Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 263-278

УДК 517.51

А.С. Романюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_q

Получены точные по порядку оценки наилучших приближений изотропных классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами со спектром в кубических областях. В одномерном случае установлен порядок верхней грани уклонения частных сумм Фурье функций из классов $B^r_{1,\theta}$ в пространстве L_1.

1. Введение. В настоящей работе исследуются вопросы наилучшего приближения изотропных классов О.В. Бесова $B^r_{p,\theta}$ и С.М. Никольского H^r_p периодических функций многих переменных в пространстве $L_q, 1 \le p, q \le \infty$. В качестве аппарата приближения функций из названных классов используются тригонометрические полиномы со спектром из кубических областей.

Кроме того, в одномерном случае устанавливается порядок верхней грани уклонения частных сумм Фурье функций из классов $B^r_{1,\theta}$ в метрике пространства L_1.

Соответствующие аппроксимативные характеристики будут определены ниже, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d, d \ge 1$, обозначает d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi;\pi]$, — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Пусть далее $k \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\pi_d)$ обозначим

$$\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и определим кратную разность порядка k функции $f(x)$ в точке x с шагом h по формуле

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \Delta_h^{k-1} f(x), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Кратную разность $\Delta_h^k f(x)$ можно представить в виде:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l+k} C_k^l f(x+lh).$$

Отправляясь от кратной разности $\Delta_h^k f(x)$, определим модуль k-го порядка функции $f \in L_p(\pi_d)$ (который обозначим $\omega_k(f,t)$) по формуле

$$\omega_k(f,t) = \sup_{|h| \le t} \| \Delta_h^k f \|_p,$$

где $|h|$ — евклидова норма h.

Будем говорить, что функция $f \in L_p(\pi_d)$ принадлежит пространству $B_{p,\theta}^r$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le\ p \le \infty, r > 0$, если

$$\left(\int_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t))^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \text{ при } 1 \le \theta < \infty$$

и

$$\sup_{t>0} \omega_k(f,t) t^{-r} < \infty \text{ при } \theta = \infty.$$

Заметим, что при этом предполагается выполненным соотношение $k > r$. Норма в пространстве $B_{p,\theta}^r$ определяется по формулам

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \|f\|_p + \left(\int_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t))^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty$$

и

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f,t) t^{-r}. \qquad (1)$$

Пространства $B^r_{p,\theta}$ введены О.В. Бесовым [1] и $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, где H^r_p — пространства, введенные С.М. Никольским [2]. Таким образом, далее $B^r_{p,\theta}$ — это класс функций $f \in L_p(\pi_d)$, для которых $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1$.

В проводимых ниже рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным (с точностью до абсолютных постоянных) определением нормы пространств $B^r_{p,\theta}$.

Пусть $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида :

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тогда многомерное ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \pi_d$, определим согласно формуле

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Пусть V_m — оператор, который задает свертку функции $f \in L_p(\pi_d)$ с многомерным ядром $V_m(x)$, т.е.

$$V_m f(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) * V_m(x) = V_m(f,x).$$

Положим для $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sigma_0(f,x) = V_1(f,x),\ \sigma_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ \ s = 1,2,\dots.$$

В принятых обозначениях при $1 \le p \le \infty$, $r > 0$ (с точностью до абсолютных постоянных) классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d): \quad ||f||_{B^r_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

где

$$||f||_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta}\, ||\sigma_s(f,x)||_p^\theta \right)^{1/\theta},\ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\, ||\sigma_s(f,x)||_p,\ \ \theta = \infty. \qquad (2)$$

Обратим внимание, что в случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентные (с точностью до абсолютных постоянных) определения, используя в (2) вместо $\sigma_s(f,x)$ двоичные "блоки" ряда Фурье функции $f(x)$.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначения

$$f_0(x) = \widehat{f}(0),\ f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,\,x)},\ s = 1, 2, \dots,$$

где $(k,x) = k_1\,x_1 + \ldots + k_d\,x_d$ и

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t)\, e^{-i(k,\,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Тогда при $1 < p < \infty$ и $r > 0$

$$B^r_{p,\,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \quad ||f||_{B^r_{p,\,\theta}} \le 1 \right\},$$

где

$$||f||_{B^r_{p,\,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r\,\theta}\, ||f_s(x)||_p^\theta \right)^{1/\theta},\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^r_{p,\,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r}\, ||f_s(x)||_p, \quad \theta = \infty. \tag{2'}$$

Отметим, что с уменьшением параметра θ классы $B^r_{p,\,\theta}$ сужаются, т.е. при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ имеют место вложения

$$B^r_{p,\,1} \subset B^r_{p,\,\theta} \subset B^r_{p,\,\theta'} \subset B^r_{p,\,\infty} = H^r_p.$$

2. Наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q. Сначала определим величины, которые здесь будут исследоваться. Для $f \in L_1(\pi_d)$ и $n \in \mathbb{N}$ через $S_n(f,x)$ обозначим кратную сумму Фурье

$$S_n(f,x) = \sum_{\substack{|k_j| < 2^n \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,\,x)},$$

которую естественно называть кубической суммой Фурье функции $f(x)$. Заметим, что в принятых выше обозначениях сумму $S_n(f, x)$ можно записать в виде:

$$S_n(f,x) = \sum_{s=0}^{n} f_s(x).$$

Итак, для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, обозначим

$$\mathcal{E}_n(f)_q = \| f(x) - S_n(f, x) \|_q$$

и если $F \subset L_q(\pi_d)$ — некоторый функциональный класс, то положим

$$\mathcal{E}_n(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_n(f)_q.$$

Пусть T_n — множество тригонометрических полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k \in K(n)} c_k \, e^{i(k,\,x)},$$

где $K(n) = \{\, k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| < 2^{\,n},\ j = \overline{1, d}\,\}$.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, полагаем

$$E_n(f)_q = \inf_{t \in T_n} ||f - t||_q$$

и для функционального класса $F \subset L_q(\pi_d)$ —

$$E_n(F)_q = \sup_{f \in F} E_n(f)_q.$$

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\nu_1(N)$ и $\nu_2(N)$ запись $\nu_1 \ll \nu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\nu_1(N) \le C\nu_2(N)$. Соотношение $\nu_1 \asymp \nu_2$ равносильно тому, что $\nu_1 \ll \nu_2$ и $\nu_1 \gg \nu_2$. Все постоянные C_i, $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *и при этом* $(p,q) \ne (1,1), (\infty,\infty)$. *Тогда при* $r > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$ *справедливы соотношения*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_q \asymp E_n(B^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}, \qquad (3)$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доказательство. Сначала получим в (3) оценку сверху. При этом будем использовать неравенство разных метрик, доказанное С.М. Никольским. Для удобства сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема A [2]. *Пусть* $n = (n_1, \dots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *и*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k\, e^{i\,(k,\,x)}.$$

Тогда при $1 \le q < p \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$||\,t\,||_p \le 2^{\,d} \prod_{j=1}^{d} n_j^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} ||\,t\,||_q.$$

Итак, поскольку $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$, $1 \le \theta < \infty$, то искомую оценку сверху достаточно получить для величины $\mathcal{E}_n(H^r_p)_q$. Далее будем проводить рассуждения в зависимости от соотношений между параметрами p и q.

а) Пусть сначала $1 \le p < q \le \infty$. Обозначим через q_o некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_o < q$. Поскольку для $f \in H^r_p$ выполнено соотношение $\|\sigma_s(f,x)\|_p \le 2^{-s\,r}$, то согласно неравенству Минковского и неравенству разных метрик Никольского можем записать

$$\|\, f(x) - S_n(f,\,x)\,\|_q = \|\sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x)\,\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\, f_s(x)\,\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{s\,d(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})} \|\, f_s(x)\,\|_{q_o} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{s\,d(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})} \|\, \sigma_s(f,x)\,\|_{q_o} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{s\,d(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})}\, 2^{s\,d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_o})} \parallel \sigma_s(f,x) \parallel_p = \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{s\,d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \times$$

$$\times \parallel \sigma_s(f,x) \parallel_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s\,d(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \ll 2^{-n(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

б) Пусть $1 < p = q < \infty$. Тогда для $f \in H^r_p$ в силу неравенства Минковского и соотношения $(2')$ будем иметь

$$\parallel f(x) - S_n(f,\, x) \parallel_q \;= \parallel \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x) \parallel_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \parallel f_s(x) \parallel_p \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s\,r} \ll 2^{-n\,r}. \tag{4}$$

в) В случае $1 \leq q < p < \infty$ оценка сверху величины $\mathcal{E}_n(H^r_p)_q$ следует из (4) согласно вложению $H^r_p \subset H^r_q,\ 1 < q < \infty$,

$$\mathcal{E}_n(H^r_p)_q \leq \mathcal{E}_n(H^r_q)_q \ll 2^{-n\,r}. \tag{5}$$

И при $1 \leq q < \infty,\ p = \infty$ соответствующая оценка является следствием (5) в силу вложения $H^r_\infty \subset H^r_p$.

Оценки сверху для величин $\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_q$, и следовательно для наилучших приближений $E_n(B^r_{p,\theta})_q$, во всех возможных случаях теоремы доказаны.

Переходя к доказательству в (3) оценки снизу, отметим, что в каждом из рассматриваемых ниже случаев метод получения соответствующих оценок будет базироваться на построении экстремальных функций. Предварительно заметим, что в случаях $1 \leq p \leq q \leq 2,\ 1 \leq q \leq p \leq \infty$ и $(p,q) \neq (1,1),\ (\infty,\infty)$ искомые оценки снизу следуют из оценок наилучших m-членных тригонометрических приближений классов $B^r_{p,\theta}$. Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, полученный в [4], введем необходимые обозначения.

Пусть $f \in L_q(\pi_d)$ и $\{k^j\}_{j=1}^{m}$ — произвольный набор d-мерных векторов $k^j = (k^j_1, \dots, k^j_d)$ с целочисленными координатами.

Величина

$$e_m(f)_q \;=\; \inf_{k^j,\, c_j} \Big\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j\, e^{i(k^j,x)} \Big\|_q,$$

где c_j — произвольные числа, называется наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции $f(x)$ в пространстве L_q. Для функционального класса $F \subset L_q(\pi_d)$ полагаем

$$e_m(F)_q \;=\; \sup_{f \in F} e_m(f)_q.$$

Из определений величин $E_n(f)_q$ и $e_m(f)_q$ при $2^{nd} \asymp m$ следует соотношение

$$E_n(f)_q \gg e_m(f)_q. \qquad (6)$$

Напомним, что величина $e_m(f)_2$ для функций одной переменной была введена С.Б.Стечкиным [5] при формулировке критерия абсолютной сходимости рядов Фурье. Затем величины $e_m(f)_q$ и $e_m(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, для функций как одной так и нескольких переменных исследовались многими авторами. С соответствующей библиографией можно ознакомиться, например, в [6]. Теперь сформулируем утверждение, в котором получены порядки величин $e_m(B^r_{p,\theta})_q$.

Теорема Б [4]. *Пусть* $1 \le q \le \infty,\ 1 \le p, \theta \le \infty$ *и*

$$r(p,q) = \begin{cases} d\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)_+, & 1 \le p \le q \le 2 \ \text{или}\, 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда для $r > r(p,q)$

$$e_m(B^r_{p,\theta})_q \;\asymp m^{-\frac{r}{d} + \left(\frac{1}{p} - \max\{\frac{1}{q}; \frac{1}{2}\}\right)_+}.$$

Таким образом, если $1 \le p \le q \le 2$ или $1 \le q \le p \le \infty$ и $(p,q) \ne (1,1), (\infty,\infty)$, то при $2^{n\,d} \asymp m$ из теоремы Б согласно (6) получаем искомые оценки снизу в (3).

Переходя к рассмотрению оставшихся случаев, предварительно заметим, что в силу вложения $B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta}$, $1 < \theta \le \infty$, достаточно получить искомые оценки снизу для $E_n(B^r_{p,1})_q$. Отметим также, что при $1 < q < \infty$ в силу соотношения (см., например, [3, лемма 3])

$$E_n(f)_q \asymp \mathcal{E}_n(f)_q$$

достаточно установить оценки снизу для величин

$$\| \, f(x) - S_n(f, \, x) \, \|_q \, , f \in B^r_{p,1}.$$

Далее, пусть имеет место случай $2 \le p \le q < \infty$ или $1 < p \le 2 < q < \infty$. Для $f \in B^r_{p,1}$ в силу следствия $D1.2$ (см. [7, с. 392]) можем записать

$$\| \, f(x) - S_n(f, \, x) \, \|_q = \sup_{g: \|g\|_{q'} \le 1} \left| \int\limits_{\pi_d} (f(x) - S_n(f, x)) g(x) dx \right|, \qquad (7)$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{i \, k_j \, x_j}.$$

Принимая во внимание, что

$$\left\| \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{i \, k_j \, x_j} \right\|_p \asymp 2^{\, n(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 < p < \infty, \qquad (8)$$

будем иметь

$$\|F_n\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{s \, r} \|(F_n)_s\|_p \asymp 2^{(n+1) r} \|F_n\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{n \, r} \cdot 2^{n \, d (1 - \frac{1}{p})} = 2^{n \, d (\frac{r}{d} + 1 - \frac{1}{p})}. \qquad (9)$$

Рассматривая (9), приходим к заключению, что функция

$$f_1(x) = C_1 \, 2^{-n \, d (\frac{r}{d} + 1 - \frac{1}{p})} F_n(x),$$

при надлежащем выборе постоянной $C_1 > 0$, принадлежит классу $B^r_{p,1}$.

Далее, поскольку согласно (8)

$$\|F_n\|_{q'} \asymp 2^{\frac{n\,d}{q}}\,,\ 1 < q < \infty,$$

то функция

$$g_1(x) = C_2\, 2^{-\frac{n\,d}{q}} F_n(x)$$

с соответствующей постоянной $C_2 > 0$ удовлетворяет неравенству $\|g_1\|_{q'} \le 1$.

Таким образом, воспользовавшись (7) по отношению к функциям $f_1(x)$ и $g_1(x)$, будем иметь

$$\|\, f_1(x) - S_n(f_1,\, x)\,\|_q \gg 2^{-n\,d(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}\, 2^{-\frac{n\,d}{q}} 2^{n\,d} = 2^{-n(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

Пусть теперь $p \in [1, \infty)$ и $q = \infty$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_3\, 2^{-n\,d(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}\, \upsilon_{n+1}(x), \quad C_3 > 0,$$

где

$$\upsilon_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Поскольку (см., например, [8, с. 66])

$$\|\upsilon_{n+1}\|_p \asymp 2^{n\,d(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{10}$$

то легко убедиться, что функция $f_2(x)$ с соответствующей постоянной $C_3 > 0$, принадлежит классу $B^r_{p,1}$. Действительно, согласно (2) имеем

$$\|f_2\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{s\,r} \|\sigma_s(f_2, x)\|_p \asymp 2^{-n\,d(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} \times$$

$$\times 2^{(n+1)r} \|\upsilon_{n+1}\|_p \ll 2^{-n\,d(1-\frac{1}{p})} \cdot 2^{n\,d(1-\frac{1}{p})} = 1,$$

т.е. $f_2 \in B^r_{p,1}$.

Далее, пусть
$$t^*_n(x) = \sum_{k\in K(n)} c^*_k e^{i(k,x)}$$
— полином наилучшего приближения функции $f_2(x)$ в пространстве L_∞. Тогда с одной стороны, принимая во внимание, что функция $\upsilon_{n+1}(x)$ не содержит гармоник с "номерами" из множества $K(n)$, можем записать

$$\big((f_2-t^*_n),\upsilon_{n+1}\big)=(f_2,\upsilon_{n+1})\asymp 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}\|\upsilon_{n+1}\|_2^2\asymp 2^{-nd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p})}. \qquad (11)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера и оценки (10), будем иметь

$$\big((f_2-t^*_n),\upsilon_{n+1}\big)\le\|f_2-t^*_n\|_\infty\|\upsilon_{n+1}\|_1\ll\|f_2-t^*_n\|_\infty=E_n(f_2)_\infty. \qquad (12)$$

Сопоставив (11) и (12), приходим к оценке

$$E_n(f_2)_\infty \gg 2^{-n(r-\frac{d}{p})}.$$

Отсюда следуют искомые оценки снизу для величин $E_n(B^r_{p,1})_\infty$ и $\mathcal{E}_n(B^r_{p,1})_\infty$.

Наконец, пусть $p=1$ и $q\in(1,\infty)$. Заметим, что в случае $q\in(1,2]$ искомая оценка снизу является следствием теоремы A и поэтому остается рассмотреть случай $q\in(2,\infty)$ и $p=1$. При доказательстве оценки снизу в этом случае будем пользоваться соотношением (7). В качестве функций $f(x)$ и $g(x)$ в этом соотношении возьмем функции $f_2(x)$ и

$$g_2(x) = C_4\, 2^{-\frac{n\,d}{q}}\,\upsilon_{n+1}(x), \quad C_4>0,$$

соответственно. Поскольку в силу (10)

$$\|g_2\|_{q'} \asymp 2^{-n\,d(1-\frac{1}{q'})}\|\upsilon_{n+1}\|_{q'} \asymp 2^{-\frac{n\,d}{q}}\, 2^{n\,d(1-\frac{1}{q'})} = 1,$$

то при соответствующем выборе постоянной $C_4>0$ функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию $\|g_2\|_{q'}\le 1$.

Таким образом, принимая во внимание, что $S_n(f_2,x)=0$, и используя соотношение (7), будем иметь

$$\|\, f_2(x) - S_n(f_2,\, x)\,\|_q \gg 2^{-n\,r}\, 2^{-\frac{n\,d}{q}}\, \|\upsilon_{n+1}\|_2^2 \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\,d(\frac{r}{d}+\frac{1}{q})}\,2^{n\,d} = 2^{-n(r-d(1-\frac{1}{q}))}.$$

Оценки снизу во всех случаях доказаны. Теорема доказана.

В следующем утверждении получаем порядок величины $E_n(B^r_{p,\theta})_q$ в случаях $(p,q)=(1,1)$, (∞,∞).

Теорема 2. *Пусть $r>0$, $1\le\theta\le\infty$. Тогда при $p=1,\infty$*

$$E_n(B^r_{p,\,\theta})_p \asymp 2^{-n\,r}. \tag{13}$$

Доказательство. Оценку сверху в (13) достаточно установить для классов $B^r_{p,\,\infty}=H^r_p$. Рассмотрим для $f\in H^r_p$ приближающий полином вида

$$t_n(f,x)=\sum_{s=0}^{n}\sigma_s(f,x). \tag{14}$$

Поскольку для $f\in H^r_p$ выполнено соотношение $\|\sigma_s(f,x)\|_p\le 2^{-s\,r}$, $p=1,\infty$, то согласно неравенству Минковского можем записать

$$E_n(f)_p \le \|\,f(x)-t_n(f,x)\,\|_p = \Big\|\sum_{s=n+1}^{\infty}\sigma_s(f,x)\Big\|_p \le$$

$$\le \Big\|\sum_{s=n+1}^{\infty}\sigma_s(f,x)\Big\|_p \ll \sum_{s=n+1}^{\infty}2^{-s\,r} \ll 2^{-n\,r}.$$

Оценка сверху в (13) установлена. Соответствующая оценка снизу в (13) следует из теоремы A.

Замечание. Порядок величин $\mathcal{E}_n(B^r_{p,\,\theta})_p$, $p=1,\infty$, в многомерном случае нам неизвестен.

3. Приближение классов $B^r_{1,\,\theta}$ суммами Фурье в метрике L_1. В этой части работы докажем утверждение об оценках величин $\mathcal{E}_N(B^r_{1,\,\theta})_1$ в одномерном случае.

Пусть $f\in L_1[-\pi;\,\pi]$ и

$$S_{N}(f,x)=\sum_{k=-N}^{N}c_k\,e^{i\,k\,x}$$

— частная сумма Фурье функции $f(x)$ порядка N.

Справедлива теорема.

Теорема 3. *Пусть* $d = 1$ *и* $r > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta < \infty$

$$\sup_{f \in B^r_{1,\theta}} \|f(x) - S_N(f,x)\|_1 \asymp N^{-r} \log N. \tag{15}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, отметим, что порядок величины $\sup\limits_{f \in H^r_1} \|f(x) - S_N(f,x)\|_1$ известен (см., например, [9](Теорема 3.8)).

Доказательство. Поскольку $B^r_{1,\theta} \subset H^r_1$, $1 \le \theta < \infty$, то оценка сверху в (15) следует из [9](Теорема 3.8), где доказано соотношение

$$\sup_{f \in H^r_1} \|f(x) - S_N(f,x)\|_1 \asymp N^{-r} \log N. \tag{16}$$

Соответствующую оценку снизу в (15) достаточно получить при $\theta = 1$, поскольку $B^r_{1,1} \subset B^r_{1,\theta}$, $1 < \theta \le \infty$. Кроме того, как будет видно из последующих рассуждений, нам будет удобно полагать, что $N = 3 \cdot 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Пусть $K_l(x)$ обозначает ядро Фейера порядка l:

$$K_l(x) = \sum_{|k| \le l} \big(1 - \frac{|k|}{l}\big) e^{i\,k\,x}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_3(x) = C_5\, 2^{-m\,r}\, e^{i(2^m + 2^{m+1})x} K_{2^m}(x), \quad C_5 > 0,$$

и покажем, что при надлежащем выборе постоянной $C_5 > 0$ эта функция принадлежит классу $B^r_{1,1}$. Обозначим

$$\psi(x) = e^{i(2^m + 2^{m+1})x} K_{2^m}(x)$$

и заметим, что спектр полинома $\psi(x)$ принадлежит отрезку $[\,2^{m+1}; 2^{m+2}\,]$. Следовательно, используя легко проверяемое соотношение

$$\sigma_s(\psi, x) = \sigma_s(x) * (\psi_s(x) + \psi_{s+1}(x)), \tag{17}$$

где $\sigma_s(x) = V_{2^s}(x) - V_{2^{s-1}}(x)$, приходим к выводу, что за исключением $\sigma_{m+1}(\psi, x)$ и $\sigma_{m+2}(\psi, x)$ для всех остальных $\sigma_s(\psi, x)$ выполнено равенство $\sigma_s(\psi, x) = 0$. Таким образом, согласно (17) справедливы соотношения:

$$\sigma_{m+1}(\psi, x) = \sigma_{m+1}(x) * \psi_{m+2}(x);$$

$$\sigma_{m+2}(\psi, x) = \sigma_{m+2}(x) * \psi_{m+2}(x).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\|\sigma_{m+1}(x)\|_1 \leq 6$ и $\|K_{2^m}(x)\|_1 = 1$, находим

$$\|\sigma_{m+1}(\psi, x)\|_1 \leq \|\sigma_{m+1}(x)\|_1 \, \|\psi_{m+2}(x)\|_1 \leq 6 \, \|\psi_{m+2}(x)\|_1 =$$

$$= 6\|e^{i(2^m+2^{m+1})x} * K_{2^m}(x)\|_1 = 6\|K_{2^m}(x)\|_1 = 6. \qquad (18)$$

Аналогично, для $\sigma_{m+2}(\psi, x)$ имеем

$$\|\sigma_{m+2}(\psi, x)\|_1 \leq 6. \qquad (19)$$

Следовательно, в силу (18) и (19), получаем

$$\|\psi\|_{B^r_{1,1}} = \sum_s 2^{sr} \|\sigma_s(\psi, x)\|_1 = 2^{(m+1)r} \|\sigma_{m+1}(\psi, x)\|_1 +$$

$$+ 2^{(m+2)r} \|\sigma_{m+2}(\psi, x)\|_1 \leq 6 \cdot 2^{mr}(2^r + 2^{2r}) = C(r)\, 2^{mr}.$$

Отсюда вытекает, что функция $g_3(x)$ при $C_5 = C^{-1}(r) = \frac{1}{6}(2^r + 2^{2r})^{-1}$ принадлежит классу $B^r_{1,1}$.

Итак, для заданного m подбираем N по формуле $N = 3 \cdot 2^m$ и рассматриваем приближение функции $\psi(x)$ ее частной суммой Фурье $S_N(\psi, x)$. При помощи элементарных преобразований легко убедиться, что

$$\psi(x) - S_N(\psi, x) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{i(k+2^m+2^{m+1})x},$$

и следовательно, будем иметь

$$\|\psi(x) - S_N(\psi, x)\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{ikx} \right\|_1 =$$

$$= \left\| i\sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\cos k\,x - \sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x\right\|_1 \geq$$

$$\geq \left\|\sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x\right\|_1 - \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=-2^m}^{2^m}\left(1-\frac{|k|}{2^m}\right)e^{i\,k\,x}\right\|_1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x\right\|_1 - \frac{1}{2}\left\|K_{2^m}(x)\right\|_1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x\right\|_1. \qquad (20)$$

Для того, чтобы продолжить оценку (20) обозначим

$$F(x) = \sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x$$

и рассмотрим функцию

$$g_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\,x}{k}.$$

Хорошо известно, что $g_4(x) = \frac{\pi - x}{2},\ x \in (0, 2\pi)$.
Пусть

$$\mathcal{J} = (F,\, g_4).$$

Тогда, с одной стороны,

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2^{m-1}}\frac{1}{k}. \qquad (21)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера можем записать

$$\mathcal{J} \leq \| F \|_1\ \|g_4\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^{2^m}\left(1-\frac{k}{2^m}\right)\sin k\,x\right\|_1\left\|\frac{\pi - x}{2}\right\|_\infty \ll$$

$$\ll \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\, x \right\|_1 . \tag{22}$$

Сопоставив (21) и (22), приходим к оценке

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin k\, x \right\|_1 \gg \sum_{k=2}^{2^{m-1}} \frac{1}{k} > \ln 2^{m-1} \gg m \asymp \log N. \tag{23}$$

Таким образом, согласно (20) и (23) можем записать

$$\|\psi(x) - S_N(\psi,\, x)\|_1 \gg \log N. \tag{24}$$

Наконец, принимая во внимание определение функции $g_4(x)$, в силу (24) находим

$$\|g_4(x) - S_N(g_4,\, x)\|_1 \gg N^{-r} \log N.$$

Оценка снизу и вместе с ней теорема доказана.

1. *Бесов О.В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1961. — **60**.— С. 42–61.

2. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Там же. — 1951. — **38**. — С. 244–278.

3. *Лизоркин П.И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сибирский матем. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127–1152.

4. *De Vore R.A. and Temlyakov V.N.* Nonlinear Approximation by Trigonometric Sums // The Journal of Fourier Analysis and Applications. — 1995. — **2**, №1. — P.29–48.

5. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 2. — С. 37–40.

6. *Романюк А.С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — **67**, № 2. — С. 61–100.

7. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем.ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

9. *Temlyakov V.N.* Approximation of Periodic Functions. — New York: Nova Science, 1993. — 272 p.