Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 227-239

УДК 517.927

В. А. Михайлец, Н. В. Рева
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В работе исследуется непрерывность по параметру решений общих краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Получено обобщение теоремы Кигурадзе. Найдены достаточные условия сходимости матриц Грина к матрице Грина предельной краевой задачи по норме пространства L_∞.

1. Введение. Рассмотрим параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство общих линейных краевых задач для системы $m \in \mathbb{N}$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1_ε}$$

$$U_\varepsilon y(t;\varepsilon) = c_\varepsilon. \tag{2_ε}$$

Здесь квадратные матрицы - функции $A(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}) =: L^{m\times m}$, вектор - функции $f(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^m) =: L^m$, векторы $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а линейные непрерывные операторы

$$U_\varepsilon : C([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m.$$

Под решением системы дифференциальных уравнений (1_ε) понимается вектор - функция $y(t;\varepsilon) \in W_1^1([a,b];\mathbb{C}^m) =: AC^m$, которая почти всюду на конечном отрезке $[a,b]$ имеет производную по t, для которой равенство (1_ε) выполняется на подмножестве полной меры Лебега, которое зависит от решения. Неоднородное „общее“ краевое условие вида (2_ε) охватывает все классические виды краевых условий: задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые задачи (см. [1] и приведенные там ссылки). Будем предполагать всюду далее, что выполнено

Предположение $\mathcal{E}$. *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \quad U_0y(t;0) = 0,$$

имеет только тривиальное решение.

Это условие равносильно тому, что неоднородная краевая задача $(1_0),(2_0)$ имеет решение при произвольных вектор - функции $f(t;0) \in L^m$, векторе $c_0 \in \mathbb{C}^m$ и оно является единственным в классе AC^m. В частности, оно заведомо выполняется, если $U_0y := y(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$.

В работе [2] установлена следующая

Теорема (И. Т. Кигурадзе). *Пусть для задачи* $(1_0),(2_0)$ *выполнено предположение* $\mathcal{E}$ *и следующие условия:*

1) $\sup\limits_{\varepsilon} \|A(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;
2) $\sup\limits_{\varepsilon} \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;
3) $\sup\limits_{\varepsilon} \|U_\varepsilon\| < \infty$;
4) $\max\limits_{t\in[a,b]} |\int\limits_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s;0)ds| \to 0, \quad \varepsilon \to +0$;
5) $\max\limits_{t\in[a,b]} |\int\limits_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t f(s;0)ds| \to 0, \quad \varepsilon \to +0$;
6) $c_\varepsilon \to c_0, \quad \varepsilon \to +0$
7) $U_\varepsilon y \to U_0 y, \quad \forall y \in AC^m$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *задача* $(1_\varepsilon),(2_\varepsilon)$ *имеет единственное решение и*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Здесь и всюду далее $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а $\|\cdot\|_C$ — sup - норма

Цель данной работы — максимально ослабить условия теоремы Кигурадзе на росток отображения $A(\cdot;\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ и найти условия, которые кроме того обеспечивают сходимость матриц Грина рассматриваемых задач к матрице Грина предельной краевой задачи по норме пространства L_∞ на квадрате $[a,b]\times[a,b]$.

2. Основные результаты. Обозначим через $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m$, $m \in \mathbb{N}$ класс всех комплекснозначных $(m \times m)$ — матриц - функций

$$R(t;\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to L^{m\times m},$$

для которых матричное решение $Z(t;\varepsilon)$ задачи Коши

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \quad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|Z(t;\varepsilon) - I_m\|_C = 0,$$

где I_m – единичная $(m \times m)$ - матрица.

В работах [3, 4, 5, 6, 7] при выполнении *дополнительных* априорных предположений найдены необходимые и достаточные условия того, что матричная функция $R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$. Примеры показывают [6], что эти классы не являются аддитивными. Возможно, что они не являются также и однородными.

Теорема 1. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия* 1), 4) *одним более общим условием*

$$R(t;\varepsilon) := A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m. \tag{3}$$

Условие (3) на коэффициенты системы в теореме 1 уже нельзя ослабить. Оно является *необходимым*, если $U_\varepsilon y \equiv y(a)$.

Положим для матрицы - функции $R(t) \in L^{m\times m}$ и вектор - функции $f(t) \in L^m$:

$$R^\vee(t) := \int_a^t R(s)ds, \quad f^\vee(t) := \int_a^t f(s)ds.$$

Тогда условия 4) и 5) можно переписать соответственно в виде:

4′) $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0;$

5′) $\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$

Из результатов работ [5, 6] следует, что если при $\varepsilon \to +0$ выполнено любое из четырех условий:

(α) $\|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 \le$const,

(β) $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,$

(γ) $\|R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,$

(Δ) $\|R^\vee(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon) - R(\cdot;\varepsilon)R^\vee(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0,$

то условие (3) равносильно условию 4′). В общем случае условие 4′) не является ни необходимым, ни достаточным для выполнения условия (3). Ниже будет приведен пример, в котором выполнено соотношение (3), однако не выполняется ни одно из условий (α), (β), (γ), (Δ) и тем более условие 1) теоремы Кигурадзе.

Доказательство теоремы 1 выделено в п. 3 данной работы.

Как известно (см. например [2]) для общей краевой задачи

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad Uy(t) = 0$$

существует матрица Грина, т. е. матричная функция $G(t,s) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ с помощью которой решение краевой задачи может быть представлено в виде:

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,s)f(s)ds, \quad t \in [a,b], \quad f(\cdot) \in L^m.$$

Для семейства краевых задач $(1_\varepsilon), (2_\varepsilon)$ эта матрица зависит от параметра ε. Поэтому представляет интерес вопрос о непрерывности по параметру ε матричной функции $G(t,s;\varepsilon)$. Ответ на него дает

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение $\mathcal{E}$ и условия:*

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}^m$;

2) *операторы U_ε равномерно сходятся к оператору U_0, т. е.*

$$\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{4}$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют матрицы Грина задач $(1_\varepsilon), (2_\varepsilon)$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t,s\leqslant b} |G(t,s;\varepsilon) - G(t,s;0)| \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Доказательство теоремы 2 выделено в п. 4 данной работы. Там же приведен пример, который показывает, что условие 2) теоремы 2 нельзя заменить более слабым условием *сильной* сходимости U_ε и U_0, которое равносильно паре условий 3), 7) теоремы Кигурадзе.

3. Доказательство теоремы 1. Сформулируем сначала утверждение общего характера, которое будет многократно использоваться при доказательстве теорем 1 и 2.

Пусть $\mathcal{B}$ – банахова алгебра с единицей, а *Inv* $\mathcal{B}$ – мультипликативная группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{B}$.

Лемма 1 (см. например [9]).
(1) *Отображение* $X \mapsto X^{-1}$ *является непрерывным по норме* $\mathcal{B}$ *на множестве Inv* $\mathcal{B}$;
(2) *Отображение* $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$ *является непрерывным на* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

В частности, можно положить в лемме 1 $\mathcal{B} = C([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}) =: (C)^{m\times m}$. Это (некоммутативная при $m \geq 2$) банахова алгебра с единицей I_m и нормой

$$\|X\|_C := \max_{a\leqslant t\leqslant b} |X(t)|, \quad |X| := \sum_{i,j} |x_{i,j}|$$

Можно также положить $\mathcal{B} = L_\infty([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}) =: L_\infty^{m\times m}$. Это более широкая чем $(C)^{m\times m}$ (некоммутативная при $m \geq 2$) банахова алгебра с нормой

$$\|X\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t\leqslant b} |X(t)|.$$

Пусть $Y(t; \varepsilon)$ – единственное решение матричной краевой задачи

$$Y'(t; \varepsilon) = A(t; \varepsilon)Y(t; \varepsilon), \quad Y(a; \varepsilon) = I_m.$$

Отправным моментом в нашем доказательстве теоремы 1 является принцип редукции А. Ю. Левина [5, 6], который в наших определениях имеет следующий вид:

Лемма 2. *Предельное соотношение*

$$\|Y(\cdot; \varepsilon) - Y(\cdot; 0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0$$

выполняется в том и только в том случае, если

$$A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0) =: R(\cdot; \varepsilon) \in \mathcal{M}^m.$$

Рассмотрим наряду с исходной неоднородной краевой задачей $(1_\varepsilon), (2_\varepsilon)$ относительно вектор- функции $y(t; \varepsilon)$ еще три векторные краевые задачи:

$$z'(t; \varepsilon) = A(t; \varepsilon)z(t; \varepsilon), \quad U_\varepsilon z(t; \varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{4_ε}$$

$$x'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) \equiv 0, \tag{5_ε}$$

$$w'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad U_\varepsilon w(t;\varepsilon) \equiv 0. \tag{6_ε}$$

Как известно, краевая задача (5_ε) (задача Коши) всегда имеет решение и оно единственно.

Лемма 3. *Если выполнено предположение* $\mathcal{E}$, *то каждая из задач:* $(1_\varepsilon) - (2_\varepsilon), (4_\varepsilon)$ и (6_ε) *при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$ *имеет ровно одно решение в классе* AC^m.

Доказательство состоит в проверке единственности решений соответствующих задач. Для этого достаточно показать, что при малых ε однородная краевая задача

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon), \quad U_\varepsilon y(t;\varepsilon) = 0$$

имеет только тривиальное решение. Каждое из решений однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon, \quad \widetilde{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

где $Y(t;\varepsilon)$ – матрицант этого уравнения. Откуда в силу краевого условия имеем:

$$[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0,$$

где i-тый столбец $(m \times m)$ – матрицы $[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]$ совпадает с действием линейного опертора U_ε на i-тый столбец матрицы $Y(t;\varepsilon)$.

Квадратная матрица $[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]$ непрерывно зависит от ε в силу леммы 2 и сильной непрерывности при $\varepsilon = 0$ операторной функции U_ε. Кроме того, в силу предположения $\mathcal{E}$

$$\det[U_0 Y(t;0)] \neq 0.$$

Поэтому в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ допредельная функция

$$\det[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)] \neq 0.$$

Откуда следует, что в этой окрестности вектор $\widetilde{c}_\varepsilon \equiv 0$ и лемма доказана.

Из леммы 3 следует,что при малых $\varepsilon > 0$

$$y(t;\varepsilon) = z(t;\epsilon) + w(t;\epsilon).$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать,что при ее условиях

$$\|z(t;\varepsilon)-z(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0, \tag{7}$$

$$\|w(t;\varepsilon)-w(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{8}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливо предельное соотношение* (7).

Доказательство. Первое из равенств (4_ε) дает нам, что

$$z(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\widetilde{c}_\varepsilon.$$

Откуда в силу второго из равенств (4_ε) получаем, что

$$[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]\widetilde{c}_\varepsilon = c_\varepsilon.$$

Поэтому, по уже доказанному, при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{c}_\varepsilon = [U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]^{-1} c_\varepsilon.$$

В силу лемм 1, 2

$$|[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]^{-1} - [U_0 Y(t;0)]^{-1}| \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Кроме того, по условию $c_\varepsilon \to c_0$. Поэтому при $\varepsilon \to +0$ $\quad \widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$. Откуда следует нужное нам соотношение (7).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия:*

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) =: R(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$;
2) $\sup\limits_{\varepsilon} \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 = c < \infty$;
3) $\|f^\vee(\cdot;\varepsilon) - f^\vee(\cdot;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$

Тогда

$$\|x(t;\varepsilon)-x(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{9}$$

Доказательство. Из условия 1) в силу принципа редукции вытекает, что

$$\|Y(t;\varepsilon)-Y(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Откуда в силу леммы 1 следует, что

$$\|Y^{-1}(t;\varepsilon)-Y^{-1}(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Как известно, решение $x(t;\varepsilon)$ задачи (5_ε) может быть представлено в виде

$$x(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\int_a^t Y^{-1}(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds.$$

Поэтому ввиду леммы 1 достаточно доказать, что

$$\int_a^t Y^{-1}(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds \xrightarrow{C} \int_a^t Y^{-1}(s;0)f(s;0)ds.$$

Из оценки

$$\|\int_a^t [Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)]f(s;\varepsilon)ds\|_C \leq$$

$$\leqslant \int_a^t |Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)| \cdot |f(s;\varepsilon)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \|Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)\|_C \cdot \sup_\varepsilon \|f(s;\varepsilon)\|_1 \leq$$

$$\leqslant c \quad \|Y^{-1}(s;\varepsilon) - Y^{-1}(s;0)\|_C \to 0$$

вытекает, что достаточно доказать, что

$$\|\int_a^t Y^{-1}(s;0)[f(s;\varepsilon) - f(s;0)]ds\|_C \to 0.$$

Интегрируя интеграл по частям имеем:

$$\|\int_a^t Y^{-1}(s;0)[f(s;\varepsilon) - f(s;0)]ds\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \|\int_a^t (Y^{-1})'(s;0)[f^\vee(s;\varepsilon) - f^\vee(s;0)]ds\|_C +$$

$$+2\|Y^{-1}(s;0)\|_C \cdot \|f^{\vee}(s;\varepsilon) - f^{\vee}(s;0)\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_C \cdot (2\|Y^{-1}(s;0)\|_C + \|Y^{-1}(s;0)\|_C^2 \cdot \|Y'(s;0)\|_1) \to 0,$$
$$\varepsilon \to +0,$$

т. к.

$$(Y^{-1})'(s;\varepsilon) = -Y^{-1}(s;\varepsilon)Y'(s;\varepsilon)Y^{-1}(s;\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *При условиях теоремы 1 справедливо предельное соотношение* (8).

Доказательство. Положим

$$v(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - w(t;\varepsilon).$$

Тогда вектор - функция $v(t;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$v'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad U_\varepsilon v(t;\varepsilon) = U_\varepsilon x(t;\varepsilon) =: \widetilde{c}_\varepsilon.$$

Но

$$\|U_\varepsilon x(t;\varepsilon) - U_0 x(t;0)\|_C \leqslant \|U_\varepsilon\| \|x(t;\varepsilon) - x(t;0)\|_C + \|(U_\varepsilon - U_0)x(t;0)\|_C \to 0,$$

т. е. $\widetilde{c}_\varepsilon \to \widetilde{c}_0$ при $\varepsilon \to +0$. Поэтому

$$v(t;\varepsilon) = Y(t;\varepsilon)\overline{c}_\varepsilon, \quad \overline{c}_\varepsilon \in \mathbb{C}^m,$$

где $[U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]\overline{c}_\varepsilon = \widetilde{c}_\varepsilon$ и при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\overline{c}_\varepsilon = [U_\varepsilon Y(t;\varepsilon)]^{-1}\widetilde{c}_\varepsilon \to [U_0 Y(t;0)]^{-1}\widetilde{c}_0 = \overline{c}_0.$$

Откуда следует, что

$$\|v(t;\varepsilon) - v(t;0)\|_C \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{10}$$

Из равенства $w(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - v(t;\varepsilon)$ и уже доказанных соотношений (9)и (10) следует асимптотическое соотношение (8).

Лемма 6, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Приведем пример, в котором выполнено соотношение (3), однако не выполняется ни одно из условий (α), (β), (γ), (Δ). Он, в частности, показывает, что теорема 1 сильнее теоремы Кигурадзе.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $[a,b] = [0,1]$, $A(t;\varepsilon) = A(t)+R(t;\varepsilon)$, где

$$R(t;\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\frac{t}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\frac{2t}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\|R^{\vee}(t;\varepsilon)\|_C \to 0$ и

$$R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon) = diag\,\{\frac{1}{2}\sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon}, \quad \sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon}\},$$

$$R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) = diag\,\{\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{2}\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}\},$$

$$R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon) = diag\,\{-\frac{1}{2}\sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{2}\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}\}.$$

Однако:

$$\|R(t;\varepsilon)\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^1 |\cos\frac{t}{\varepsilon}|dt = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} |\cos t|dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}M\{|\cos t|\} \to +\infty,$$

$$\int_0^1 |\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}|dt = \varepsilon\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} |\sin t|\cdot|\sin 2t|dt \to M\{|\sin t\cdot\sin 2t|\} > 0,$$

[10, с. 384]. Поэтому ни одно из четырех приведенных выше условий здесь не выполнено. Однако, пользуясь теоремой 6 работы [7] при $i = 1$, нетрудно убедиться, что $R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^2$.

4. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим полуоднородную векторную краевую задачу

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad Uy(t) = 0, \tag{11}$$

где $A(\cdot) \in L^{m\times m}$, $f(\cdot) \in L^m$, $U \in \mathcal{L}((C)^m;\mathbb{C}^m)$. Тогда из теоремы Ф. Рисса о линейных функционалах на пространстве C следует, что справедливо однозначное представление

$$Uy(t) = \int_a^b [dH(t)]y(t), \quad y(\cdot) \in (C)^m,$$

где $H(\cdot) \in \dot{V}([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}) =: \dot{V}^{m\times m}$ – банахово пространство комплекснозначных $(m\times m)$ – матриц - функций с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$, которые равны 0 в точке a и непрерывны справа на полуинтервале $[a,b)$. Поэтому для матрицанта $Y(t)$ системы (11) на отрезке $[a,b]$ определена заданная интегралом Стильтьеса матрица - функция:

$$H_Y(t) = \int\limits_a^t [dH(s)]Y(s). \tag{12}$$

При этом, если однородная краевая задача (11) имеет только тривиальное решение, то

$$\det H_Y(b) \neq 0 \tag{13}$$

и существует матрица $H_Y^{-1}(b)$.

Лемма 7. ([8]) *Если выполнено неравенство* (13), *то матрица Грина задачи* (11) *существует и представима в виде:*

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ -Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leqslant t < s \leqslant b. \end{cases}$$

Поэтому для доказательства теоремы 2 в силу леммы 1 достаточно показать, что при выполнении ее условий для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\det H_Y(b;\varepsilon) \neq 0$ и

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to +0,$$

$$\|H_Y(\cdot;\varepsilon) - H_Y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

Первое из предельных соотношений уже установлено нами, т. к.

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_\infty = \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_C.$$

Кроме того, имеем:

$$\|H_Y(t;\varepsilon) - H_Y(t;0)\|_\infty = \|\int\limits_a^b [dH(s;\varepsilon)]Y(s;\varepsilon) - \int\limits_a^b [dH(s;0)]Y(s;0)\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \| \int_a^b [d(H(s;\varepsilon) - H(s;0))] Y(s;\varepsilon) \|_\infty + \| \int_a^b [dH(s;0)] \cdot [Y(s;\varepsilon) - Y(s;0)] \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant V_a^b[H(s;\varepsilon) - H(s;0)] \cdot \|Y(s;\varepsilon)\|_C + V_a^b[H(s;0)] \cdot \|Y(s;\varepsilon) - Y(s;0)\|_C \to 0,$$

т.к. в силу условия $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0$ вариация матрицы - функции

$$V_a^b[H(s;\varepsilon) - H(s;0)] \to 0.$$

Теорема доказана.

Приведем обещанный выше

Пример 2. Пусть $m = 1$, $[a, b] = [0, 1]$, $A(t, \varepsilon) = A(t, 0) = 0$, а линейные непрерывные операторы $U_\varepsilon : C([0, 1]; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ заданы равенством

$$U_\varepsilon y(t) := y(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Определенные таким образом операторы U_ε сильно сходятся к оператору U_0 на пространстве $(C)^m$:

$$U_\varepsilon y(t) = y(\varepsilon) \to y(0), \quad \varepsilon \to 0, \quad \forall y(\cdot) \in C([0, 1]; \mathbb{C}).$$

Однако равномерной сходимости операторов U_ε к U_0 нет, т. к.

$$\|U_\varepsilon - U_0\| = 2, \quad \varepsilon \neq 0.$$

В данном случае функция Грина задачи

$$y'(t; 0) = f(t), \quad y(t; 0)|_{t=0} = 0$$

имеет вид:

$$G(t, s; 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

а для задачи

$$y'(t; \varepsilon) = f(t), \quad y(t; \varepsilon)|_{t=\varepsilon} = 0$$

соответственно будет

$$G(t, s; \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1; \\ 0, & 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant 1; \\ -1, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1; \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant s, \quad \varepsilon \leqslant s < 1. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant t,s\leqslant b} |G(t,s;\varepsilon) - G(t,s;0)| = 1, \quad \varepsilon \neq 0.$$

Исследование В. А. Михайлеца поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 01.07/00252.

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 703 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. проблемы математики. Новейшие достижения, т. 30. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – С. 3 - 103.
3. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Diff. Equat. – 1967. – 3, № 3. – P. 423 - 439.
4. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Diff. Equat. – 1967. – 3. – P. 571 - 579.
5. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$.// Докл. АН СССР. – 1967. – 176, № 4. – С. 774 - 777.
6. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I. // Вестник Ярославского университета. – 1973. – Вып. 5. – С. 105 - 132.
7. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. – 1993. – 29, №6. – С. 970 - 975.
8. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Из- во Тбилисского ун-та. – 1975. – 352 с.
9. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – Москва: Гос. из- во физ.- мат. литературы. – 1960. – 316 с.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.