Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 279-285

УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА

Найдены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов функций многих переменных, периодических по каждой из них, и представимых в виде свертки элементов единичного шара пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$ с кратным ядром Пуассона.

В работе установлена слабая асимптотика M-поперечников по Колмогорову классов $A^{\rho}_{p,\beta}$ сверток функций многих переменных с многомерным ядром Пуассона. Соответствующее приближение M-мерными подпространствами осуществляется в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1{\le}q{\le}\infty$, измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с конечной нормой

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \le p < \infty$$

и

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| \quad \text{при } p = \infty.$$

Здесь $\mathbb{T}^d{:=}\prod\limits_{j=1}^{d}[-\pi,\pi){=}\{x{\in}\mathbb{R}^d: \ x{=}(x_1,\dots,x_d), \ x_j{\in}[-\pi,\pi), \ j{=}\overline{1,d}\}$.

Введем необходимые обозначения и определения.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, F — центрально-симметричное множество в X.

Определение. M-мерным поперечником по Колмогорову (колмогоровским M-поперечником) множества F в пространстве X называется величина

$$d_M(F;X) = \inf_{L_M\subset X} \sup_{x\in F} \inf_{u\in L_M} \|x-u\|_X,$$

где внешний инфимум берется по всевозможным линейным подпространствам L_M в X, $\dim L_M = M$.

В качестве пространства X рассматривается $L_q(\mathbb{T}^d)$, а в качестве аппроксимируемого множества F — множество функций

$$A^{\rho}_{p,\beta}=\{f : f(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(y)P(\rho;\beta;x-y)dy, \varphi\in L_p(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_p\le 1\},$$

где $P(\rho;\beta;t) := 2^d \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d}\prod\limits_{j=1}^{d}\rho^{k_j}\cos(k_j t_j - \frac{\beta_j\pi}{2})$, $0<\rho<1$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_d)\in\mathbb{R}^d$.

Классы $A^{\rho}_{p,\beta}$ являются одним из элементов спектра множеств

$$A^{r,\alpha}_{p,\beta}=\{f : f(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(y)P^{r,\alpha}_{p,\beta}(x-y)dy,\ \varphi\in L_p(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_p\le 1\},$$

$$P^{r,\alpha}_{p,\beta}(t)=2^d\sum_{k\in\mathbb{N}^d}\prod_{j=1}^{d}e^{-\alpha_j k_j^{r_j}}\cos(k_j t_j-\frac{\beta_j\pi}{2}),\ \alpha_j>0, r_j>0, \beta_j\in\mathbb{R}.$$

Справедливо утверждение.

Теорема. *Пусть* $2\le q\le p<\infty$. *Тогда* [1]

$$d_M(A^{\rho}_{p,\beta};L_q(\mathbb{T}^d))\asymp\rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}},\quad d!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot d.$$

Отметим, что в случае $d=1$ в [1] найдены точные по порядку значения поперечников $d_M(A^{r,\alpha}_{p,\beta};L_q(\mathbb{T}^d))$ при любых $1\le p,q\le\infty$ и $r\ge 1$.

Оценки колмогоровских поперечников множеств $A^{r,\alpha}_{p,\beta}$, $0<r<1$, (класс бесконечно дифференцируемых функций) в случае $d=1$ получены для многих, но не для всех соотношений между параметрами p и q, $1\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$ (см. [2,3], а также [4] — оценки снизу и [1,5] — оценки сверху).

Всюду в дальнейшем используются стандартные обозначения: $\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d_0=\{k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d : \prod\limits_{j=1}^{d}k_j\ne 0\}$,

[1] Запись $\alpha(M)\asymp\beta(M)$ для положительных последовательностей $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ означает, что существует постоянная $C>0$ такая, что для любого $M\in\mathbb{N}$ $\alpha(M)\le C\beta(M)$ (пишем $\alpha(M)\ll\beta(M)$) и $\alpha(M)\ge\frac{1}{C}\beta(M)$ (пишем $\alpha(M)\gg\beta(M)$).

$\mathbb{N}^d = \{k = (k_1, \ldots, k_d) : \ k_j = 1, 2, \ldots, \ j = \overline{1, d}\}$ (при $d = 1$ пишем соответственно $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0$ и $\mathbb{N}$); для конечного множества $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ через $|\Omega|$ обозначаем количество точек множества Ω.

Характеристики подмножеств в $\mathbb{R}^d$ и некоторые соотношения для них. Пусть функция $\gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такова, что $\gamma(t) = \sum\limits_{i=1}^{d} |t_i|$. Обозначим

$$\Delta(m) = \{k \in \mathbb{Z}_0^d : \gamma(k) \le m, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

и

$$\theta(m) = \{k \in \mathbb{Z}_0^d : \gamma(k) = m, \quad m \in \mathbb{N}\}.$$

Понятно, что $\theta(m) = \varnothing$ при $m < d$ и $\Delta(m) = \bigcup\limits_{l=d}^{m} \theta(l)$.

Лема A. *Справедливы равенства*

$$\text{(i)} \qquad |\theta(m)| = 2^d C_{m-1}^{d-1},$$

$$\text{(ii)} \qquad M_m := |\Delta(m)| = 2^d C_m^d, \quad m \ge d,$$

где через C_m^k обозначены биномиальные коэффициенты: $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

Доказательство. Равенство (i) является следствием решения комбинаторной задачи о количестве целочисленных неотрицательных решений уравнения $k_1 + \ldots + k_d = m$, $m \ge d$ (см., например, [6, с. 158]).

Равенство (ii) — тривиальное следствие соотношений $|\Delta(m)| = \sum\limits_{l=d}^{m} |\theta(l)|$, $C_{n+i}^n = C_{n+i+1}^{n+1} - C_{n+i}^{n+1}$ и (i).

Доказательство теоремы. *Оценки сверху* величин $d_M(A_{p,\beta}^\rho; L_q(\mathbb{T}^d))$ устанавливаются исходя из полученных в [7] порядковых оценок

$$\mathscr{E}_{\triangle(n)}(A_{p,\beta}^\rho)_q \asymp \rho^n, \quad 1 < q \le p < \infty,$$

где

$$\mathscr{E}_{\triangle(n)}(A_{p,\beta}^\rho)_q := \sup_{f \in A_{p,\beta}^\rho} \|f(x) - S_{\triangle(n)}(f; x)\|_q =$$

$$= \sup_{f\in A^{\rho}_{p,\beta}} \|f(x) - \sum_{k\in\triangle(n)} c_k(f)e^{i(k,x)}\|_q$$

— точная верхняя грань по множеству функций $A^{\rho}_{p,\beta}$ величин их приближений в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ $\triangle(n)$-суммами Фурье.

А именно, пусть $M \geq 2^d = M_d$ — задано. Определим $n \geq d$ из условия $M_n \leq M < M_{n+1}$. Тогда $2^d\frac{n!}{d!(n-d)!} \leq M < 2^d\frac{(n+1)!}{d!(n+1-d)!}$, т.е. $\frac{n!}{(n-d)!} \leq \frac{d!M}{2^d} < \frac{(n+1)!}{(n+1-d)!}$ или $(n-d+1)^d \leq \frac{d!M}{2^d} < (n+1)^d$. Следовательно,

$$\frac{(d!M)^{1/d}}{2} - 1 < n \leq \frac{(d!M)^{1/d}}{2} + d - 1, \tag{1}$$

и при $1 < q \leq p < \infty$

$$d_M(A^{\rho}_{p,\beta}; L_q(\mathbb{T}^d)) \leq \mathscr{E}_{\triangle(n)}(A^{\rho}_{p,\beta})_q \ll \rho^n \ll \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}. \tag{2}$$

Оценка снизу. Заметим, что поскольку $\|\cdot\|_q \gg \|\cdot\|_2$ при $2 \leq q \leq \infty$, а оценка снизу в теореме не зависит от параметра q, то достаточно установить её для случая $q = 2$ (при любом $1 \leq p \leq \infty$).

Первым шагом на этом пути является применение следующего результата.

Лемма T ([8, с. 70]). *Пусть $B \subset H$ — конечномерное подпространство гильбертова пространства H и $F \subset B$. Тогда*

$$d_n(F; B) = d_n(F; H).$$

Согласно этому утверждению

$$d_M(A^{\rho}_{p,\beta}; L_2(\mathbb{T}^d)) \geq$$

$$\geq d_M(A^{\rho}_{p,\beta} \bigcap T(\triangle(n+2)); L_2(\mathbb{T}^d) \bigcap T(\triangle(n+2))), \tag{3}$$

где M и n связаны соотношением (1) и для $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ — $T(\Omega) = \{t : t(x) = t(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k\in\Omega} a_k e^{i(k,x)}, \quad a_k \in \mathbb{C}\}$ и дальнейшая оценка снизу правой части (3) будет состоять из построения экстремального семейства функций из $A^{\rho}_{p,\beta} \bigcap T(\triangle(n+2))$, т.е. множества $W \subset A^{\rho}_{p,\beta} \bigcap T(\triangle(n+2))$ такого, что

$$d_M(W; L_2(\mathbb{T}^d) \bigcap T(\triangle(n+2))) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}.$$

Пусть $\tau = \{\tau_s\}_{s=1}^{M_{n+2}}$ — произвольная ортонормированная система в $L_2(\mathbb{T}^d) \bigcap T(\triangle(n+2))$; $(f; \tau_s)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе τ, т.е. $(f;\tau_s) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t)\overline{\tau_s(t)}dt$. Тогда

$$e_k(t) := e^{i(k,t)} = \sum_{s=1}^{M_{n+2}} (e_k;\tau_s)\tau_s(t), \quad k \in \triangle(n+2),$$
$$\tau_s(t) = \sum_{k\in\triangle(n+2)} (\tau_s; e_k)e_k(t), \quad s = \overline{1, M_{n+2}},$$

и

$$\sum_{k\in\triangle(n+2)} |a_s^k|^2 = \sum_{s=1}^{M_{n+2}} |a_s^k|^2 = 1, \quad a_s^k := (e_k;\tau_s). \tag{4}$$

Далее, обозначая через $S_M(\varphi(\cdot);\tau)$ частную сумму Фурье порядка M по системе τ, имеем (при $k{\in}\triangle(n{+}2)$)

$$\|e_k(\cdot){-}S_M(e_k(\cdot);\tau)\|_2^2{=}\|\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} a_s^k\tau_s(\cdot)\|_2^2{=}\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} |a_s^k|^2. \tag{5}$$

Пусть $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in \theta(m)$ — произвольное фиксированное;

$$\triangle^0(m){:=}\{k{=}(k_1,\ldots,k_d){\in}\triangle(m) : k_i{=}k_i^0, i{=}\overline{1,d{-}1} \text{ и } 1 \le k_d \le k_d^0\},$$
$$f_{k^0(d)} = \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} \rho^n e^{i(k,t)}.$$

Легко проверить, что при некотором $C > 0$ функция $Cf_{k^0(d)} \in A_{p,\beta}^\rho$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, при любом $k^0 \in \theta(n+2)$ (далее, чтобы не проводить дополнительных преобразований, будем считать, что $C = 1$).

Используя (5), можем записать

$$\sigma_{k^0(d)} := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \|f_{k^0(d)}(\cdot+\omega) - S_M(f_{k^0(d)}(\cdot+\omega);\tau)\|_2^2 d\omega =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \| \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} \rho^n e^{i(k,\omega)} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} a_s^k\tau_s(\cdot)\|_2^2 d\omega =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \Big| \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} \rho^n a_s^k e^{i(k,\omega)} \Big|^2 d\omega =$$

$$= \rho^{2n} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} |a_s^k|^2. \tag{6}$$

Покажем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что для некоторого $k^0 \in \theta(n+2)$

$$\sigma_{k^0(d)} \geq C\rho^{(d!M)^{1/d}}. \tag{7}$$

В самом деле, в противном случае, с одной стороны (принимая во внимание (4))

$$\sum_{k^0\in\theta(n+2)} \Big(\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} |a_s^k|^2 \Big) = \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{k\in\triangle(n+2)} |a_s^k|^2 =$$

$$= M_{n+2} - M \gg n^{d-1},$$

а с другой —

$$\sum_{k^0\in\theta(n+2)} \Big(\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{k\in\triangle^0(n+2)} |a_s^k|^2 \Big) = \sum_{k^0\in\theta(n+2)} \sigma_{k^0(d)} \rho^{-2n} \overset{(a)}{\leq}$$

$$\leq C \sum_{k^0\in\theta(n+2)} \rho^{(d!M)^{1/d}} \rho^{-2n} \ll C|\theta(n+2)| \ll Cn^{d-1}$$

(неравенство (a) записано на основании предположения противоположного к (7)).

Видим, что эти соотношения противоречат друг другу при выборе достаточно малого $C > 0$.

Из соотношений (6) и (7) согласно теореме о среднем для интегралов следует, что существует $\omega^* \in \mathbb{T}^d$ (при определенном $k^0 \in \theta(n+2)$) такое, что

$$\|f_{k^0(d)}(\cdot + \omega^*) - S_M(f_{k^0(d)}(\cdot + \omega^*); \tau)\|_2 \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}},$$

а это, в итоге, влечет оценку

$$d_M(A^{\rho}_{p,\beta}; L_2(\mathbb{T}^d)) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

а значит и оценку

$$d_M(A^{\rho}_{p,\beta}; L_q(\mathbb{T}^d)) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}} \tag{8}$$

при всех $2 \le q < \infty$, $1 \le p \le \infty$.

Наконец, заметим, что оценки сверху (2) и снизу (8) совпадают при $2 \le q \le p \le \infty$.

1. *Кушпель А.К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. — Киев, 1987. — 54 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 87.44).

2. *Темляков В.Н.* К вопросу об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций // Мат. заметки. — 1990. — **47**, №5. — С. 155–157.

3. *Темляков В.Н.* Об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. мат. им. И.Н.Векуа. — 1990. — **5**, № 2. — С. 111–114.

4. *Кушпель А.К.* Оценки бернштейновских поперечников и их аналогов // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, № 1. — С. 54–59.

5. *Степанец А.И., Кушпель А.К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. — Киев, 1984. — 44с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 84.15).

6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — 336 с.

7. *Романюк В.С.* Приближение классов кратных интегралов Пуассона // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т.4, №1. — С. 258–268.

8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной. — М., 1986. — 112 с. — (Тр. Мат. ин–та АН СССР; т. 178).