Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 240-247

УДК 517.518.845

Д.Ю. Мітін, М.О. Назаренко (Київ. нац. ун–т ім. Т. Шевченка)

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ТА ОЦІНКИ ПОХИБКИ ХАУСДОРФОВОГО ФРАКТАЛЬНОГО НАБЛИЖЕННЯ

Встановлено достатні умови збіжності послідовності ітерацій оператора фрактального перетворення у просторі сегментно неперервних сегментнозначних функцій з хаусдорфовою метрикою. Доведено оцінку похибки хаусдорфового фрактального наближення, що є аналогом теореми про колаж (нерівність типу Барнслі).

Питання збіжності ітерацій фрактального оператора досліджувалося в просторі обмежених функцій [1], неперервних [2], m разів неперервно диференційовних [2], інтегровних в степені p при $1 \le p < +\infty$ [1] та $0 < p < 1$ [3], а також в сенсі поточкової збіжності та збіжності майже скрізь [4]. В даній статті досліджується збіжність ітерацій фрактального оператора у просторі функцій з хаусдорфовою метрикою.

Нагадаємо деякі означення [5, 6]. Для функції $f : I \to \mathbb{R}$, обмеженої на відрізку $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{B}(I)$), позначимо через $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^2$ її *розширений графік*, тобто найменшу (в сенсі включення) замкнену опуклу за другою координатою множину, що містить графік f:

$$\mathcal{G}(f) := \bigcap_{\substack{G \supset f,\\ \overline{G} = G,\\ G \cap \{(x,y):\ x = \mathrm{const}\} \text{ — зв'язна}}} G\ .$$

Еквівалентним чином [5] розширений графік визначається й так:

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y) :\ y \in [\mathcal{I}(f, x), \mathcal{S}(f, x)],\ x \in I\},$$

де *нижня та верхня функції Бера* $\mathcal{I}(f, x) := \lim_{\delta \to +0} \mathcal{I}(f, x, \delta)$, $\mathcal{S}(f, x) := \lim_{\delta \to +0} \mathcal{S}(f, x, \delta)$ визначаються через *розширені нижню та верхню функції Бера* $\mathcal{I}(f, x, \delta) := \inf_{|y-x|<\delta} f(y)$, $\mathcal{S}(f, x, \delta) := \sup_{|y-x|<\delta} f(y)$ відповідно.

Далі функції з однаковими розширеними графіками будемо ототожнювати.

Хаусдорфовою відстанню між функціями f та g, породженою метрикою на площині

$$\rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \max(\alpha^{-1}|u_1-v_1|, |u_2-v_2|),\ \mathbf{u}=(u_1,u_2),\ \mathbf{v}=(v_1,v_2),\ \alpha>0,$$

називається

$$h_\alpha(f,g) := \max\big(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f)}\inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g)}\rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g)}\inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f)}\rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})\big).$$

Зазначимо, що при $\alpha \to 0+$ хаусдорфова відстань переходить у рівномірну.

Простий приклад фундаментальної послідовності

$$f_n(x) = nx\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x), \quad x \in I = [-1,1], \quad n \geq 1,$$

показує, що якщо накласти умову повноти на метричний простір функцій, то це призведе до необхідності розглядати *сегментнозначні функції* $f : I \to [\mathbb{R}]$, де

$$[\mathbb{R}] := \{[y_1,y_2] : -\infty < y_1 \leq y_2 < +\infty\}.$$

Тут і надалі $\mathbb{1}_A(x)$ — індикаторна функція множини A.

Означення $\mathcal{I}(f,x,\delta)$, $\mathcal{S}(f,x,\delta)$, $\mathcal{I}(f,\delta)$, $\mathcal{S}(f,\delta)$, $\mathcal{G}(f)$, $h_\alpha(f,g)$ поширюються на сегментнозначні функції.

Функція $f : I \to [\mathbb{R}]$ називається *сегментно неперервною* ($f \in \mathcal{SC}(I)$), якщо $\mathcal{G}(f) = f$. Мотивацією такої назви є те, що еквівалентним чином сегментно неперервні функції визначаються співвідношенням: $\mathrm{S}\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) \subset f(x_0)$, де S-lim — *сегментна границя в точці* сегментнозначної функції:

$$\mathrm{S}\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) := \bigvee_{\substack{\{x_n\}\subset I\\ x_n\neq x_0\\ x_n\to x_0,\ n\to\infty}} \mathrm{S}\text{-}\lim_{n\to\infty} f(x_n)\ ,$$

яка визначається через *сегментну границю* послідовності відрізків:

$$\mathrm{S}\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=n}^{\infty} a_k\ .$$

Тут було використано операцію *сегментного об'єднання* сім'ї відрізків:

$$\bigvee_{\tau \in T} a_\tau := \bigcap_{\substack{a \in [\mathbb{R}], \\ a \supset a_\tau,\ \tau \in T}} a \ ,$$

тобто ця операція ставить у відповідність послідовності відрізків найменший відрізок, що містить їх усіх.

Отже, маємо: $\mathcal{G}(f) \in \mathcal{SC}(I)$ для $f \in \mathcal{SC}(I)$. Відомо, що $\mathcal{SC}(I)$ — поповнення $\mathcal{B}(I)$ за метрикою h_α.

Для відрізка (чи напівінтервала) $J \subset I$ введемо позначення $\mathcal{G}(f, J) := \{(x, y) \in \mathcal{G}(f) : x \in J\}$ та

$$h_{\alpha,J}(f, g) := \max\Big(\sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{G}(f,J)} \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{G}(g,J)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{G}(g,J)} \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{G}(f,J)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big).$$

Введемо поняття оператора фрактального відображення. Нехай дано:

1) відрізки чи напівінтервали $I_1, \ldots, I_n$ (так звані *регіони*) та $I_1', \ldots, I_n'$ (так звані *домени*) такі, що: $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$, $I_i \cap I_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $I_i' \subset I$;

2) гомеоморфізми $\Phi_i(x, y) = (\varphi_i(x), \psi_i(x, y))$, $x \in I_i'$, $y \in \mathbb{R}$, $\varphi_i(I_i') = I_i$, $i = 1, \ldots, n$, причому виконуються умови Ліпшиця:

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leq d_i' |x_1 - x_2|,$$
$$|\psi_i(x_1, y_1) - \psi_i(x_2, y_2)| \leq d_i'' \rho_\alpha((x_1, y_1), (x_2, y_2)),$$

$x_1, x_2 \in I_i'$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $\max(d_i', d_i'') =: d_i$.

Існують різні конструкції фрактальних перетворень. В даній роботі розглянемо такий (взагалі кажучи, нелінійний) *оператор фрактального відображення* [6–8]:

$$(T(f))(x) := \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))) \mathbb{1}_{I_i}(x), \quad x \in I, \quad f \in \mathcal{B}(I). \quad (1)$$

Зрозуміло, що за накладених умов 1) та 2): $T(\mathcal{B}(I)) \subset \mathcal{B}(I)$. Розглянемо далі множину $\mathfrak{F} \subset \mathcal{B}(I)$ таку, що $T(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$. Позначаємо:

$$\gamma_i(\mathfrak{F}) := \sup_{\substack{f, g \in \mathfrak{F} \\ f \neq g}} \frac{h_{\alpha, I_i'}(f, g)}{h_\alpha(f, g)} \leq +\infty, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Твердження 1. *Нехай $\gamma_i(\mathfrak{F}) < +\infty$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Тоді оператор $T : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ є неперервним відносно метрики h_α. За неперервністю оператор T продовжується єдиним чином на $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{SC}(I)$. Оператор T визначений коректно на фактор-множині за введеним відношенням еквівалентності, тобто, якщо $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, то $\mathcal{G}(T(f)) = \mathcal{G}(T(g))$.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{G}(T(g)) \supset \mathcal{G}(T(g), I_i)$, маємо:

$$A(\mathbf{u}) := \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g))} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) =: A_i(\mathbf{u}).$$

Аналогічно:

$$B(\mathbf{v}) := \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f))} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) =: B_i(\mathbf{v}).$$

Крім того,

$$h_\alpha(T(f),T(g)) = \max(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f))} A(\mathbf{u}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g))} B(\mathbf{v})) = \\ = \max_{1\le i\le n} \max(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} A(\mathbf{u}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} B(\mathbf{v})).$$

Тому

$$h_\alpha(T(f),T(g)) \le \max_{1\le i\le n} \max(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} A_i(\mathbf{u}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} B_i(\mathbf{v})) = \\ = \max_{1\le i\le n} h_{\alpha,I_i}(T(f)1\!\!1_{I_i}, T(g)1\!\!1_{I_i}). \quad (2)$$

Далі, за означенням:

$$A_i := \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} A_i(\mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \\ = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(T(f),I_i)} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} \max(\alpha^{-1}|u_1-v_1|, |u_2-v_2|).$$

Оскільки $\Phi_i(x,y) = (\varphi_i(x), \psi_i(x,y))$ — гомеоморфізм, то $\mathcal{G}(T(f),I_i) = \Phi_i(\mathcal{G}(f,I_i'))$. Тому:

$$A_i = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,I_i')} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,I_i')} \max(\alpha^{-1}|\varphi(u_1)-\varphi(v_1)|, |\psi(u_1,u_2)-\psi(v_1,v_2)|) \le$$

$$\le \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,I_i')} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,I_i')} \max(d_i'\cdot\alpha^{-1}|u_1-v_1|, d_i''\cdot\alpha^{-1}|u_1-v_1|, d_i''|u_2-v_2|) \le$$

$$\le d_i \cdot \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,I_i')} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,I_i')} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Аналогічно:

$$\sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(T(g),I_i)} B_i(\mathbf{v}) \le d_i \cdot \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,I_i')} \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,I_i')} \rho_\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Тому

$$h_{\alpha,I_i}(T(f)1\!\!1_{I_i}, T(g)1\!\!1_{I_i}) \le d_i \cdot h_{\alpha,I_i'}(f1\!\!1_{I_i'}, g1\!\!1_{I_i'}). \tag{3}$$

З (2) та (3) випливає:

$$h_\alpha(T(f),T(g)) \le \max_{1\le i\le n} d_i\, h_{\alpha,I_i'}(f,g) \le \tag{4}$$

$$\le \max_{1\le i\le n} d_i\, \gamma_i(\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f,g) =: L_1(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f,g),$$

звідки отримуємо неперервність T.

Оператор T за неперервністю продовжується на $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{SC}(I)$ єдиним чином: $T(f) := \lim_{k\to\infty} T(f_k)$ для $\mathcal{B}(I) \supset \mathfrak{F} \ni f_k \to f \in \overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{SC}(I)$, $k\to\infty$. Вказана границя існує, оскільки:

$$h_\alpha(T(f_k),T(f_m)) \le L_1(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f_k,f_m) \to 0, \quad k,m\to\infty,$$

а простір повний. Це продовження є коректним, оскільки, якщо $\mathfrak{F} \ni f_k \to f \in \overline{\mathfrak{F}}$ та $\mathfrak{F} \ni g_k \to f \in \overline{\mathfrak{F}}$, $k\to\infty$, то

$$h_\alpha(T(f_k),T(g_k)) \le L_1(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f_k,g_k) \to 0, \quad k\to\infty.$$

Неперервність продовження оператора випливає з нерівності:

$$h_\alpha(T(f),T(g)) \le L_1(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f,g), \quad f,g\in\overline{\mathfrak{F}},$$

яку отримуємо за допомогою граничного переходу з такої нерівності:

$$h_\alpha(T(f_k),T(g_k)) \le L_1(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f_k,g_k)$$

при $\mathfrak{F} \ni f_k \to f \in \overline{\mathfrak{F}}$ та $\mathfrak{F} \ni g_k \to g \in \overline{\mathfrak{F}}$, $k\to\infty$.

Оператор T визначений коректно на фактор-множині множини $\mathcal{SC}(I)$ за введеним відношенням еквівалентності, що не розрізнює функції з однаковими розширеними графіками, оскільки, якщо $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, то $\mathcal{G}(f, I_i') = \mathcal{G}(g, I_i')$ для всіх i, а тому, враховуючи, що Φ_i — гомеоморфізм, маємо $\mathcal{G}(T(f), I_i) = = \mathcal{G}(T(g), I_i)$ для всіх i, звідки: $\mathcal{G}(T(f)) = \mathcal{G}(T(g))$.

Зауважимо, що формула (1) залишається в силі і для продовження T на $\overline{\mathfrak{F}}$, якщо розуміти дії в правій частині рівності як такі, що виконуються над кожним числовим значенням сегментнозначної функції f в даній точці x.

Перейдемо до вивчення граничної поведінки послідовності ітерацій фрактального оператора. Для цього сформулюємо таке означення.

Евентуально стискуючим оператором називається такий оператор, у якого існує його степінь, що є оператором стиску:

$$h_\alpha(T^{\circ k}(f), T^{\circ k}(g)) \le L_T^{(k)} \cdot h_\alpha(f,g), \quad 0 \le L_T^{(k)} < 1.$$

Найменший показник такого степеня називається *порядком* евентуально стискуючого оператора.

Умови стиску фрактального оператора було встановлено в [6] (для випадку простору хаусдорфово неперервних функцій та оператора дещо більш спеціального вигляду). Знайдемо умови евентуального стиску.

Для цього розглянемо множину $\mathfrak{F} \subset \mathcal{SC}(I)$ таку, що $T(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$. Позначимо:

$$L_k(T, \mathfrak{F}) := \max_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n} d_{i_1} \ldots d_{i_k} \gamma_{i_1, \ldots, i_k}(\mathfrak{F}) \le +\infty,$$

де

$$\gamma_{i_1, \ldots, i_k}(\mathfrak{F}) := \sup_{\substack{f,g \in \mathfrak{F} \\ f \ne g}} \frac{h_{\alpha, \varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1} \cap \varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2} \cap \ldots \varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k})\ldots))}(f,g)}{h_\alpha(f,g)} \le +\infty.$$

Твердження 2. *Нехай* $\inf_{k \ge 1} L_k(T, \mathfrak{F}) < 1$. *Тоді оператор* T — *евентуально стискуючий на* $\mathfrak{F}$.

Доведення. Аналогічно до того, як діяли при доведенні твердження 1, маємо з (4):

$$h_\alpha(T^{\circ k}(f), T^{\circ k}(g)) \leq \max_{1\leq i\leq n} d_i \cdot h_{\alpha, I_i'}(T^{\circ(k-1)}(f), T^{\circ(k-1)}(g)) \leq$$
$$\leq \max_{1\leq i_1\leq n} d_{i_1} \max_{1\leq i_2\leq n} d_{i_2} \cdot h_{\alpha,\, \varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2}\cap\varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1}))}(T^{\circ(k-2)}(f), T^{\circ(k-2)}(g)) \leq$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\leq \max_{1\leq i_1\leq n} d_{i_1} \dots \max_{1\leq i_k\leq n} d_{i_k} \times h_{\alpha,\, \varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k}\cap\varphi_{i_{k-1}}^{-1}(I_{i_{k-1}}\cap\dots\varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1})\dots))}(f,g) \leq$$
$$\leq \max_{1\leq i_1\leq n} d_{i_1} \dots \max_{1\leq i_k\leq n} d_{i_k} \cdot \gamma_{i_k,\dots,i_1}(\mathfrak{F})\; h_\alpha(f,g) = L_k(T,\mathfrak{F}) \cdot h_\alpha(f,g),$$

де залишилося вибрати таке $k \geq 1$, при якому $L_k(T,\mathfrak{F}) < 1$.

Наслідок. *За умови, що оператор T евентуально стискуючий на $\mathfrak{F} \subset \mathcal{SC}(I)$, у нього існує єдина нерухома точка $f_T^* \in \overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{SC}(I)$, причому для довільної $f \in \mathfrak{F}$ маємо експоненційно швидку збіжність: $T^{\circ k}(f) \to f_T^*$, $k \to \infty$, у $\mathcal{SC}(I)$.*

Для доведення досить застосувати відоме узагальнення принципу стискуючих відображень (на випадок відображення, у якого існує його степінь, що є стискуючим) до повного простору $(\overline{\mathfrak{F}}, h_\alpha)$.

Часто ця нерухома точка є функцією, графік якої має дробову вимірність (наприклад, за Хаусдорфом–Безіковичем) або графіку якої притаманна певна властивість типу самоподібності. Це пояснює використання терміну «фрактальна апроксимація».

Доведемо одну оцінку похибки хаусдорфового фрактального наближення, що є аналогом *теореми про колаж* (нерівність типу Барнслі) [7, 8]. Для зручності формулювання покладемо: $L_k(T,\mathfrak{F}) =: L_k$.

Твердження 3. *За умов, що оператор T евентуально стискуючий порядку m на $\mathfrak{F} \subset \mathcal{SC}(I)$ та $L_k(T,\mathfrak{F}) < +\infty$ при $k = 1,\dots,m$, мають місце нерівності:*

$$h_\alpha(f, f_T^*) \leq \frac{1 + L_1 + \ldots + L_{m-1}}{1 - L_m}\, h_\alpha(f, T(f)).$$

Доведення. Маємо:

$$h_\alpha(f, f_T^*) \leq \sum_{k=0}^{m-1} h_\alpha(T^{\circ k}(f), T^{\circ(k+1)}(f)) + h_\alpha(T^{\circ m}(f), f_T^*) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} L_k \cdot h_\alpha(f, T(f)) + L_m \cdot h_\alpha(f, f_T^*),$$

звідки й отримуємо оцінку на $h_\alpha(f, f_T^*)$.

Аналогічні твердження встановлюються у випадку хаусдорфової апроксимації у просторі *хаусдорфово неперервних* функцій $\mathcal{HC}(I) \subset \mathcal{SC}(I)$. Перевагою цього простору на відміну від $\mathcal{SC}(I)$ є можливість введення на ньому структури лінійного простору. Проте через його неповноту виникає необхідність накладати додаткові обмеження на множину $\mathfrak{F}$ типу одностайної хаусдорфової неперервності, тобто умови рівномірного за функцією сім'ї $\mathfrak{F}$ прямування до нуля так званого *хаусдорфового модуля неперервності* функції [6].

Крім того, узагальнення доведених тверджень справджуються для сегментнозначних функцій багатьох змінних. Особливо цікавим з точки зору застосувань є випадок функцій двох змінних через можливість його застосування у задачах стиску та кодування зображень [8].

1. *Мітін Д.Ю., Назаренко М.О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 2. — С. 161–175.

2. *Мітін Д.Ю., Назаренко М.О.* Інваріантність підпросторів неперервних та гладких функцій відносно фрактальних перетворень// Вісник Київ. ун-ту. Серія «Математика. Механіка». — 2007. — Вип. 18. — С. 91–96.

3. *Мітін Д.Ю., Назаренко М.О.* Фрактальна апроксимація у просторах L_p, $0 < p < 1$// Вісник Київ. ун-ту. Серія «Математика. Механіка». — 2008. — Вип. 19. (Прийнято до друку.)

4. *Мітін Д.Ю., Назаренко М.О.* Поточкова фрактальна апроксимація функцій// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, № 1. — С. 200–211.

5. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. — София: Болг. АН, 1979. — 372 с.

6. *Sendov Bl.* Mathematical modeling of real-world images// Constructive Approximation. — 1996. — **12**, № 1. — P. 31–65.

7. *Barnsley M.F.* Fractals everywhere. — Boston: Academic Press, 1993. — 533 p.

8. *Barnsley M.F., Hurd L.P.* Fractal image compression. — Wellesley: A.K. Peters, 1993. — 244 p.