Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 205-226

УДК 517.982.27+517.956.222

В. А. Михайлец, А. А. Мурач
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ХЕРМАНДЕРА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Описан класс всех интерполяционных гильбертовых пространств для пар гильбертовых пространств Соболева. Доказано, что он в точности состоит из изотропных L_2-пространств Хермандера с весовыми функциями, RO-меняющимися на ∞. В этих пространствах исследованы равномерно эллиптические псевдодифференциальные операторы, заданные в $\mathbb{R}^n$. Получена априорная оценка и изучена внутренняя гладкость решения эллиптического уравнения. Описан класс эквивалентных норм в интерполяционных пространствах Хермандера.

1. Введение. В теории эллиптических уравнений известно [1, 2], что если правая часть уравнения имеет некоторую гладкость $s \in \mathbb{R}$ в шкале пространств Соболева, то решение будет иметь в этой шкале внутреннюю гладкость $s+m$, где m — порядок уравнения. Кроме того, эллиптический оператор нетеров (имеет конечный индекс) в соответствующей паре соболевских пространств, заданных на замкнутом (компактном) гладком многообразии. Аналогичный результат верен и для эллиптических краевых задач. Указанные свойства имеет не всякая шкала функциональных пространств. Например [3, с. 74], из условия $\Delta u \in C$ не следует, что $u \in C^2$.

Основной результат статьи заключается в описании *всех* (с точностью до эквивалентности норм) интерполяционных гильбертовых пространств для пар гильбертовых пространств Соболева $H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, где $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ и $s_0 < s_1$. Оказалось, что класс этих интерполяционных пространств в точности состоит из изотропных L_2-пространств Хермандера [4, 5] с весовыми функциями, RO-меняющимися на бесконечности. Класс таких функций введен Авакумовичем [6] в 1936 г. и достаточно полно изучен (см., например, [7, с. 86–99]). Поскольку при интерполяции сохраняется непрерывность линейных операторов и (при неизменном дефекте) их нетеровость, это позволяет распространить теорию эллиптических операторов на пары интерполяционных пространств Хермандера.

Статья состоит из 7 пунктов. В пп. 2–3 приведена необходимая информация о правильно осциллирующих функциях и о свойствах интерполяционных гильбертовых пространств. Основной результат статьи доказан в п. 4 (теоремы 1 и 2). В пп. 5–6 изучен равномерно эллиптический в $\mathbb{R}^n$ псевдодифференциальный оператор (ПДО) в парах интерполяционных пространств Хермандера. Доказана априорная оценка решения равномерно эллиптического уравнения (теорема 3) и исследована его внутрення гладкость (теорема 4). В п. 7 с помощью равномерно эллиптических и положительно определенных ПДО построены эквивалентные нормы в интерполяционных пространствах Хермандера (теоремы 5 и 6).

Аналогичные результаты справедливы на замкнутых (компактных) гладких многообразиях и будут приведены в другом месте. Для более узкой шкалы пространств Хермандера (уточненная шкала) эллиптические операторы и эллиптические краевые задачи изучены в работах авторов [8–15]. Эти пространства привязаны к пространствам Соболева с помощью числового параметра.

В случае, когда многообразие есть окружность, пространства Хермандера тесно связаны с пространствами периодических функций, введенных другим способом А. И. Степанцом [16].

Отметим, что существуют интерполяционные негильбертовы пространства для пары гильбертовых пространств Соболева $H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, например [17, с. 223] банаховы пространства Бесова-Никольского $B^s_{2,q}(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq q \leq \infty$ и $q \neq 2$. В монографиях Х. Трибеля [17, 18] эллиптические краевые задачи изучены в различных интерполяционных шкалах банаховых и более общих пространств, параметризированных числовым набором.

Пространства Хермандера и их различные обобщения (пространства обобщенной гладкости) являются в настоящее время предметом различных исследований (см. обзор [19], недавнюю работу [20] и приведенную там литературу). Использование в качестве показателя гладкости не числового набора, а функционального параметра позволяет зачительно точнее описать свойства распределений. Отметим, что интерполяционные свойства ряда пространств обобщенной гладкости изучены в [21, 22].

2. Правильно осциллирующие функции. Приведем базисное для нас

Определение 1. Пусть RO — множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, удовлетворяющих условию

$$(\exists\, a > 1)\ (\exists\, c > 1)\ (\forall\, t \geq 1)\ (\forall\, \lambda \in [1,a]):\quad c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c, \quad (1)$$

где постоянные a и c зависят от φ. Такие функции называют *RO-меняющимися* на бесконечности [7, с. 86].

Отметим некоторые важные свойства функций класса RO [7, с. 87-89].

Предложение 1. *Всякая функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *ограничена и отделена от нуля на каждом отрезке* $[1,b]$, *где* $1 < b < \infty$.

Предложение 2. *Справедливо следующее описание класса* RO*:*

$$\varphi \in \mathrm{RO} \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \exp\Bigl(\beta(t) + \int_1^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau}\, d\tau\Bigr), \;\; t \geq 1,$$

где вещественные функции β *и* ε *измеримы по Борелю и ограничены на полуоси* $[1,\infty)$.

Предложение 3. *Для произвольной фунции* $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ *условие* (1) *равносильно следующему:*

$$\begin{gathered}(\exists\, s_0, s_1 \in \mathbb{R}, s_0 \leq s_1)\ (\exists\, c \geq 1)\ (\forall\, t \geq 1)\ (\forall\, \tau \geq t):\\ t^{-s_0}\varphi(t) \leq c\,\tau^{-s_0}\varphi(\tau), \quad \tau^{-s_1}\varphi(\tau) \leq c\,t^{-s_1}\varphi(t).\end{gathered} \quad (2)$$

Условие (2) показывает, что функция $t^{-s_0}\varphi(t)$ эквивалентна некоторой возрастающей функции, а функция $t^{-s_1}\varphi(t)$ эквивалентна некоторой убывающей функции на полуоси $[1,\infty)$.[1] Положив $\lambda := \tau/t$ в условии (2), перепишем его в эквивалентном виде:

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c\lambda^{s_1} \quad \forall\;\, t \geq 1,\ \lambda \geq 1. \quad (3)$$

Для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ обозначим:

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} :\ \text{выполняется (3)}\},$$

[1] Эквивалетность понимается в слабом смысле, а возрастание и убывание — в нестрогом смысле.

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{выполняется (3)}\}.$$

Очевидно, что $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$.

Доопределив $\varphi(t) := \varphi^2(1)/\varphi(t^{-1})$ при $0 < t < 1$, получим положительную на полуоси $(0, \infty)$ функцию φ, для которой (3) влечет условие

$$c^{-2}\lambda^{s_0} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c^2\lambda^{s_1} \quad \forall\ t > 0,\ \lambda \geq 1.$$

Отсюда следует, что числа $\sigma_0(\varphi)$ и $\sigma_1(\varphi)$ равны соответственно нижнему и верхнему показателям растяжения функции φ [23, с. 76]. Их можно вычислить по формулам [23, с. 75]

$$\sigma_0(\varphi) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\log M_\varphi(\lambda)}{\log\lambda}, \quad \sigma_1(\varphi) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log M_\varphi(\lambda)}{\log\lambda}, \tag{4}$$

где

$$M_\varphi(\lambda) := \sup_{t>0} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}, \quad \lambda > 0,$$

— функция растяжения функции φ. Отметим [24], что правые части формул (4) равны по определению нижнему и верхнему индексам Бойда функции M_φ.

В важном случае $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) =: \sigma$ число σ называют *порядком изменения* функции φ. Отметим, что всякая измеримая по Борелю функция $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, правильно меняющаяся по Карамата порядка на бесконечности [7, с. 9], а также ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[1, b]$, где $1 < b < \infty$, принадлежит классу RO и имеет порядок изменения σ. Это вытекает из [7, с. 26 – 27] и предложения 3.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Тогда функция* $\varphi(\langle\xi\rangle)$, *где* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, *является весовой в смысле Волевича–Панеяха [25, с. 9], т. е.*

$$(\exists\, c \geq 1)\ (\exists\, l > 0)\ (\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n):\ \ \varphi(\langle\xi\rangle)/\varphi(\langle\eta\rangle) \leq c\,(1 + |\xi - \eta|^l). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Возведением в квадрат проверяется неравенство $|\langle\xi\rangle - \langle\eta\rangle| \leq |\,|\xi| - |\eta|\,|$. Отсюда в случае $\langle\xi\rangle \geq \langle\eta\rangle$ получаем, что

$$\langle\xi\rangle/\langle\eta\rangle = 1 + (\langle\xi\rangle - \langle\eta\rangle)/\langle\eta\rangle \leq 1 + |\xi| - |\eta| \leq 1 + |\xi - \eta|.$$

Поэтому в силу предложения 3

$$\varphi(\langle\xi\rangle)/\varphi(\langle\eta\rangle) \leq c\,(\langle\xi\rangle/\langle\eta\rangle)^{s_1} \leq c\,(1+|\xi-\eta|)^{\max\{0,s_1\}}.$$

Если же $\langle\eta\rangle \geq \langle\xi\rangle$, то

$$\varphi(\langle\xi\rangle)/\varphi(\langle\eta\rangle) \leq c\,(\langle\xi\rangle/\langle\eta\rangle)^{s_0} = c(\langle\eta\rangle/\langle\xi\rangle)^{-s_0} \leq c\,(1+|\xi-\eta|)^{\max\{0,-s_0\}}.$$

Таким образом,

$$\varphi(\langle\xi\rangle)/\varphi(\langle\eta\rangle) \leq c\,(1+|\xi-\eta|)^{l} \quad \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $l := \max\{0,-s_0,s_1\}$. Отсюда следует (5) (с иной постоянной c).

3. Интерполяция. Приведем необходимые нам факты из теории интерполяции пар комплексных гильбертовых пространств. Нам достаточно ограничиться сепарабельными пространствами.

Определение 2. Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ гильбертовых пространств X_0 и X_1 назовем *допустимой*, если эти пространства сепарабельны и справедливо непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.

Определение 3. Гильбертово пространство H называется *интерполяционным* для допустимой пары гильбертовых пространств $[X_0, X_1]$, если:

(i) справедливы непрерывные вложения $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$;

(ii) произвольный линейный оператор $T : X_0 \to X_0$, ограниченный в нормах пространств X_0 и X_1, является также ограниченным оператором в норме пространства H.

Из условия (ii) вытекает неравенство

$$\|T\|_{H\to H} \leq c\max\left\{\,\|T\|_{X_0\to X_0},\ \|T\|_{X_1\to X_1}\,\right\},$$

где число $c > 0$ не зависит от оператора T [23, с. 34].

Нам потребуется определение интерполяции с функциональным параметром. Оно является естественным обобщением классического интерполяционного метода Ж.-Л. Лионса и С. Г. Крейна [26, гл. I], [27, с. 250-255].

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, которые ограничены на каждом отрезке $[a,b]$, где $0 < a < b < \infty$, и отделены от 0 на каждом множестве $[r,\infty)$, где $r > 0$.

Пусть произвольно заданы функция $\psi \in \mathcal{B}$ и допустимая пара гильбертовых пространств $X = [X_0, X_1]$. Для пары X существует изометрический изоморфизм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такой, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J называется ***порождающим*** для пары X. Этот оператор определяется парой X однозначно.

В пространстве X_0 определен как борелевская функция от J оператор $\psi(J)$. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением $(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}$ и соответствующей нормой $\| u \|_{X_\psi} = (u,u)^{1/2}_{X_\psi}$. Пространство X_ψ сепарабельно и полно, т. е. гильбертово.

Определение 4. Функция $\psi \in \mathcal{B}$ называется *интерполяционным параметром*, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Если функция ψ — интерполяционный параметр, то будем говорить, что пространство X_ψ получено интерполяцией пары X с параметром ψ. В этом случае справедливы непрерывные и плотные вложения $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$. Приведем описание всех интерполяционных параметров в смысле данного определения.

Определение 5. Произвольная функция $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ называется *псевдовогнутой* в окрестности бесконечности, если она (слабо) эквивалентна некоторой вогнутой функции $\psi_1 : (r,\infty) \to (0,\infty)$ на полупрямой (r,∞), где число r достаточно большое.

Предложение 4. *Функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда она псевдовогнута* *в окрестности бесконечности.*

Это утверждение вытекает из описания класса всех интерполяционных функций, полученного Я. Петре [28, 29, с. 153] (см., например, доказательство в [30, п. 2.7]). Следующий важный результат принадлежит В. И. Овчинникову [31].

Предложение 5. *Пусть $X = [X_0, X_1]$ — произвольная допустимая пара гильбертовых пространств. Если гильбертово пространство H является интерполяционным для этой пары, то существует псевдовогнутая в окрестности бесконечности функция $\psi \in \mathcal{B}$ такая, что пространства H и X_ψ совпадают с точностью до эквивалентности норм.*

Таким образом, класс всех сепарабельных гильбертовых пространств, интерполяционных для заданной допустимой пары X, совпадает с классом пространств X_ψ, где $\psi \in \mathcal{B}$ — произвольная псевдовогнутая функция в окрестности бесконечности.

4. Интерполяционные пространства Хермандера. Пусть целое число $n \geq 1$, а $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — топологическое линейное пространство всех распределений медленного роста в $\mathbb{R}^n$, а $\widehat{u}$ — преобразование Фурье распределения $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Определение 6. Пусть $\varphi(\langle\xi\rangle)$ — весовая по Волевичу–Панеяху функция аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ линейное пространство всех распределений $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\widehat{u}$ локально суммируемо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

В пространстве $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений u_1, u_2 по формуле

$$(u_1, u_2)_\varphi := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u_1}(\xi)\, \overline{\widehat{u_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Оно порождает норму $\|u\|_\varphi := (u, u)_\varphi^{1/2}$.

В силу леммы 1 пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ является частным изотропным гильбертовым случаем пространств Л. Хермандера [4, с. 54], [5, с. 18], которые обозначены им через $B_{2,\,\varphi(\langle\cdot\rangle)}$. Отметим, что в гильбертовом случае пространства Хермандера совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [25, с. 14], [32, с. 45].

Если для функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ определен порядок изменения $\sigma \in \mathbb{R}$, то удобно обозначение $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) =: H^{\sigma,\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$, где $\varphi(t) = t^{\sigma}\varphi_0(t)$. В случае, когда функция φ_0 медленно меняется по Карамата на бесконечности, пространство $H^{\sigma,\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$ изучено авторами в [9, 30]. Для степенной функции $\varphi(t) = t^{\sigma}$ пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с гильбертовым пространством Соболева $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Приведем некоторые свойства пространства $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, вытекающие из соответствующих свойств пространств Хермандера и Волевича–Панеяха.

Предложение 6. *Пусть* $\varphi, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$. *Тогда:*

(i) *Пространство* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *— сепарабельно.*

(ii) *Множество* $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями плотно в* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) *Функция* $\varphi(t)/\varphi_1(t)$ *ограничена в окрестности бесконечности тогда и только тогда, когда* $H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. *Это вложение непрерывное и плотное.*

(iv) *Для любых вещественных чисел* $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ *и* $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ *справедливы непрерывные и плотные вложения* $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$.

(v) *Пространства* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *и* $H^{1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *взаимно двойственные относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^n)$.

(vi) *Для каждого фиксированного целого числа* $k \geq 0$ *неравенство*

$$\int_1^{+\infty} t^{2k+n-1}\varphi^{-2}(t)\,dt < \infty \tag{6}$$

равносильно вложению $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$. *Это вложение непрерывно.* [2]

[2]Здесь $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство всех функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}^n$ производные до порядка k включительно.

Сделаем ряд пояснений. Свойство (iv) следует из (iii) и неравенства (3), в котором полагаем $t := 1$. Поскольку $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathrm{RO}$, то пространство $H^{1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ из свойства (v) корректно определено. Л. Хермандером [4, с. 59] установлено, что неравенство

$$\int_{R^n} \langle\xi\rangle^{2k}\,\varphi^{-2}(\langle\xi\rangle)\,d\xi < \infty$$

равносильно вложению $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$. Это вложение непрерывно. Переходя к сферическим координатам, получим, что это неравенство равносильно (6), т. е. справедливо свойство (vi).

Изучим интерполяционные свойства шкалы пространств

$$\{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\}. \qquad (7)$$

Теорема 1. *Пусть заданы функции $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$ и $\psi \in \mathcal{B}$. Предположим, что функция φ_0/φ_1 ограничена в окрестности бесконечности, а ψ — интерполяционный параметр. Положим*

$$\varphi(t) := \varphi_0(t)\,\psi(\varphi_1(t)/\varphi_0(t)) \quad \textit{при} \quad t \geq 1.$$

Тогда $\varphi \in \mathrm{RO}$ и

$$[H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n), H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)]_{\psi} = H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{с равенством норм.} \qquad (8)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\varphi \in \mathrm{RO}$. В силу определения, функция φ измерима по Борелю на полуоси $[1, \infty)$. Проверим, что она удовлетворяет условию (1). Поскольку $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$, то

$$(\exists a{>}1)(\exists c{>}1)(\forall t{\geq}1)(\forall \lambda{\in}[1,a])(\forall j = 0,1) : \; c^{-1} \leq \varphi_j(\lambda t)/\varphi_j(t) \leq c. \qquad (9)$$

Из ограниченности функции φ_0/φ_1 в окрестности бесконечности вытекает ввиду предложения 1, что

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\; (\forall\, t \geq 1) : \;\; \varphi_1(t)/\varphi_0(t) > \varepsilon. \qquad (10)$$

Далее, так как ψ — интерполяционный параметр, то в силу предложения 4 функция ψ псевдовогнутая в окрестности бесконечности.

Тогда, как уставлено в [30, с. 88] (леммы 2.1, 2.2), функция ψ слабо эквивалентна вогнутой функции на полуоси (ε,∞), что равносильно условию

$$(\exists\, c_0>1)\ (\forall\ \tau>\varepsilon)\ (\forall\ t>\varepsilon):\ \ \psi(\tau)/\psi(t)\le c_0\max\{1,\tau/t\}. \qquad (11)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\psi(t)/\psi(\tau)\ge c_0^{-1}\min\{1,t/\tau\}\quad \forall\ \ \tau>\varepsilon,\ t>\varepsilon. \qquad (12)$$

Теперь из формул (9), (10), (11) следует, что для любых $t\ge 1$ и $\lambda\in[1,a]$

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}=\frac{\varphi_0(\lambda t)}{\varphi_0(t)}\cdot\frac{\psi(\varphi_1(\lambda t)/\varphi_0(\lambda t))}{\psi(\varphi_1(t)/\varphi_0(t))}\le c\cdot c_0\max\Bigl\{1,\frac{\varphi_1(\lambda t)/\varphi_0(\lambda t)}{\varphi_1(t)/\varphi_0(t)}\Bigr\}\le c^3c_0.$$

Аналогично из формул (9), (10) и (12) вытекает, что

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}\ge c^{-1}c_0^{-1}\min\Bigl\{1,\frac{\varphi_1(\lambda t)/\varphi_0(\lambda t)}{\varphi_1(t)/\varphi_0(t)}\Bigr\}\ge c^{-3}c_0^{-1}.$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условию (1) и поэтому $\varphi\in\mathrm{RO}$.

Докажем равенство (8). В силу (iii) предложения 6 пара $[H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n),H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)]$ — допустимая. Псевдодифференциальный оператор с символом $\varphi_1(\langle\xi\rangle)/\varphi_0(\langle\xi\rangle)$, где $\xi\in\mathbb{R}^n$, является порождающим оператором J для этой пары. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}:H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)\leftrightarrow L_2(\mathbb{R}^n,\varphi_0^2(\langle\xi\rangle)\,d\xi)$ оператор J приводится к умножению на функцию $\varphi_1(\langle\xi\rangle)/\varphi_0(\langle\xi\rangle)$. Следовательно, оператор $\psi(J)$ приводится к умножению на функцию $\psi(\varphi_1(\langle\xi\rangle)/\varphi_0(\langle\xi\rangle))=\varphi(\langle\xi\rangle)/\varphi_0(\langle\xi\rangle)$. Поэтому для любой функции $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можем записать:

$$\|u\|^2_{[H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n),H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)]_\psi}=\|\psi(J)u\|^2_{H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_0^2(\langle\xi\rangle)\,|(\widehat{\psi(J)u})(\xi)|^2\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi=\|u\|^2_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда следует равенство пространств (8), поскольку множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в каждом из них. Это вытекает из (ii) предложения 6 и свойства интерполяции [30, с. 82] (теорема 2.1), согласно которому пространство $H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно и плотно вложено в $[H^{\varphi_0}(\mathbb{R}^n), H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)]_\psi$.

Теорема 2. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ и вещественные числа s_0, s_1 такие, что $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Положим*

$$\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\varphi(t^{1/(s_1-s_0)}) \text{ при } t \geq 1 \text{ и } \psi(t) := \varphi(1) \text{ при } 0 < t < 1.$$

Тогда функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром и

$$[H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\psi = H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \text{с равенством норм.} \tag{13}$$

Доказательство. Так как $\varphi(t) = t^{s_0}\,\psi(t^{s_1}/t^{s_0})$ при $t \geq 1$, то теорема 2 следует из теоремы 1 и предложения 4, если мы докажем, что функция ψ принадлежит множеству $\mathcal{B}$ и является псевдовогнутой в окрестности бесконечности. В силу предложения 3, функция ψ удовлетворяет условию (11) для $\varepsilon = 1$. В самом деле, если $t \geq 1$ и $\tau \geq 1$, то

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(t)} = \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-s_0/(s_1-s_0)} \frac{\varphi(\tau^{1/(s_1-s_0)})}{\varphi(t^{1/(s_1-s_0)})} \leq$$

$$\leq (\tau/t)^{-s_0/(s_1-s_0)} c\,\max\{(\tau/t)^{s_1/(s_1-s_0)},\,(\tau/t)^{s_0/(s_1-s_0)}\} = c\max\{\tau/t, 1\}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что функция ψ отделена от нуля на полуоси $[1,\infty)$ и поэтому $\psi \in \mathcal{B}$ в силу предложения 1. Остается сослаться на лемму 2.2 статьи [30, с. 88], согласно которой условие (11) равносильно тому, что функция ψ эквивалентна псевдовогнутой функции на полуоси (ε, ∞).

Из теорем 1, 2 и предложений 4, 5 вытекает фундаментальное свойство шкалы пространств (7): она совпадает с множеством *всех* интерполяционных гильбертовых пространств для допустимых пар гильбертовых пространств Соболева.

5. Эллиптический оператор в пространствах Хермандера. Пусть $m \in \mathbb{R}$. Следуя [2, с. 8, 9] обозначим через $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$ класс всех псевдодифференциальных операторов (ПДО) A в $\mathbb{R}^n$ таких, что их символ $a(x,\xi)$ является комплекснозначной бесконечно дифференцируемой функцией аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$(\forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n)(\exists c_{\alpha,\beta} > 0)(\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n): \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}.$$

(Как обычно, $|\beta| := \beta_1 + \ldots + \beta_n$ для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.) Обозначим

$$\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m(\mathbb{R}^n).$$

Положим $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$.

Лемма 2. *Для ПДО $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ сужение линейного отображения $u \mapsto Au$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, на пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ является ограниченным оператором*

$$A : H^\varphi(\mathbb{R}^n) \to H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \ \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{14}$$

Доказательство. В случае пространств Соболева эта лемма хорошо известна [2, с. 10] (теорема 1.1.2). Пусть функция $\varphi \in \mathrm{RO}$, а числа s_0, s_1 и интерполяционный параметр ψ такие, как в теореме 2. Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$A : H^{s_j}(\mathbb{R}^n) \to H^{s_j - m}(\mathbb{R}^n), \quad j \in \{0, 1\}.$$

Применяя интерполяцию с параметром ψ, получаем на основании теоремы 2 ограниченный оператор

$$A : H^\varphi(\mathbb{R}^n) = [H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\psi \to$$

$$\to \left[H^{s_0 - m}(\mathbb{R}^n), H^{s_1 - m}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi = H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть задан полиоднородный (классический) ПДО $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$. Для него определен главный символ $a_0(x, \xi)$, однородный по ξ порядка m и не равный тождественно нулю. Предположим далее, что ПДО A *равномерно эллиптический* в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$(\exists\, c > 0)\ (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)\ (\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| = 1) : \ \ |a_0(x, \xi)| \geq c.$$

Найдем априорную оценку решения уравнения $Au = f$ для оператора (14). Поскольку ПДО A — равномерно эллиптический, он имеет параметрикс B, т. е. справедливо следующее утверждение [2, с. 20] (теорема 1.8.3).

Предложение 7. *Существует полиоднородный ПДО $B \in \Psi^{-m}(\mathbb{R}^n)$, равномерно эллиптический в $\mathbb{R}^n$, такой, что*

$$BA = I + T_1, \quad AB = I + T_2, \tag{15}$$

где T_1 и T_2 — некоторые ПДО класса $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, а I — тождественный оператор в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$ и $\sigma > 0$. Существует число $c = c(\varphi, \sigma) > 0$ такое, что для произвольных распределений $u \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ и $f \in H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих уравнению $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, справедлива априорная оценка:*

$$\|u\|_{\varphi} \leq c(\,\|f\|_{\varphi\rho^{-m}} + \|u\|_{\varphi\rho^{-\sigma}}\,). \tag{16}$$

Доказательство. В силу первого равенства в (15), $u = Bf - T_1 u$. Отсюда следует оценка (16):

$$\|u\|_{\varphi} = \|Bf - T_1 u\|_{\varphi} \leq \|Bf\|_{\varphi} + \|T_1 u\|_{\varphi} \leq c_1 \|f\|_{\varphi\rho^{-m}} + c_2 \|u\|_{\varphi\rho^{-\sigma}}.$$

Здесь c_0, c_1 — соответственно нормы операторов

$$B : H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n) \to H^{\varphi}(\mathbb{R}^n),$$
$$T_1 : H^{\varphi\rho^{-\sigma}}(\mathbb{R}^n) \to H^{\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Эти операторы ограничены в силу леммы 2 и предложения 7.

6. Гладкость решения эллиптического уравнения. Предположим, что правая часть эллиптического уравнения $Au = f$ имеет некоторую внутреннюю гладкость в шкале (7) на заданном открытом непустом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$. Изучим внутреннюю гладкость решения u на этом множестве. Обозначим

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{RO}} H^{\varphi}(\mathbb{R}^n),$$

$$H^{\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{RO}} H^{\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Это обозначение корректно в силу предложения 6 (iv). В пространствах $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ вводятся топологии соответственно индуктивного и проективного пределов [33, с. 470, 472], в каждой из которых ПДО A непрерывен.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{RO}$, $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$Au \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; u \in H^{\varphi\rho^m}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Предположим, что $Au \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. В силу предложения 7 и леммы 2 имеем: $u = BAu - T_1 u$, где $BAu \in H^{\varphi\rho^m}(\mathbb{R}^n)$ и $T_1 u \in H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V) := \bigl\{ f \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) : \\ \chi f \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \;\; \forall\, \chi \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n),\, \operatorname{supp}\chi \subset V,\; \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0 \bigr\}. \tag{17}$$

Здесь $\varphi \in \mathrm{RO}$, а $C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций, у которых любая частная производная ограничена в $\mathbb{R}^n$. Топология в пространстве $H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ задается системой полунорм $f \mapsto \|\chi f\|_{\varphi}$, где функции χ — те же, что и в (17).

Теорема 4. *Предположим, что распределение* $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* V, *где* $f \in H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ *для некоторого* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Тогда* $u \in H^{\varphi\rho^m}_{\mathrm{int}}(V)$.

Доказательство. Покажем сначала, что из условия $f \in H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ вытекает следующее свойство повышения внутренней гладкости решения уравнения $Au = f$: для каждого числа $r \geq 1$ справедлива импликация

$$u \in H^{\varphi\rho^{m-r}}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; u \in H^{\varphi\rho^{m-r+1}}_{\mathrm{int}}(V). \tag{18}$$

Выберем произвольно функцию χ из определения (17). Для нее существует функция $\eta \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\operatorname{supp}\eta \subset V,\; \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta,\, \partial V) > 0 \text{ и } \eta = 1 \text{ в окрестности } \operatorname{supp}\chi. \tag{19}$$

Действительно, мы можем определить указанную функцию с помощью операции свертки $\eta := \chi_{2\varepsilon} * \omega_{\varepsilon}$, где $\varepsilon := \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V)/4$, $\chi_{2\varepsilon}$ — индикатор 2ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$, а функция $\omega_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\omega_{\varepsilon} \geq 0, \quad \operatorname{supp}\omega_{\varepsilon} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(x)\, dx = 1.$$

Непосредственно проверяется, что такая функция η принадлежит классу $C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ и имеет следующее свойство: $\eta \equiv 1$ в ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$ и $\eta \equiv 0$ вне 3ε-окрестности этого же множества, т. е. η удовлетворяет условиям (19).

Переставив ПДО A и оператор умножения на функцию χ, запишем

$$\begin{aligned} A\chi u = A\chi\eta u = \chi\, A\eta u + A'\eta u = \chi\, Au + \chi\, A(\eta-1)u + A'\eta u = \\ = \chi f + \chi\, A(\eta-1)u + A'\eta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь ПДО A' — коммутатор ПДО A и оператора умножения на функцию χ. Поскольку $A' \in \Psi^{m-1}(\mathbb{R}^n)$, в силу леммы 1 имеем ограниченный оператор

$$A' :\, H^{\varphi\rho^{m-r}}(\mathbb{R}^n) \,\to\, H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно,

$$u \in H^{\varphi\rho^{m-r}}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; A'\eta u \in H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n). \tag{21}$$

Далее, по условию теоремы и ввиду неравенства $r \geq 1$, имеем

$$\chi f \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n). \tag{22}$$

Кроме того, так как носители функций χ и $\eta-1$ не пересекаются, то $\chi A(\eta-1)$ — ПДО класса $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Это сразу следует из формулы для символа композиции двух ПДО: χA и оператора умножения на функцию $\eta-1$ (см. [2, с. 13], теорема 1.2.4). Поэтому

$$\chi\, A(\eta-1)u \in H^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{23}$$

Из формул (20) – (23) и леммы 3 вытекает, что

$$u \in H^{\varphi\rho^{m-r}}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; A\chi u \in H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \chi u \in H^{\varphi\rho^{m-r+1}}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, справедлива импликация (18) ввиду произвольности выбора функции χ из определения (17).

Теперь с помощью (18) легко вывести включение $u \in H^{\varphi\rho^{m}}_{\mathrm{int}}(V)$. Ввиду (iv) предложения 6 можно считать, что $u \in H^{\varphi\rho^{m-k}}(\mathbb{R}^n)$ для достаточно большого $k\in\mathbb{N}$. Так как умножение на функцию $\chi\in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ есть ПДО класса $\Psi^0(\mathbb{R}^n)$, то $u\in H^{\varphi\rho^{m-k}}_{\mathrm{int}}(V)$ в силу леммы 2. Применяя импликацию (18) последовательно для $r=k,\,k-1,\dots,1$, получим:

$$u\in H^{\varphi\rho^{m-k}}_{\mathrm{int}}(V)\;\Rightarrow\;u\in H^{\varphi\rho^{m-k+1}}_{\mathrm{int}}(V)\;\Rightarrow\;\ldots\;\Rightarrow\;u\in H^{\varphi\rho^{m}}_{\mathrm{int}}(V).$$

Следствие 1. *Пусть целое $k\geq 0$. Предположим, что распределение $u\in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения $Au=f$ на открытом множестве $V\subseteq\mathbb{R}^n$, где $f\in H^{\omega}_{\mathrm{int}}(V)$ для некоторого функционального параметра $\omega\in\mathrm{RO}$, удовлетворяющего условию*

$$\int_1^{+\infty} t^{2k+n-1-2m}\,\omega^{-2}(t)\,dt<\infty. \tag{24}$$

Тогда решение u имеет на множестве V непрерывные частные производные до порядка k включительно, причем они ограничены на каждом множестве $V_0\subset V$ таком, что $\mathrm{dist}(V_0,\partial V)>0$. В частности, если $f\in H^{\omega}(\mathbb{R}^n)$, то $u\in C^{k}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 4 справедливо включение $u\in H^{\omega\rho^m}_{\mathrm{int}}(V)$. Заметим, что для функции $\varphi:=\omega\rho^m$ условие (6) принимает вид (24). Пусть функция $\eta\in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{supp}\,\eta\subset V,\quad \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\eta,\,\partial V)>0\quad\text{и}\quad \eta=1\;\text{ в окрестности }\;V_0.$$

Эта функция строится так же, как и в доказательстве теоремы 4, если заменить в нем множество $\mathrm{supp}\,\chi$ на V_0. В силу (vi) предложения 6 имеем

$$\eta u\in H^{\omega\rho^m}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C^{k}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому все частные производные функции u порядка $\leq k$ — непрерывны и ограничены в некоторой окрестности множества V_0. Тогда эти производные непрерывны и на множестве V, поскольку можно взять $V_0:=\{x_0\}$ для любой точки $x_0\in V$.

7. Эквивалентные нормы в пространствах Хермандера. Пусть функция $\varphi\in\mathrm{RO}$. Согласно определению, норма в пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$\|u\|_{\varphi}=\|\varphi(1-\Delta)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\quad\forall\;u\in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n).$$

Здесь, как обычно, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(1-\Delta)$ — функция φ от оператора $1-\Delta$, рассматриваемого как неограниченный самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Оказывается, что вместо оператора $1-\Delta$ можно использовать любой ПДО A, удовлетворяющий некоторым условиям. При этом мы получим эквивалентную норму в пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть A — произвольный полиоднородный ПДО класса $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, где $m>0$. Предположим, что ПДО A — равномерно эллиптический в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$(\exists\, r>0)\ (\forall\, u\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)):\ \ (Au,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\geq r\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда отображение $u\mapsto Au$, где $u\in H^m(\mathbb{R}^n)$, является неограниченным самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ (см. [2, с. 28, 29]). Обозначим этот оператор через A_0. Его спектр расположен на полуоси $[r,\infty)$.

Лемма 4. *ПДО A определяет топологический изоморфизм*

$$A: H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)\leftrightarrow H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n)\quad\forall\ \varphi\in\mathrm{RO}. \tag{25}$$

Доказательство. В парах пространств Соболева ПДО A определяет топологический изоморфизм

$$A: H^{s}(\mathbb{R}^n)\leftrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n)\quad\forall\ s\in\mathbb{R}. \tag{26}$$

В случае $s=m$ это немедленно следует из указанных выше свойств оператора A_0. Отсюда вытекает изоморфизм (26) в случае $s>m$. Действительно, для любого $f\in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $u\in H^m(\mathbb{R}^n)$ уравнения $Au=f$. Но поскольку ПДО A — эллиптический, то $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 3. Следовательно, отображение (26) — изоморфизм, причем топологический (по теореме Банаха об обратном операторе). Случай $s<m$ получается теперь переходом к оператору, сопряженному к (26). Наконец, для произвольного $\varphi\in\mathrm{RO}$ топологический изоморфизм (25) вытекает из (26) в силу интерполяционной теоремы 2.

Доопределим $\varphi(t):=\varphi(1)$ при $0<t<1$. Поскольку $\operatorname{Spec}A_0\subset(0,\infty)$, в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ определен оператор $\varphi(A_0^{1/m})$ как борелевская функция $\varphi(t^{1/m})$, $t>0$, от положительного самосопряженного оператора A_0.

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Область определения оператора* $\varphi(A_0^{1/m})$ *содержит множество* $H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Отображение*

$$u \mapsto \|\varphi(A_0^{1/m})\, u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} =: \|u\|_{\varphi,A}, \quad u \in H^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{27}$$

является гильбертовой нормой.

Доказательство. (i) В силу предложения 3 (где полагаем $t :=$ 1)

$$(\exists\, k \in \mathbb{N})\ (\exists\, c > 0)\ (\forall\, \tau \geq r): \quad \varphi(\tau^{1/m}) \leq c\, \tau^k.$$

Поэтому $\operatorname{Dom} A_0^k \subseteq \operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$. Кроме того, $H^{km}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Dom} A_0^k$ в силу леммы 3. Следовательно, $H^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$

(ii) Для отображения (27) все свойства нормы очевидны, за исключением свойства положительной определенности. Докажем его. Для произвольной функции $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ на основании спектральной теоремы запишем:

$$\|\varphi(A_0^{1/m})\, u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int_r^\infty \varphi^2(t^{1/m})\, d(E_t u, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{28}$$

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int_r^\infty d(E_t u, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{29}$$

Здесь E_t, $t \geq r$, — разложение единицы, соответствующее самосопряженному оператору A_0 в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Теперь, если левая часть равенства (28) равна 0, то мера $(E(\cdot)u, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ множества $[r, \infty)$ также равна 0, поскольку $\varphi > 0$. Отсюда в силу (29), получаем, что $u = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, отображение (27) — норма, и очевидно, она гильбертова.

Определение 7. Обозначим через $H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по гильбертовой норме (27).

Теорема 5. *Для произвольной функции* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *нормы в пространствах* $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ *и* $H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ *эквивалентны на плотном множестве* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Тем самым,* $H^\varphi(\mathbb{R}^n) = H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ *с точностью до эквивалентности норм.*

Доказательство. Предположим сначала, что функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ удовлетворяет условию $\sigma_0(\varphi) > 0$. Выберем число $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $k\,m > \sigma_1(\varphi)$. Поскольку оператор A_0^k замкнут и положительно определен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, то его область определения $\mathrm{Dom}\,A_0^k$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(A^k u_1, A^k u_2)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ функций u_1, u_2. При этом пара гильбертовых пространств $[L_2(\mathbb{R}^n), \mathrm{Dom}\,A_0^k]$ допустимая и оператор A_0^k есть порождающий для нее. Кроме того, в силу лемм 3, 4, пространства $\mathrm{Dom}\,A_0^k$ и $H^{km}(\mathbb{R}^n)$ совпадают с точностью до эквивалентности норм. Пусть функция ψ — интерполяционный параметр из теоремы 2, где $s_0 := 0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 = k\,m > \sigma_1(\varphi)$. Так как $\psi(t) = \varphi(t^{1/km})$ при $t > 0$, то в силу этой теоремы имеем:

$$\begin{aligned}\|u\|_{\varphi} = \|u\|_{[H^0(\mathbb{R}^n), H^{km}(\mathbb{R}^n)]_\psi} \asymp \|u\|_{[L_2(\mathbb{R}^n), \mathrm{Dom}\,A_0^k]_\psi} = \\ = \|\psi(A_0^k)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi(A_0^{1/m})u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\varphi,A},\end{aligned}$$

где $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$. Здесь знак $\asymp$ обозначает эквивалентность норм. В случае $\sigma_0(\varphi) > 0$ теорема доказана.

Пусть теперь функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ — произвольна. Выберем число $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sigma_0(\varphi) + k\,m > 0$. Тогда $\sigma_0(\varphi\rho^{km}) > 0$ и по уже доказанному

$$\|v\|_{\varphi\rho^{km}} \asymp \|v\|_{\varphi\rho^{km},A}, \quad v \in H^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{30}$$

В силу леммы 4 ПДО A^k задает топологический изоморфизм

$$A^k : H^{\varphi\rho^{km}}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим через A^{-k} оператор, обратный к A^k. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись формулой (30) для $v := A^{-k}u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$, получаем требуемую эквивалентность норм:

$$\|u\|_{\varphi} \asymp \|A^{-k}u\|_{\varphi\rho^{km}} \asymp \|A^{-k}u\|_{\varphi\rho^{km},A} = \|\varphi(A_0^{1/m})A_0^k A^{-k}u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\varphi,A}.$$

Теорема 6. *Предположим, что функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ отделена от нуля на полуоси $[1,\infty)$. Тогда пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ совпадает с областью определения оператора $\varphi(A_0^{1/m})$, причем норма в пространстве $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна норме графика оператора $\varphi(A_0^{1/m})$.*

Доказательство. Пространство $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$ — гильбертово относительно скалярного произведения графика замкнутого оператора $\varphi(A_0^{1/m})$. По условию, существует число $c>0$ такое, что $\varphi(t)\geq c$ при $t>0$. Следовательно,

$$\|\varphi(A_0^{1/m})u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\geq c\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\quad\forall\;\; u\in H^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда в силу теоремы 5 вытекает требуемая эквивалентность норм на множестве $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Остается доказать его плотность в пространстве $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$.

Пусть $u\in\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$. Поскольку $\varphi(A_0^{1/m})u\in L_2(\mathbb{R}^n)$, существует последовательность функций $v_j\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $v_j\to\varphi(A_0^{1/m})u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $j\to\infty$. Так как $1/\varphi(t^{1/m})\leq 1/c$ при $t>0$, оператор $\varphi^{-1}(A_0^{1/m})$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Значит, $u_j:=\varphi^{-1}(A_0^{1/m})v_j\to u$ и $\varphi(A_0^{1/m})u_j=v_j\to\varphi(A_0^{1/m})u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $j\to\infty$. Иными словами, $u_j\to u$ по норме графика оператора $\varphi(A_0^{1/m})$. Кроме того, поскольку $v_j\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, то для каждого $k\in\mathbb{N}$ справедливо $u_j=A_0^{-k}\varphi^{-1}(A_0^{1/m})A_0^k\,v_j\in H^{km}(\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 4. Следовательно, $u_j\in H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ и плотность множества $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$ доказана.

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. — Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
2. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – 1990. – **63** – С. 5 – 129.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
5. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. — Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
6. *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167 – 186.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

8. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2 – С. 217–235.
9. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3 – С. 352–370.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679–701.
11. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536 – 1555.
12. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вiсник. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547 – 580.
13. *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 798 – 814.
14. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497 – 520.
15. *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142 – 158.
16. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.
17. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
18. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
19. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // В кн.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
20. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisation of function spaces of generalised smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
21. *Merucci C.* Application of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces // Proc. Lund Conf. 1983. Lecture Notes in Math. **1070**. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – P. 183 – 201.
22. *Cobos F., Fernandez D. L.* Hardy–Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter // Proc. Lund Conf. 1986. Lecture Notes in Math. **1302**. – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – P. 158–170.
23. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

24. *Boyd D. W.* The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces // Canadian J. Math. – 1967. – **19**. – P. 599 – 616.
25. *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
26. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
27. *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
28. *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta sci. math. – 1968. – **29**, № 1 – 2. – P. 91 – 92.
29. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
30. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
31. *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – № 2. – P. 349 – 515.
32. *Paneah B.* The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem. — Berlin: Wiley–VCH, 2000.
33. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща школа, 1990. – 600 с.