Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 286-296

УДК 517.5

В.И. Рукасов, О.А. Новиков, О.Г. Ровенская
(Славян. гос. пед. ун-т, Славянск)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Получены ассимптотические равенства для уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах $\overline{\psi}$-интегралов функций двух переменных.

Следуя работе [1] (см. также [2, 3]), классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных, позволяющие учитывать поотдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^2 — евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $T^2 = [-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$ — квадрат со стороной 2π,

$$N^2 = \big\{\vec{x} \in R^2 \ \mid \ x_i \in N, \ \ i = 1, 2\big\},$$

$$N_*^2 = \big\{\vec{x} \in R^2 \ \mid \ x_i \in N_* = N \cup \{0\}, \ \ i = 1, 2\big\},$$

$$N_i^2 = \big\{\vec{x} \in R^2 \ \mid \ x_i \in N, \ \ x_j \in N_*, \ \ i \neq j\big\},$$

$$E^2 = \big\{\vec{x} \in R^2 \ \mid \ x_i \in \{0; 1\}, \ \ i = 1, 2\big\}.$$

Через $L(T^2)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на квадрате T^2 функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$.

Пусть $f \in L(T^2)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f(x_1, x_2) \cos\Big(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\Big) \cos\Big(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\Big) dx_1 dx_2.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$, являются коэффициентами Фурье функции $f(\vec{x})$ [1, с. 546].

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^2$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \cos\Big(k_1 x_1 - \frac{s_1 \pi}{2}\Big) \cos\Big(k_2 x_2 - \frac{s_2 \pi}{2}\Big)$$

и величины

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\Big(k_1x_1 - (s_1+1)\frac{\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2 - \frac{s_2\pi}{2}\Big),$$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\Big(k_1x_1 - \frac{s_1\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2 - (s_2+1)\frac{\pi}{2}\Big),$$

которые являются гармониками, сопряженными с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ соответственно по переменным x_1 и x_2.

Следуя [1, с. 545], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f \in L(T^2)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$; $j = 1,2$, — две четверки систем чисел, $k \in N_*$.

Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \qquad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия: $\overline{\psi}_i(k) \neq 0, \overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in N_*$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1,2$.

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})]$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной x_i, $i = 1,2$.

Смешанной $\overline{\Psi}$-производной по переменным x_i, $i = 1,2$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}}$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1}\Big).$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1,2$; $j=1,2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ обозначим множество непрерывных функций $f\in L(T^2)$, имеющих почти везде ограниченные в смысле плоской меры $\overline{\Psi}$- и $\overline{\psi}_i$-, $i=1,2$, производные:

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})|\leq 1,\ \ \operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\leq 1,\ \ i=1,2,\ \ \vec{x}\in T^2.$$

Изучению аппроксимативных свойств этих классов посвящены работы [1 – 6].

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2$; $j=1,2$, определяющих класс $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^*, $i=1,2$, такие, что

$$\psi_{i1}(k)=\psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2};\ \ \psi_{i2}(k)=\psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2};$$

$$\Psi_{i1}(k)=\Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2};\Psi_{i2}(k)=\Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},i=1,2;j=1,2,$$

то (см. [2]) $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ является классом (ψ,β)-дифференцируемых функций двух переменных, который был введен в работе [3] (см. также [1]). Будем обозначать такие классы $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$. Если, кроме того, для чисел $r>0$, $s>0$, $r_1\geq r$, $s_1\geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k)=k^{-r}$, $\Psi_2(k)=k^{-s}$, $\psi_1(k)=k^{-r_1}$, $\psi_2(k)=k^{-s_1}$, $\beta_i=r_i,\beta_i^*=s_i$, то классы $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ совпадают с классами $W^{r,s}_{r_1,s_1}$ [7]. В работе [7] (см. так же [8, 9]), изучены вопросы приближения классов $W^{r,s}_{r_1,s_1}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f;x)=S_{n_1,n_2}(f;\vec{x})=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, взятых по классам $W^{r,s}_{r_1,s_1}$,

$$\mathcal{E}(W^{r,s}_{r_1,s_1};S_{\vec{n}})=\sup_{f\in W^{r,s}_{r_1,s_1}}||f(\cdot)-S_{\vec{n}}(f;\cdot)||_C$$

получено при $n_i\to\infty$, $i=1,2$, асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W^{r,s}_{r_1,s_1};S_{\vec{n}})=\frac{4\ln n_1}{\pi^2n_1^{r_1}}+\frac{4\ln n_2}{\pi^2n_2^{s_1}}+O(1)\left(\frac{\ln n_1\ln n_2}{n_1^rn_2^s}+\frac{1}{n_1^{r_1}}+\frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

В данной работе изучаются вопросы приближения прямоугольными суммами Валле Пуссена

$$V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{p_1p_2}\sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1}\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1} S_{k_1,k_2}(f;\vec{x}),$$
$$\vec{n}\in N^2,\ \ p_i\in N,\ \ p_i<n_i,\ \ i=1,2, \tag{1}$$

классов $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ в случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями

$$\psi_i(x)=e^{-\alpha_i x},\ \ \Psi_i(x)=e^{-\alpha_i^* x},\ \ \alpha_i>0,\ \ \alpha_i^*>0,\ \ i=1,2.$$

По аналогии с классами функций одной переменной будем обозначать такие классы $C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$. При этом естественными в данном случае являются обозначения:

$$f^{\overline{\psi}_i}(x)=f^{\alpha_i}_{\beta_i}(x),\ \ i=1;2,\ \ f^{\overline{\Psi}}(x)=f^{\alpha^*}_{\beta*}(x).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на соответствующих классах функций одной переменной $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ С.М. Никольским в работе [10] было получено при $n\to\infty$ асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};S_n\right)=\frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}+O(1)\frac{q^n}{n},\quad q=e^{-\alpha}, \tag{2}$$

где

$$K(q)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. С.Б. Стечкин [11] этот результат передоказал другим способом, который позволил уточнить в этой формуле остаточный член.

В работе [12] — для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ найдено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}+O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)}+\frac{q^n}{p}\right),\ \ 1<p<n. \tag{3}$$

В работе [13, с. 97] (см. также [14, с. 217]) получена асимптотическая формула, уточняющая остаточный член в равенстве (3):

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}+$$
$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),\quad 1<p<n.$$

В данной работе получена асимптотическая формула, которая является аналогом последнего равенства для класса $C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_i>0$, $\alpha_i^*>0$, $q_i=e^{-\alpha_i}$, $Q_i=e^{-\alpha_i^*}$, $\beta_i\in R$, $\beta_i^*\in R$, $p_i\in N$, $1<p_i<n_i$; $i=1;2$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2$, *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{2\alpha}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}})=\sup_{f\in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}}||f(\cdot)-V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\cdot)||_C=$$
$$=\frac{4q_1^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1(1-q_1^2)}+\frac{4q_2^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2(1-q_2^2)}+$$
$$+O(1)\left(\sum_{i=1;2}\left[\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)(1-q_i)^3}+\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right]+\frac{Q_1^{n_1-p_1+1}Q_2^{n_2-p_2+1}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Понятно, что

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1}\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1}\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где

$$\rho_{\vec{k}}(f;\vec{x})=f(\vec{x})-S_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Воспользуемся обозначениями

$$q_i=e^{-\alpha_i},\ \ Q_i=e^{-\alpha_i^*}.$$

В работе [6] показано, что

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=$$
$$=\frac{q_1^{n_1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\alpha_1}_{\beta_1}\left(\vec{x}+t_1\vec{e}_1\right)h^{\beta_1}_{n_1}(t)dt_1+\frac{q_2^{n_2}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\alpha_2}_{\beta_2}\left(\vec{x}+t_2\vec{e}_2\right)h^{\beta_2}_{n_2}(t)dt_2-$$

$$-\frac{Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta^*}^{\alpha*}\left(\vec{x}+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2\right)H_{n_1}^{\beta_1^*}(t_1)H_{n_2}^{\beta_2^*}(t_2)dt_1dt_2, \qquad (5)$$

где

$$h_{n_i}^{\beta_i}(t)=\left[\cos\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)-q_i\cos\left((n_i-1)t+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right](1-2q_i\cos t+q_i^2)^{-1},$$

$$H_{n_i}^{\beta_i^*}(t)=\left[\cos\left(n_it+\frac{\beta_i^*\pi}{2}\right)-Q_i\cos\left((n_i-1)t+\frac{\beta_i^*\pi}{2}\right)\right](1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^{-1}. \qquad (6)$$

Значит,

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n_1-p_1}^{n_1-1}\frac{q_1^k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_1}^{\alpha_1}\left(\vec{x}+t\vec{e}_1\right)h_k^{\beta_1}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{p_2}\sum_{k=n_2-p_2}^{n_2-1}\frac{q_2^k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_2}^{\alpha_2}\left(\vec{x}+t\vec{e}_2\right)h_k^{\beta_2}(t)dt-$$

$$-\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1}\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1}\frac{Q_1^{k_1}Q_2^{k_2}}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta^*}^{\alpha*}\left(\vec{x}+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2\right)\times$$

$$\times H_{k_1}^{\beta_1^*}(t_1)H_{k_2}^{\beta_2^*}(t_2)dt_1dt_2. \qquad (7)$$

Используя рассуждения работы [12, с. 230 — 5], можно показать, что при $i=1;2$ справедливы соотношения:

$$\frac{1}{p_i}\sum_{k=n_i-p_i}^{n_i-1}\frac{q_i^k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)h_k^{\beta_i}(t)dt=$$

$$=\frac{q_i^{n_i}}{p_i\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)b_{n_i;i}^{\beta_i}(t)dt-\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}+t\vec{e}_i)b_{n_i-p_i+1;i}^{\beta_i}(t)dt, \qquad (8)$$

где

$$b_{n;i}^{\beta}(t)=\frac{1-2q_i\cos t+q_i^2\cos 2t}{(1-2q_i\cos t+q_i^2)^2}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{q_i^2\sin 2t-2q_i\sin t}{(1-2q_i\cos t+q_i^2)^2}\sin\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{9}$$

Так как для $f\in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$ выполняются условия:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2}|f^{\alpha_1}_{\beta_1}(\vec{x})|\le 1,\quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2}|f^{\alpha_2}_{\beta_2}(\vec{x})|\le 1,\quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2}|f^{\alpha^*}_{\beta^*}(\vec{x})|\le 1,$$

то

$$\mathcal{E}(C^{2\alpha}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}})=\sup_{f\in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}}||\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})||_C\le$$

$$\le\frac{q_1^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_1}_{n_1-p_1+1;1}(t)|dt+\frac{q_2^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_2}_{n_2-p_2+1;2}(t)|dt+$$

$$+O(1)\Bigg(\frac{q_1^{n_1}}{\pi p_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_1}_{n_1;1}(t)|dt+\frac{q_2^{n_2}}{\pi p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_2}_{n_2;2}(t)|dt+$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1}Q_1^{k_1}|H^{\beta_1^*}_{n_1}(t_1)|\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1}Q_2^{k_2}|H^{\beta_2^*}_{n_2}(t_2)|dt_1dt_2\Bigg). \tag{10}$$

Используя рассуждения работы [12, с. 230–235], можно показать, что справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1}Q_1^{k_1}|H^{\beta_1^*}_{n_1}(t_1)|\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1}Q_2^{k_2}|H^{\beta_2^*}_{n_2}(t_2)|dt_1dt_2=$$

$$=O(1)\left(Q_1^{n_1-p_1+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta_1^*}_{n_1-p_1+1;1}(t)|dt+Q_1^{n_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta_1^*}_{n_1;1}(t)|dt\right)\times$$

$$\times\left(Q_2^{n_2-p_2+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta_2^*}_{n_2-p_2+1;2}(t)|dt+Q_2^{n_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^{\beta_2^*}_{n_2;2}(t)|dt\right),$$

где

$$B^{\beta}_{n;i}(t)=\frac{1-2Q_i\cos t+Q_i^2\cos 2t}{(1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^2}\cos\Big(nt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+\frac{Q_i^2 \sin 2t - 2Q_i \sin t}{(1-2Q_i \cos t + Q_i^2)^2} \sin\Big(nt + \frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{11}$$

Повторяя рассуждения работы [14, с. 220–245], можно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta}_{n-p+1;i}(t)|dt = \frac{4}{1-q_i^2} + O(1)\frac{1}{(n-p)(1-q_i)^3};$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta}_{n;i}(t)|dt = O(1)\frac{1}{1-q_i^2}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta}_{n;i}(t)|dt = O(1)\frac{1}{1-Q_i^2}. \tag{12}$$

Поэтому

$$\frac{q_1^{n_1}}{\pi p_1}\int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_1}_{n_1;1}(t)|dt + \frac{q_2^{n_2}}{\pi p_2}\int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_2}_{n_2;2}(t)|dt +$$

$$+\frac{1}{p_1p_2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1=n_1-p_1}^{n_1-1} Q_1^{k_1}|H^{\beta_1^*}_{n_1}(t_1)| \sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1} Q_2^{k_2}|H^{\beta_2^*}_{n_2}(t_2)|dt_1dt_2 =$$

$$= O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{p_1(1-q_1^2)} + \frac{q_2^{n_2}}{p_2(1-q_2^2)} + \frac{Q_1^{n_1-p_1}Q_2^{n_2-p_2}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right).$$

Следовательно,

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) = \frac{q^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_1}_{\beta_1}(\vec{x}+t\vec{e}_1)\, b^{\beta_1}_{n_1-p_1+1;1}(t)dt +$$

$$+\frac{q^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_2}_{\beta_2}(\vec{x}+t\vec{e}_2)\, b^{\beta_2}_{n_2-p_2+1;2}(t)dt +$$

$$+O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{p_1(1-q_1^2)} + \frac{q_2^{n_2}}{p_2(1-q_2^2)} + \frac{Q_1^{n_1-p_1+1}Q_2^{n_2-p_2+1}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right). \tag{13}$$

Найдем функцию $f_0 \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$, для которой справедливо соотношение

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f_0;\vec{0}) =$$

$$= \frac{q_1^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_1}_{n_1-p_1+1;1}(t)|dt + \frac{q_2^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_2}_{n_2-p_2+1;2}(t)|dt+$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1;2}\left[\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)}+\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right]+\frac{Q_1^{n_1-p_1+1}Q_2^{n_2-p_2+1}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right). \tag{14}$$

На основании соотношения (13), для любой $f \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$ можем записать

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{0}) = \frac{q_1^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_1}_{\beta_1}\left(\vec{0}+t\vec{e}_1\right)b^{\beta_1}_{n_1-p_1+1;1}(t)dt+$$

$$+\frac{q_2^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_2}_{\beta_2}\left(\vec{0}+t\vec{e}_2\right)b^{\beta_2}_{n_2-p_2+1;2}(t)dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{p_1(1-q_1^2)}+\frac{q_2^{n_2}}{p_2(1-q_2^2)}+\frac{Q_1^{n_1-p_1+1}Q_2^{n_2-p_2+1}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right). \tag{15}$$

В работе [12, с. 236–237] показано, что функции

$$y_i^*(t) = \mathrm{sign} b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1;i}(t), \ \ i=1,2,$$

можно переопределить каждую на своем множестве, мера которого меньше $K(n_i-p_i)^{-1}$, где K — некоторое фиксированное число, так чтобы полученные функции $y_i(t)$ удовлетворяли условиям:

$$|y_i(t)| \le 1, \ \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t)dt = 0.$$

Далее, построим функции $\varphi_i(t_1;t_2) = y_i(t_i)$, $\vec{t}\in T^2$, и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $(f_i)^{\alpha_i}_{\beta_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$. Повторяя рассуждения работы [4, с. 265], можно показать, что функция $f_0(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})$ удовлетворяет условию

$$(f_0)^{\alpha_i}_{\beta_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x}), \ \ i=1;2.$$

Поэтому $f_0 \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$ и на промежутке $[-\pi;\pi]$ кроме множества точек, мера которого меньше $K(n_i-p_i)^{-1}$, выполняется условие

$$(f_0)^{\alpha_i}_{\beta_i}(\vec{0}+t\vec{e}_i)=\mathrm{sign} b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1;i}(t), \quad i=1;2.$$

Следовательно, для $i=1;2$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0)^{\alpha_i}_{\beta_i}\left(\vec{0}+t\vec{e}_i\right)b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1;i}(t)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i+1;i}(t)|dt+O(1)\frac{1}{n_i-p_i}.$$

Поэтому на основании соотношения (15) можем сделать вывод о том, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (14).

Сопоставляя соотношения (10) и (14), получаем

$$\mathcal{E}(C^{2\alpha}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}})=$$

$$=\frac{q_1^{n_1-p_1+1}}{\pi p_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_1}_{n_1-p_1+1;1}(t)|dt+\frac{q_2^{n_2-p_2+1}}{\pi p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_2}_{n_2-p_2+1;2}(t)|dt+$$

$$+O(1)\left(\sum_{i=1;2}\left[\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)}+\frac{q_i^{n_i}}{p_i(1-q_i^2)}\right]+\frac{Q_1^{n_1-p_1+1}Q_2^{n_2-p_2+1}}{p_1p_2(1-Q_1^2)(1-Q_2^2)}\right).$$

Принимая во внимание равенство (12), на основании последнего соотношения получаем асимптотическую формулу (4). Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий

$$\alpha_i=\alpha_i^*, \ \lim_{n_i\to\infty}p_i=\infty, \ \lim_{n_i\to\infty}(n_i-p_i)=\infty, \ i=1;2,$$

соотношение (4) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

1. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 4. — С. 545–555.

2. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. — **55**, № 7 — С. 911–918.
3. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 250–269.
5. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2005. — **57,** № 4. — С. 564–570.
6. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение класов функций двух переменных высокой гладкости прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 270–283.
7. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
8. *Степанец А.И.* Приближение некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. — 1973. — **25**, № 5. — С. 599–609.
9. *Степанец А.И.* К одной задаче А.Н. Колмогорова в случае функций двух переменных // Укр. мат. журн. — 1972. — **24**, № 5. — С. 653–665.
10. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207–256.
11. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145.** — С. 126–151.
12. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 228–241.
13. *Рукасов В.И.* Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій. — Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фіз–мат. наук. — К: Ін-т математики НАН України, 2003. — 345 с.
14. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 68. — 368 с.