Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 297-308

УДК 517.5

В. І. Рукасов, С. О. Чайченко (Слов'янський держ. пед. ун-т)

НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ ФУР'Є НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ, ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

Для точних верхніх меж відхилень операторов Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ в метриці просторів $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, знаходяться оцінки зверху, які на певних підмножинах функцій є точними.

Нехай $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \ge 0$ функція, для якої майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\, dv, \qquad (1)$$

в якому β — фіксоване дійсне число.

Нехай, далі, $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$ — множина функцій φ, заданих на дійсній оси $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Тоді через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 168], позначають множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ подаються згорткою

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t)\, dt, \qquad (2)$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границя інтегралу по симетричним проміжкам, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}_1$, то покладають

© В. І. Рукасов, С. О. Чайченко, 2008

$f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (2) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і для неї використовують позначення $\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. У той же час, функцію $f(\cdot)$ називають (ψ,β)-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi;\cdot)$.

У роботі [1, с. 169] встановлено зв'язок між множинами $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і відповідними множинами 2π-періодичних функцій L^{ψ}_{β}, раніше введеними О.І. Степанцем (див., наприклад, роботу [2, с. 131]). Зокрема, показано, що якщо функція $\psi(v)$ неперервна при всіх $v \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, перетворення $\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_{\beta}(t)$ вигляду (1) є сумовним на всій дійсній осі, то

$$\widehat{L}^{\psi}_{\beta}L^0_1 = \widehat{L}^{\psi}_{\beta}, \qquad \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L^0_1,$$

де L^0_1 — множина 2π-періодичних сумовних на періоді функцій φ, для яких

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\ dt = 0.$$

За наближаючі агрегати для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо використовувати оператори спеціального вигляду, означені в роботі [1, с. 176] таким чином

$$F^*_{\sigma}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma}}\right)(t;\beta)\ dt, \tag{3}$$

де $\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma}}\right)(t;\beta)$ — перетворення вигляду (1) добутку $\psi(v)\lambda_{\sigma}(v)$, у якому

$$\lambda_{\sigma}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq \sigma - 1, \\ 1 - (v - \sigma + 1)\frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & \sigma - 1 \leq v \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v. \end{cases}$$

Як показано в [1, с. 181], якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, де $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ — підмножина 2π-періодичних функцій з $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, функція $\psi(v)$ є неперервною при всіх $v \geq 0$, її перетворення $\widehat{\psi}(t)$ вигляду (1) є сумовним на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ і $\sigma - 1 \in [n-1; n)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$F^*_{\sigma}(f;x) = S_{n-1}(f;x),$$

де $S_{n-1}(f;x)$ — частинна сума порядку $n-1$ ряду Фур'є функції $f(\cdot)$. У зв'язку з цим оператори $F_\sigma^*(f;x)$ називають операторами Фур'є.

У цій роботі викладено результати стосовно оцінок норм величин

$$\rho_\sigma(f;x) = f(x) - F_\sigma^*(f;x), \quad f \in \widehat{L}_\beta^\psi, \tag{4}$$

у просторах $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, у випадку, коли функції ψ належать до множини $\mathcal{D}_\alpha$, яка означається наступним чином.

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад [1, с. 193]), позначимо через $\mathfrak{M}$ множину опуклих донизу при всіх $v \ge 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0;1)$ так, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \ge 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0;\infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Нехай, далі, $\mathfrak{A}^*$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ у яких, починаючи з деякого v_0, існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$. Тоді покладемо

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{\psi \in \mathfrak{A}^* : \quad \lim_{v\to\infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha, \ \alpha > 0\right\}. \tag{5}$$

Зазначимо, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то внаслідок правила Лопіталя

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\psi'(v)}{\psi(v)} = \lim_{v\to\infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha, \ \alpha > 0. \tag{6}$$

Зазначимо також, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то послідовність $\psi_k = \psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, є елементом множини D_q з роботи [3]:

$$D_q = \left\{\psi_k : \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q = e^{-\alpha}, \ \alpha > 0\right\}.$$

Дійсно, використовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтегралу і враховуючи співвідношення (6), знаходимо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} \frac{\psi'(v)}{\psi(v)}\, dv} = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{\psi'(v+k)}{\psi(v+k)}\, dv} = e^{-\alpha} = q.$$

У роботі [3] було встановлено, що задачі про отримання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}; S_n)_p = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}} ||f(x) - S_n(f;x)||_p, \quad 1 \le p \le \infty, \ \psi \in D_q, \quad (7)$$

можуть бути зведеними до аналогічних задач для величин $\mathcal{E}(L^{q}_{\beta}\mathfrak{N}; S_n)_p$, де $L^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$ — множини інтегралів Пуассона (див., наприклад, роботу [2, с. 301]). Скориставшись відомими результатами для величин верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона [4 – 5], в ряді важливих випадків для величини (7) були знайдені асимптотичні рівності. У цій роботі результати роботи [3] розповсюджуються з періодичного випадку на випадок наближення операторами $F^{*}_{\sigma}(t)$ класів $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$. При цьому, для отримання асимптотичних формул використовуються результати роботи [6], де вивчались апроксимаційні властивості операторів $F^{*}_{\sigma}(t)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ у випадку, коли

$$\psi(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0;1), \\ e^{-\alpha v}, & v \ge 1, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$ — довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi_1'(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$, і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$ і $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$. В цьому випадку множини $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ позначаються $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$, а $(\psi;\beta)$-похідна і $(\psi;\beta)$-інтеграл — f^{α}_{β} і $\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta}$ відповідно.

Спочатку доведемо твердження, яке має допоміжний характер і є неперервним аналогом леми 1 з роботи [3].

Лема 1. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$. Тоді для довільного числа $\sigma > 0$ виконується рівність*

$$\int_{\sigma}^{\infty}\psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})dv=\psi(\sigma)\Big[e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{\infty}e^{-\alpha v}\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})dv+r_{\sigma}(t)\Big], \quad (8)$$

причому, для величини $r_{\sigma}(t) = r_{\sigma}(\psi;\alpha;\beta;t)$, починаючи з деякого σ_0, справедливі оцінки

$$|r_{\sigma}(t)| \le \frac{\varepsilon_{\sigma}}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{\sigma})}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{1}{t^2}\frac{(2\alpha+1)\varepsilon_\sigma}{\alpha-\varepsilon_\sigma}, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

де

$$\varepsilon_\sigma = \max\{\varepsilon_\sigma^{(1)}, \varepsilon_\sigma^{(2)}\},\ \ \varepsilon_\sigma^{(1)} = \sup_{t\ge\sigma}\Big|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}+\alpha\Big|,\ \ \varepsilon_\sigma^{(2)} = \sup_{t\ge\sigma}\Big|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}-\alpha^2\Big|. \tag{11}$$

Доведення. Маємо

$$\int\limits_\sigma^\infty \psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\ dv = \int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\ dv =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\ dv + r_\sigma(t)\Big),$$

де

$$r_\sigma(t) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big)\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\ dv. \tag{12}$$

Покажемо тепер, що виконується нерівність (9). Маємо

$$|r_\sigma(t)| \le \int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big|\ dv. \tag{13}$$

Якщо $\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} \ge e^{-\alpha v}$, то

$$\Big|\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big| = \frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v} =$$

$$= e^{\int\limits_\sigma^{\sigma+v}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ dx} - e^{-\alpha v} \le e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} < e^{-\alpha v}$, то беручи до уваги опуклість функції $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\Big|\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big| = e^{-\alpha v} - \frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} = e^{-\alpha v} - e^{\int\limits_\sigma^{\sigma+v}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ dx} \le$$

$$\leq e^{-\alpha v} - e^{(-\alpha-\varepsilon_\sigma^{(1)})v} \leq e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Отже, завжди

$$\Big|\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big| \leq e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - e^{-\alpha v}. \tag{14}$$

Внаслідок співвідношень (5) і (11) величина $\varepsilon_\sigma^{(1)} > 0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого σ_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_\sigma^{(1)} < 0$. Тому, враховуючи оцінки (13) і (14), знаходимо

$$|r_\sigma(t)| \leq \int\limits_0^\infty (e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - e^{-\alpha v})\ dv = \frac{\varepsilon_\sigma^{(1)}}{\alpha(\alpha - \varepsilon_\sigma^{(1)})},$$

і, оскільки $\varepsilon_\sigma^{(1)} < \varepsilon_\sigma$, то нерівність (9) виконується.

Переконаємося нарешті у справедливості нерівності (10). Двічі інтегруючи частинами, отримуємо

$$r_\sigma(t) = \frac{1}{t^2}\Big(\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)} + \alpha\Big)\cos(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \Big(\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big)\cos((v+\sigma)t + \frac{\beta\pi}{2})\ dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^2}\Big|\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)} + \alpha\Big| + \frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big|\ dv. \tag{15}$$

Оскільки $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \alpha^2$. Дійсно, враховуючи (6), знаходимо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \alpha^2. \tag{16}$$

Розглянемо тепер другий доданок із правої частини співвідношення (15). Якщо $\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} \geq \alpha^2 e^{-\alpha v}$, то беручи до уваги (11), одержуємо

$$\Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big| = \frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v} =$$

$$= \frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma+v)} e^{\int\limits_{\sigma}^{\sigma+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \le (\alpha^2 + \varepsilon_\sigma^{(2)}) e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - \alpha^2 e^{-\alpha v} \le$$

$$\le (\alpha^2 + \varepsilon_\sigma) e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} < \alpha^2 e^{-\alpha v}$, то, враховуючи опуклість функції $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big| = \alpha^2 e^{-\alpha v} - \frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} =$$

$$= \alpha^2 e^{-\alpha v} - \frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma+v)} e^{\int\limits_{\sigma}^{\sigma+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx} \le \alpha^2 e^{-\alpha v} - (\alpha^2 - \varepsilon_\sigma^{(2)}) e^{(-\alpha-\varepsilon_\sigma^{(1)})v} \le$$

$$\le \alpha^2 (e^{-\alpha v} - e^{(-\alpha-\varepsilon_\sigma^{(1)})v}) + \varepsilon_\sigma^{(2)} e^{(-\alpha-\varepsilon_\sigma^{(1)})v} \le (\alpha^2 + \varepsilon_\sigma) e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}.$$

Отже, завжди

$$\Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big| \le (\alpha^2 + \varepsilon_\sigma) e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}. \qquad (17)$$

Внаслідок співвідношень (6), (11) і (16) величина $\varepsilon_\sigma > 0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого σ_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_\sigma < 0$. Беручи до уваги співвідношення (17), отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big|\, dv \le \int\limits_0^\infty [(\alpha^2 + \varepsilon_\sigma) e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}]\, dv =$$

$$= -\frac{\alpha^2 + \varepsilon_\sigma}{-\alpha + \varepsilon_\sigma} - \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha - \varepsilon_\sigma} \varepsilon_\sigma. \qquad (18)$$

Зіставляючи тепер співвідношення (15) і (18), переконуємося, що, починаючи з деякого σ_0, виконується оцінка (10). Лема доведена.

У наступному твердженні за допомогою леми 1 встановлюється зв'язок між нормами у просторах $\widehat{L}_p$ величин $\rho_\sigma(f;\cdot)$, $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{L}_p$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, означених у співвідношенні (4), і величин $\rho_\sigma(\mathcal{J}^\alpha_\beta(f^\psi_\beta);\cdot)$.

Нехай

$$E_\sigma(\varphi)_{\widehat{p}} = \inf_{u \in W^2_\sigma} \|\varphi(\cdot) - u(\cdot)\|_{\widehat{p}}, \quad W^2_\sigma = \Big\{ u \in \mathcal{E}_\sigma : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{1+t^2}\, dt < \infty \Big\},$$

де $\mathcal{E}_\sigma$ — множина цілих функцій експоненціального типу, що не перевищує σ. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ *і величина* ε_σ *означена у співвідношеннях (11). Тоді для довільної функції* $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{L}_p$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\|\rho_\sigma(f;\cdot)\|_{\hat{p}} = \psi(\sigma)\Big[e^{\alpha\sigma} \|\rho_\sigma(\mathcal{J}^\alpha_\beta(f^\psi_\beta);\cdot)\|_{\hat{p}} + \\ + O(1) \frac{(2\alpha^2+\alpha+2)\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)} E_{\sigma-1}(f^\psi_\beta)_{\hat{p}} \Big], \tag{19}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* σ, p, α, ψ *і* β.

Доведення. Нехай $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$. Зі співвідношень (2) і (3) випливає, що майже скрізь

$$\rho_\sigma(f;\cdot) = f(x) - F^*_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x-t)\widehat{d}_\sigma(t)\, dt, \tag{20}$$

де

$$\widehat{d}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d_\sigma(v)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\, dv,$$

$$d_\sigma(v) = (1-\lambda_\sigma(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \sigma-1, \\ (v-\sigma+1)\psi(\sigma), & \sigma-1 < v < \sigma, \\ \psi(v), & \sigma \le v. \end{cases}$$

Оскільки для довільної функції $\varphi \in W^2_\tau$, $\tau \le \sigma - 1$ виконується співвідношення (див. [1, с. 186])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\widehat{d}_\sigma(t) \equiv 0,$$

то, покладаючи $h(x-t) = f^{\psi}_{\beta}(x-t) - \varphi(x-t)$, $\forall \varphi \in W^2_{\tau}$, $\tau \le \sigma - 1$, співвідношення (19) запишемо у вигляді

$$\rho_\sigma(f;\cdot) = f(x) - F^*_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{d}_\sigma(t)\ dt. \tag{21}$$

Нехай тепер

$$\widehat{q}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} q_\sigma(v)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\ dv,$$

$$q_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \sigma - 1, \\ (v - \sigma + 1)e^{-\alpha\sigma}, & \sigma - 1 < v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \le v. \end{cases}$$

На підставі співвідношень (8) і (21) отримуємо, що майже для всіх x

$$\rho_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\Big[e^{\alpha\sigma}\widehat{q}_\sigma(t) + r_\sigma(t)\Big]h(x-t)\ dt =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{q}_\sigma(t)\ dt + R_\sigma(f;x)\Big) =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma}\rho_\sigma(\mathcal{J}^{\alpha}_{\beta};x) + R_\sigma(f;x)\Big), \tag{22}$$

де

$$R_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t) r_\sigma(t)\ dt,$$

а функція $r_\sigma(t)$ визначається формулою (12).

Застосовуючи нерівність Мінковського, отримуємо

$$\|R_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}}(\int\limits_a^{a+2\pi} |\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t) r_\sigma(t)\ dt|^p\ dx)^{1/p} \le$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_\sigma(t)| \sup_{a\in\mathbb{R}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(x+a-t)|^p \ dx\Big)^{1/p} \ dt = \|h\|_{\hat{p}}\|r_\sigma\|_1,$$

де

$$\|h\|_{\hat{p}} = \|f_\beta^\psi - \varphi\|_{\hat{p}}, \quad \|r_\sigma\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_\sigma(t)| \ dt.$$

Розглядаючи тепер нижню грань при $\varphi \in W^2_{\sigma-1}$, одержуємо

$$\|R_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} \leq E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}\|r_\sigma\|_1. \tag{23}$$

Використовуючи співвідношення (9) і (10), знаходимо

$$\|r_\sigma\|_1 = \int\limits_{|t|\leq 1} |r_\sigma(t)| \ dt + \int\limits_{|t|\geq 1} |r_\sigma(t)| \ dt \leq$$

$$\leq \frac{2\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)} + \frac{(2\alpha+1)\varepsilon_\sigma}{\alpha-\varepsilon_\sigma} \leq \frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma, \tag{24}$$

де величина ε_σ визначається співвідношеннями (11).

Зі співвідношень (22)–(24) одержуємо формулу (19). Теорема доведена.

Використовуючи тепер теорему 1 роботи [6, с. 363], з теореми 1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *В умовах теореми 1 для довільної функції* $f \in \widehat{L}^\psi_\beta \widehat{L}_p$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\|\rho_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} \leq \psi(\sigma)\Big(\frac{4}{\pi^2}I(\alpha) + O(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma} + \frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma\Big)\Big)E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}},$$

де

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\Big(\frac{1-\cos t}{t^2} + \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}\Big)^2 + \Big(\frac{t-\sin t}{t^2} - \frac{t}{t^2+\alpha^2}\Big)^2}, \tag{25}$$

а $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* σ, p, α, ψ *і* β. *Для величини* $I(\alpha)$ *мають місце оцінки*

$$\max\{\pi; \ln\frac{\alpha^2+1}{\alpha} - 0,65903\} < I(\alpha) < 3,72695 + \ln\frac{\alpha^2+1}{\alpha}.$$

Нехай

$$\widehat{S}_p = \Big\{ f \in \widehat{L}_p : \quad \|f\|_{\hat{p}} \leq 1 \Big\}, \qquad \widehat{L}^{\psi}_{\beta} \widehat{S}_p = \widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}.$$

Розглядаючи верхні межі обох частин формули (19) по класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ і враховуючи, що

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}; F^*_{\sigma})_{\hat{p}} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}} \|\rho_{\sigma}(f;\cdot)\|_{\hat{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\hat{p}} \leq 1} \|\rho_{\sigma}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi);\cdot)\|_{\hat{p}},$$

отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$ і величина ε_{σ} означена у співвідношеннях (11). Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}; F^*_{\sigma})_{\hat{p}} = \psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma} \mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}; F^*_{\sigma})_{\hat{p}} + O(1) \frac{(2\alpha^2 + \alpha + 2)}{\alpha(\alpha - \varepsilon_{\sigma})} \varepsilon_{\sigma} \Big),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів σ, p, α, ψ і β.

Скориставшись тепер теоремою $1'$ роботи [6, с. 364], з теореми 2 одержуємо наслідок.

Наслідок 2. *Для довільного класу $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$, $\beta \in \mathbb{R}, p \in [1;\infty)$ при $\sigma \to \infty$ виконується співвідношення*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}; F^*_{\sigma})_{\hat{p}} \leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2} \Big(I(\alpha) + O(1) \Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma} + \frac{2\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha(\alpha - \varepsilon_{\sigma})} \varepsilon_{\sigma} \Big] \Big),$$

яке при $p = \infty$ перетворюється у рівність

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,\infty}; F^*_{\sigma})_{\widehat{\infty}} = \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2} \Big(I(\alpha) + O(1) \Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma} + \frac{2\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha(\alpha - \varepsilon_{\sigma})} \varepsilon_{\sigma} \Big] \Big),$$

де величина $I(\alpha)$ визначається співвідношенням (25), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів σ, p, α, ψ і β.

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

2. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.I. — 427 с.

3. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — **52,** № 3. — С. 375 – 395.

4. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10,** № 3. — С. 207 – 256.

5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145.** — С. 126 – 151.

6. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — Т.1, № 1. С. 361 – 375.