Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 248-262

УДК 517.5

С. И. Новиков
(Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ШАРЕ

Тематика настоящей работы тесно связана с исследованиями задач экстремальной интерполяции.

В 1965 г. Ю.Н.Субботин [8] нашел точное решение задачи интерполяции в равноотстоящих узлах функциями одной переменной с минимальным значением равномерной нормы производной порядка m на классе интерполируемых данных с ограниченными конечными разностями m-го порядка. Позже эта задача обобщалась и модифицировалась в нескольких направлениях: равномерные нормы были заменены L_p-нормами $(1 \leq p < \infty)$ [9], интерполяция в точках — интерполяцией в среднем [10-12], производная — линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, а конечная разность специально выбранным разностным оператором [13-15]. Обзор результатов этих исследований и подробная библиография содержатся в работе автора [4].

Другим и, возможно, наиболее важным направлением развития проблематики экстремальной интерполяции является исследование многомерных задач. Первый результат решения задачи экстремальной интерполяции в пространстве $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ получен Ю.Н.Субботиным [9]. Им было найдено минимальное значение L_p-нормы $(1 \leq p \leq \infty)$ смешанной производной $D^m = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$ интерполянта на классе интерполируемых последовательностей с ограниченным значением l_p-нормы их разностного оператора, определяемого как суперпозиция n одномерных конечных разностей порядков $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно. С.И.Новиков и В.Т.Шевалдин [5] заменили смешанную производную линейным дифференциальным оператором, допускающим представление в виде произведения n одномерных линейных дифференциальных операторов с постоянными вещественными коэффициентами (по каждой переменной x_j свой оператор порядка $m_j, j = 1, 2, \dots, n$). Разностный аналог дифференциального оператора был построен в виде суперпозиции специально выбранных одномерных разностных операторов.

Для дифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$, которые невозможно представить в виде суперпозиции n одномерных, экстремальная интерполяция представляют собой значительно более сложную проблему. Одним из таких операторов является оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Известно (см., например, [4] и ссылки в этой работе), что при отсутствии дополнительных ограничений в классе гармонических функций разрешима любая (конечная или бесконечная) интерполяционная задача. Это обстоятельство приводит к тому, что задача экстремальной интерполяции, если ее формулировать по аналогии с тем, как это делалось во всех ранее исследованных случаях, имеет тривиальное (нулевое) решение. Таким образом, применительно к оператору Лапласа задача должна быть поставлена иначе. В настоящей работе представлена одна из возможных постановок.

Пусть $n \geq 2,\ |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ — модуль вектора $x \in \mathbf{R}^n$,

$$B_R^n(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ |x| < R\}$$

— открытый шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат, $\overline{B_R^n(0)}$ — его стандартное замыкание.

Определяем класс интерполируемых данных:

$$\mathfrak{M}_\infty \ = \ \left\{z : \ z = \{z_j\}_{j=1}^N, \ \|z\|_{l_\infty^N} \leq 1\right\},$$

где $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_j| : \ j = 1, 2, \dots, N\}$.

Эти данные будем интерполировать в конечном числе N точек $\{x^{(s)}\}_{s=0}^{N-1} \subset B_R^n(0)$. Пусть

$$\begin{aligned} Y_N(z) \ = \ \Big\{ & f \in C^2(B_R^n(0)) \bigcap C(\overline{B_R^n(0)}) : \ f|_{|x|=R} = 0, \\ & f(x^{(s)}) = z_{s+1}, \ \ s = 0, 1, \dots, N-1 \Big\} \end{aligned}$$

— класс интерполирующих функций.

Каждой вещественной функции $f \in C(\overline{B_R^n(0)})$ поставим в соответствие ее норму

$$\|f\|_\infty = \max\left\{|f(x)| : \ x \in \overline{B_R^n(0)}\right\}.$$

Целью настоящей работы является исследование следующей величины:

$$A_\infty^N(B_R^n(0)) \ = \ \sup_{z \in \mathfrak{M}_\infty} \ \inf_{f \in Y_N(z)} \ \|\Delta f\|_\infty,$$

которая представляет собой норму оператора Лапласа "наилучшей" интерполирующей функции из $Y_N(z)$ для "наихудшего" набора интерполируемых данных из класса $\mathfrak{M}_\infty$.

Эта задача при произвольном расположении точек интерполяции внутри шара $B_R^n(0)$ является очень трудной, поэтому ограничимся частным случаем, когда точки интерполяции расположены на равноотстоящих друг от друга сферических орбитах.

Теорема 1. *Если $N \geq 2$ и точки интерполяции выбраны так, что $|x^{(s)}| = R(\frac{s}{N})$, $s = 0, 1, \ldots, N-1$, то справедлива двусторонняя оценка*

$$C_1 \ \frac{N}{R^2} \leq A_\infty^N(B_R^n(0)) \ \leq C_2 \ \frac{N^2}{R^2},$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы, не зависящие от N и R.

Доказательство. Сначала получим оценку снизу.

Известно (см., например, [2, гл.5]), что решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta f = -\varphi \\ f|_{|x|=R} = 0 \end{cases}$$

в классе функций $C^2(B_R^n(0)) \bigcap C(\overline{B_R^n(0)})$ записывается через функцию Грина $G(x,y)$ следующим образом:

$$f(x) \ = \ \int\limits_{\overline{B_R^n(0)}} G(x,y) \ \varphi(y) \ dy.$$

Отсюда

$$f(x) \ = - \int\limits_{\overline{B_R^n(0)}} G(x,y) \ \Delta f(y) \ dy.$$

За счет интерполяционных условий из этого представления получаем N равенств

$$z_j = -\int\limits_{B_R^n(0)} G(x^{(j-1)}, y)\ \Delta f(y)\ dy, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Теперь каждое из этих равенств умножаем на некоторый вещественный коэффициент α_j и результаты складываем:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j z_j \ = \ -\int\limits_{B_R^n(0)} \Big(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j G(x^{(j-1)}, y)\Big)\ \Delta f(y)\ dy.$$

Принимая во внимание известное свойство положительности функции Грина (см., например, [2, гл.5]), получаем оценку

$$\Big|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j z_j\Big| \ \leq \Big(\int\limits_{B_R^n(0)} \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|\ G(x^{(j-1)}, y)\ dy\Big)\ \ \|\Delta f\|_\infty.$$

Отсюда

$$\|\Delta f\|_\infty \ \geq \ \frac{\Big|\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j z_j\Big|}{\sum\limits_{j=1}^{N} |\alpha_j| \int\limits_{B_R^n(0)} G(x^{(j-1)}, y)\ dy}\ . \tag{1}$$

Интеграл в знаменателе правой части вычислим в явном виде. Для этого в классе функций $C^2(B_R^n(0)) \bigcap C(\overline{B_R^n(0)})$ рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta F = 1,\ \ F|_{|x|=R} = 0.$$

Через функцию Грина ее решение записывается следующим образом:

$$F(x) \ = \ -\int\limits_{B_R^n(0)} G(x, y)\ dy.$$

С другой стороны, ищем решение в виде $F(x) = cR^2 + a|x|^2$, где a и c неопределенные константы. Простыми вычислениями находим, что $\Delta F = 2an$, отсюда $a = 1/2n$. Теперь удовлетворяем граничному условию $F|_{|x|=R} = 0$. В результате имеем $a+c=0$, т.е. $c=-(1/2n)$ и $F(x) = (1/2n)(|x|^2-R^2)$. Благодаря единственности решения краевой задачи получаем, что при всех $x \in \overline{B_R^n(0)}$

$$\int\limits_{\overline{B_R^n(0)}} G(x,y)\ dy = \frac{R^2-|x|^2}{2n}. \tag{2}$$

Учитывая расположение точек интерполяции, из (1) и (2) имеем

$$\|\Delta f\|_\infty \ \geq \frac{2n}{R^2}\ \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j z_j\right|}{\sum\limits_{j=1}^{N} |\alpha_j|\ \left(1-(\frac{j-1}{N})^2\right)}.$$

Поскольку $\sum\limits_{s=1}^{N} |\alpha_s| \neq 0$, делим числитель и знаменатель правой части на величину $\sum\limits_{s=1}^{N} |\alpha_s|$ и, обозначив

$$a_j = \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{s=1}^{N} |\alpha_s|}, \quad j=1,2,\ldots,N,$$

приходим к неравенству

$$\|\Delta f\|_\infty \geq \frac{2n}{R^2}\ \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} a_j z_j\right|}{\sum\limits_{j=1}^{N} |a_j| - \frac{1}{N^2}\sum\limits_{j=1}^{N} |a_j|(j-1)^2}.$$

Заметив, что

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| = 1,$$

полученную оценку записываем в виде

$$\|\Delta f\|_\infty \geq \frac{2n}{R^2}\ \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} a_j z_j\right|}{1-\frac{1}{N^2}\sum\limits_{j=1}^{N} |a_j|(j-1)^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} a_j z_j\right|}{1 - \frac{1}{N^2} \sum\limits_{j=1}^{N} |a_j|(j-1)^2}, \tag{4}$$

и пусть $\mathbb{S}^N = \left\{ a \in \mathbb{R}^N : \sum\limits_{j=1}^{N} |a_j| = 1 \right\}$ — единичная сфера пространства l_1^N. Покажем, что на $\mathbb{S}^N$ существуют точки, в которых

$$\mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_N) \; = \; C\, N,$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от параметров N и R.

Прежде всего отметим, что функция $\mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_N)$ является непрерывной на $\mathbb{S}^N$, поскольку

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j|(j-1)^2 \; \le \; (N-1)^2 \sum_{j=1}^{N} |a_j| = \; (N-1)^2 \; < \; N^2$$

и потому для всех точек сферы $\mathbb{S}^N$ знаменатель в (4) не обращается в нуль.

Выбираем $z_j = 1, \; j = 1, 2, \dots, N$. Ясно, что эти данные лежат в рассматриваемом классе $\mathfrak{M}_\infty$. При выбранных $\{z_j\}_{j=1}^N$ вычисляем значения функции $\mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_N)$ в двух конкретных точках, лежащих на сфере $\mathbb{S}^N$:

$$\mathcal{F}(1, 0, \dots, 0, 0) \; = \; 1,$$

$$\mathcal{F}(0, 0, \dots, 0, 1) = \frac{N^2}{2N-1}.$$

Поскольку при $N > 1$ сфера $\mathbb{S}^N$ является связным множеством, то согласно известному результату [3, с.41-42] непрерывная функция $\mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_N)$ принимает на $\mathbb{S}^N$ все промежуточные значения, лежащие между 1 и $\frac{N^2}{2N-1}$. Поэтому найдется вектор $\widehat{a} =$

$(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_N) \in \mathbb{S}^N$, для которого

$$\mathcal{F}(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_N) \;=\; C\;N, \tag{5}$$

где константа $C > 0$ не зависит от N и R.

Теперь заметим, что для любого конкретного набора данных $\widehat{z} \in \mathfrak{M}_\infty$ справедлива элементарная оценка

$$A^N_\infty(B^n_R(0)) \;\geq\; \inf_{f \in Y_N(\widehat{z})} \;\|\Delta f\|_\infty. \tag{6}$$

Сопоставление (6), (3) и (5) завершает доказательство оценки снизу.

Теперь докажем оценку сверху.

Обозначаем $r = |x|$. Ограничиваемся так называемыми радиальными функциями, т.е. такими функциями f переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(r)$. Ясно, что радиальные функции можно рассматривать как функции одной переменной r. Вычислив вторые производные функции $f(r)$ по переменным x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, находим

$$\Delta f = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left(\frac{n-1}{r}\right)\;\frac{df(r)}{dr}. \tag{7}$$

В правой части (7) стоит линейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами, для которого $r = 0$ является особой точкой.

В качестве интерполянта выбираем кубический сплайн $S(r; z) \equiv S(r)$ дефекта 1 с узлами "склейки" и интерполяции в точках $\{jR/N,\ j = 0, 1, \ldots, N\}$:

$$S\left(j\frac{R}{N}\right) = z_{j+1},\ j = 0, 1, \ldots, N-1, \quad S(R) = 0$$

и следующими краевыми условиями:

$$S'(0) = S'(R) = 0.$$

Существование и единственность интерполяционного сплайна известны [1, гл.2]. Сплайн $S(r)$ при выбранных краевых условиях можно продолжить четным образом с отрезка $[0, R]$ на $[-R, 0]$, положив $S(-r) = S(r)$. В силу четности продолжения $S(-R) = S(R)$

и $S''(-R) = S''(R)$, а благодаря выбранным краевым условиям $S'(-R) = S'(R) = 0$. Поэтому, можно периодически (с периодом $2R$) продолжить сплайн $S(r)$ с отрезка $[-R, R]$ на всю вещественную ось, не увеличив при этом его дефект. Сохраняем за полученным в результате продолжения сплайном обозначение $S(r)$.

Для сплайна $S(r)$ будем оценивать норму правой части (7) опираясь на известные результаты теории сплайнов [1,7]. Обозначим $h = R/N$, $r_j = jR/N, j = 0, 1, \ldots, N$. Записываем сплайн $S(r)$ через параметры $\{m_j\}$ — значения его первой производной в узлах $m_j = S'(r_j)$ (см., например, [7, гл.2, §4]). Таким образом для каждого $r \in [r_{j-1}, r_j]$ имеем

$$\begin{aligned} S(r) \;&=\; m_{j-1}\, \tfrac{(r_j-r)^2\ (r-r_{j-1})}{h^2} - m_j\, \tfrac{(r-r_{j-1})^2\ (r_j-r)}{h^2} \;+ \\ &+\; z_{j-1}\, \tfrac{(r_j-r)^2\ [2(r-r_{j-1})+h]}{h^3} +\; z_j\, \tfrac{(r-r_{j-1})^2\ [2(r_j-r)+h]}{h^3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Вычисляя производную сплайна, представленного в форме (8), находим

$$S'(r) \;=\frac{m_{j-1}}{h^2}\ \psi_{1,j}(r) - \frac{m_j}{h^2}\ \psi_{2,j}(r) + \ \frac{z_j - z_{j-1}}{h^3}\ \phi_j(r), \tag{9}$$

где $\psi_{1,j}(r) = (r_j-r)(r_j+2r_{j-1}-3r)$, $\psi_{2,j}(r) = (r-r_{j-1})(2r_j+r_{j-1}-3r)$, $\phi_j(r) = 6(r_j - r)(r - r_{j-1})$.
Из (9) получаем, что $\forall r \in [r_{j-1}, r_j]$

$$\begin{aligned} |S'(r)| \;\le\; & \tfrac{|m_{j-1}|}{h^2} \max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\psi_{1,j}(r)| \;+\; \tfrac{|m_j|}{h^2} \max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\psi_{2,j}(r)| + \\ +\; & \tfrac{|z_{j-1}|+|z_j|}{h^3} \max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\phi_j(r)|. \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями легко проверяется, что

$$\max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\psi_{1,j}(r)| = \max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\psi_{2,j}(r)| = h^2,$$

$$\max_{r\in[r_{j-1},r_j]} |\phi_j(r)| = \frac{3}{2}h^2.$$

Из краевых условий и непрерывности второй производной сплайна в узлах выписывается система линейных алгебраических уравнений относительно $\{m_j\}$ с вектором правых частей

$c = \{c_j\}$, где $c_j = \frac{3}{2h}\ (z_{j+1} - z_{j-1})$. Матрица этой системы имеет доминирующую главную диагональ с коэффициентом доминантности равным единице, поэтому для решения системы справедлива оценка (см., например, [7, гл.1, §3])

$$\|m\|_{l^N_\infty} \leq \ \|c\|_{l^N_\infty},$$

из которой с помощью явного выражения для c_j получаем неравенство

$$\|m\|_{l^N_\infty} \leq \ \frac{3}{h}\ \|z\|_{l^N_\infty}. \qquad (10)$$

Если $j > 1$, то благодаря оценке (10) при всех $r \in [r_{j-1}, r_j]$

$$\left|\frac{S'(r)}{r}\right| \leq \frac{|S'(r)|}{r_{j-1}} \ \leq \frac{C\ \|z\|_{l^N_\infty}}{h^2} \ \leq \ C\ \frac{N^2}{R^2}, \qquad (11)$$

где C — некоторая абсолютная положительная константа.

Теперь пусть $j = 1$. Из (9) с учетом того, что $m_0 = S'(0) = 0$, для всех $r \in (0, r_1]$ имеем

$$\frac{S'(r)}{r} \ = \ -\frac{m_j}{h^2}\ (2h - r) + \ \frac{6(z_j - z_{j-1})}{h^3}\ (r - h).$$

Используя (10), отсюда получаем оценку

$$\left|\frac{S'(r)}{r}\right| \leq \ A\ \frac{N^2}{R^2} \qquad (12)$$

с некоторой абсолютной положительной константой A.

Оцениваем вторую производную сплайна. Дифференцируя (9), имеем

$$S''(r) \ = \ \frac{m_{j-1}}{h^2}\ \psi'_{1,j}(r) - \frac{m_j}{h^2}\ \psi'_{2,j}(r) \ - \frac{z_j - z_{j-1}}{h^3}\ \phi'_j(r).$$

Вновь используя оценку (10) и учитывая, что производные от $\psi_{k,j}(r), (k = 1, 2), \phi_j(r)$ являются линейными функциями и потому достигают максимумов модулей в граничных точках соответствующих промежутков, с помощью простых преобразований приходим к следующему неравенству с некоторой абсолютной константой $B > 0$:

$$|S''(r)| \ \leq \ B\ \frac{N^2}{R^2}. \qquad (13)$$

Теперь обращаемся к (7) и применяем неравенства (11)-(13). В результате $\forall z \in \mathfrak{M}_\infty$ получаем

$$\|\Delta S(\cdot;z)\|_{C[0,R]} \;\le\; \max_{r\in[0,R]} |S''(r)| \;+(n-1)\max_{r\in[0,R]}\left|\frac{S'(r)}{r}\right| \le\; \frac{C_2}{h^2}.$$

Отсюда

$$A^N_\infty(B^n_R(0)) \;\le\; \sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty} \|\Delta S(\cdot;z)\|_\infty \;\le\; C_2\,\frac{N^2}{R^2}\;,$$

где C_2 — некоторая положительная константа, не зависящая от N и R.

Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что теорема 1 дает правильный порядок величины $A^N_\infty(B^n_R(0))$ по радиусу сферы R, но по количеству точек интерполяции N полученные в теореме оценки различаются на порядок: сверху N^2, в то время как снизу N. Однако, налагая дополнительные ограничения на взаимное расположение точек интерполяции (кроме того, что точки интерполяции находятся на равноотстоящих друг от друга концентрических сферах), мы можем добиться одинакового порядка исследуемой величины по N.

Теорема 2. *Если N достаточно велико и точки интерполяции выбраны так, что $|x^{(s)}| = R(\frac{s}{N})$, $s = 0,1,\dots,N-1$, причем $(N-2)$-я и $(N-1)$-я точки лежат на луче, выходящем из начала координат и расположены по одну сторону от него, то существует такое натуральное число N_0, что при всех $N \ge N_0$ выполняется*

$$C_1\,\frac{N^2}{R^2}\;\le A^N_\infty(B^n_R(0))\;\le C_2\,\frac{N^2}{R^2},$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы, не зависящие от N и R.

Доказательство. Получим оценку снизу. Пусть $n = 2$; для $n \ge 3$ рассуждения проводятся аналогично, а некоторые незначительные различия будут отмечены ниже.

Сначала рассмотрим случай, когда $(N-1)$-я и $(N-2)$-я точки, обозначенные соответственно через F и D, лежат на положительной части оси абсцисс, т.е.

$$F = \left(\frac{(N-1)R}{N}, 0 \right), \quad D = \left(\frac{(N-2)R}{N}, 0 \right).$$

Выбираем в шаре $\overline{B^2_R(0)}$ точки A, B, E следующим образом (см. рис.):

$$A = \left((N-1)\tfrac{R}{N}, -\tfrac{R}{N}\sqrt{2N-1}\right), \; B = \left((N-1)\tfrac{R}{N}, \tfrac{R}{N}\sqrt{2N-1}\right),$$
$$E = (R, 0).$$

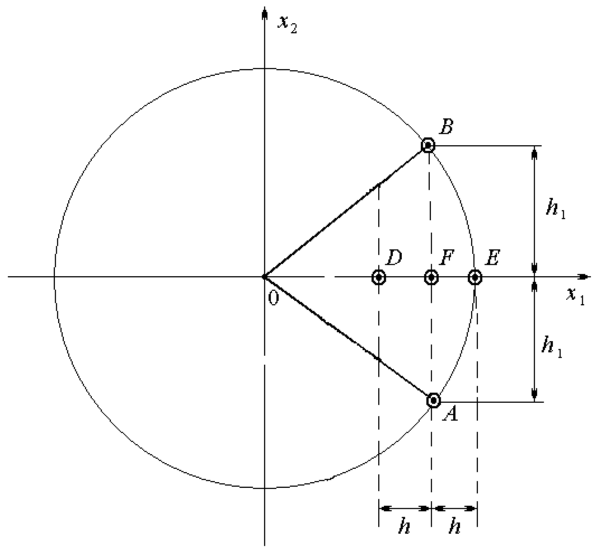

Рис.

Нетрудно видеть, что точки A, B, E лежат на границе шара $|x| = R$ и потому в этих точках любая функция из класса $Y_N(z)$ обращается в нуль.

Пусть $\delta_{k,\,\nu}$ — символ Кронекера и пусть $z^* = \{\delta_{j,N-1}\}_{j=1}^{N}$ — набор интерполируемых данных из класса $\mathfrak{M}_\infty$, а функция $u(x) \in Y_N(z^*)$ интерполирует единицу в

$(N-1)$-й точке и равна нулю во всех остальных точках интерполяции, т.е.

$$u(F) = 1,\ u(A) = u(B) = u(D) = u(E) = 0.$$

Обозначаем $h = R/N,\ h_1 = |\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{BF}|$. Поскольку $|\overrightarrow{DF}| = = |\overrightarrow{EF}| = h$, $|\overrightarrow{OD}| = (N-2)h$, то $h_1 = \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OF}|^2} = = h\sqrt{2N-1}$ (см. рис.).

Теперь для конечных разностей второго порядка функции $u(x)$ по каждой из переменных x_1, x_2 относительно точки F имеем

$$\frac{u(Nh,0) - 2u((N-1)h,0) + u((N-2)h,0)}{h^2} =$$

$$= \ u''_{x_1x_1}((N-1)h,0) + h^2\ \alpha_1(h),$$

$$\frac{u((N-1)h,h_1) - 2u((N-1)h,0) + u((N-1)h,-h_1)}{h_1^2} =$$

$$= \ u''_{x_2x_2}((N-1)h,0) + h_1^2\ \alpha_2(h_1),$$

где $\alpha_1(h)$ и $\alpha_2(h_1)$ — некоторые ограниченные функции от h и h_1 соответственно. (При $n \geq 3$ аналогичным образом оцениваются n конечных разностей второго порядка). Из этих соотношений получаем

$$2\left(\tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h_1^2}\right) = \left|\tfrac{u(E)-2u(F)+u(D)}{h^2} + \tfrac{u(B)-2u(F)+u(A)}{h_1^2}\right| \leq$$

$$\leq \ \|\Delta u\|_\infty + h^2\ |\alpha_1(h)| + h_1^2\ |\alpha_2(h_1)|.$$

Поскольку $h = R/N,\ h_1 = \frac{R}{N}\sqrt{2N-1}$, то

$$2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1^2}\right) = \frac{2N^2}{R^2}\left(1 + \frac{1}{2N-1}\right) > \frac{2N^2}{R^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\|\Delta u\|_\infty}{N^2} \ > \ \frac{2}{R^2} - \frac{R^2}{N^4}\Big(|\alpha_1(h)| \ + \ (2N-1)\ |\alpha_2(h_1)|\Big).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $N \to +\infty$, получаем

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\|\Delta u\|_\infty}{N^2} \;\geq\; \frac{2}{R^2}.$$

Следовательно, при всех достаточно больших значениях N выполняется неравенство

$$\|\Delta u\|_\infty \;\geq C\; \frac{N^2}{R^2}$$

с константой $C = 2$. Обращаясь к неравенству (6), получаем нужную оценку снизу.

Теперь рассмотрим случай, когда $(N-1)$-я и $(N-2)$-я точки интерполяции лежат на радиусе сферы, не совпадающем с отрезком положительной части оси абсцисс. В этом случае необходимо выполнить преобразование поворота вокруг начала координат на некоторый угол α, которое переводит луч, на котором лежат $(N-1)$-я и $(N-2)$-я точки интерполяции, в отрезок положительной части оси абсцисс новой системы координат. Известно, что такое преобразование записывается в виде

$$\widehat{x_1} = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \quad \widehat{x_2} = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

где $\widehat{x_1}, \widehat{x_2}$ — новые координаты, α — угол поворота. Это преобразование является ортогональным и поэтому сохраняет длины векторов. Также сохраняется уравнение окружности $|x| = R$, в чем нетрудно убедиться с помощью простых вычислений, а оператор Лапласа обладает свойством инвариантности относительно поворота, т.е. $\Delta F(\widehat{x}) = \Delta F(x)$.

При $n \geq 3$ преобразование поворота вокруг начала координат, определяемое углами $\alpha_k, k = 1, 2, \ldots, n-1$, задается квадратной матрицей, вдоль главной диагонали которой расположены блоки

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

а остальные ее элементы — нулевые. Матрица является ортогональной (см., например, [6, гл.4]), и все перечисленные выше свойства преобразования поворота, включая инвариантность оператора Лапласа, также имеют место. Оценка снизу доказана.

В качестве оценки сверху берем соответствующую оценку из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Для случая интерполяции в одной точке задача нахождения величины $A^1_\infty(B^n_R(0))$ решается точно.

Утверждение 1. $A^1_\infty(B^n_R(0)) = \frac{2n}{R^2}$.

Доказательство. Интерполируем в нуле значение, равное единице. Имеем

$$A^1_\infty(B^n_R(0)) \geq \inf_{f\in Y_1(1)} \|\Delta f\|_\infty.$$

Из [16, §4] следует, что inf достигается на единственном интерполянте $\widehat{f}$, причем $|\Delta\widehat{f}|$ имеет постоянное значение в $B^n_R(0)$. Нетрудно видеть, что этим интерполянтом является функция $\widehat{f}(x) = 1 - |x|^2 R^{-2}$, для которой $|\Delta\widehat{f}(x)| = 2nR^{-2}$. Следовательно

$$A^1_\infty(B^n_R(0)) \;\geq\; \frac{2n}{R^2}. \tag{14}$$

Пусть теперь $|z_1| \leq 1$ — произвольное число. В качестве функции $f \in Y_1(z_1)$ выбираем $f^*(x) = z_1(1 - \frac{|x|^2}{R^2})$. Поскольку

$$|\Delta f^*(x)| \;=\; 2nR^{-2}|z_1| \;\leq\; \frac{2n}{R^2},$$

то

$$A^1_\infty(B^n_R(0)) \;\leq\; \sup_{|z_1|\leq 1} \|\Delta f^*(\cdot, z_1)\| \;\leq\; \frac{2n}{R^2}. \tag{15}$$

Сопоставление (14) и (15) завершает доказательство.

Эти исследования были поддержаны РФФИ (проект 08 – 01 – 00320) и программой поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ – 1071.2008.1).

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
3. *Зорич В.А.* Математический анализ, т.2. — М.: МЦНМО, 1998.
4. *Новиков С.И.* Задачи экстремальной функциональной интерполяции // Тр. Международ. летней матем. школы С.Б.Стечкина по теории функций. — Тула: Изд.-во ТулГУ, 2007. — С. 100–109.

5. *Новиков С.И., Шевалдин В.Т.* Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2001. — **7**, № 1. — С. 144–159.

6. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.

7. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.

8. *Субботин Ю.Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. — 1965. — **78**. — С. 24–42.

9. *Субботин Ю.Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Труды МИАН СССР. — 1967. — **88**. — С. 30–60.

10. *Субботин Ю.Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Труды МИАН СССР. — 1975.— **138**. — С. 118–173.

11. *Субботин Ю.Н.* Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-ой производной при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. — 1996. — **59**, № 1. — С. 114–132.

12. *Субботин Ю.Н.* Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Известия РАН. Сер. матем. — 1997. — **61**, №1. — С. 177–198.

13. *Шарма А., Цимбаларио И.* Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. — 1977. — **21**, № 2. — С. 161–173.

14. *Шевалдин В.Т.* Об одной задаче экстремальной интерполяции // Матем. заметки. — 1981. — **29**, № 4. — С. 603–622.

15. *Шевалдин В.Т.* Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Труды МИАН СССР. — 1983. — **164**. — С. 203–240.

16. *Fisher S, Jerome J.* Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. — 1975. — **479**. — P. 1–209.