обґрунтування сумовності функції $D_{\psi,\beta}$.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — ч. I. — 427 с.
2. *Тверитин А. Н.* Применение теории моментов к теории тригонометрических рядов// Докл. АН СССР. –1948. — **61**, № 6.– С. 985 – 988.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.
4. *Koebe P.* Über das Schwarzssche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie // Math. Z. — 1920. — **6**. — P. 52 – 84.
5. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонет. — М.: Наука, 1981. – 320 с.
6. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. — Л.: Из-во Ленинград. ун–та. 1982. — 368 с.
7. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной 2π — периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1. — С. 11 – 14.
8. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. –1950.–**74**, № 1.– С. 17 – 20.
9. *Sz-Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Hungar. — 1950. — **1.** — P. 183 — 188.
10. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора–Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 9. — С. 1253 – 1260.
11. *Савчук В. В., Шидліч А. Л.* Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p. // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. Т.4, № 1 — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 302 – 317.
12. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. — 1931. — V.34. — P. 403–439.