

УДК 517.5

В. О. Андрієнко (Одеський національний університет, Одеса)**НЕОБХІДНІ УМОВИ ВКЛАДЕННЯ В КЛАС $\varphi(L)$
ІЗ ШВИДКО ЗРОСТАЮЧОЮ ФУНКЦІЄЮ φ**

*Присвячується світлій пам'яті
члена-кореспондента НАН України
Олександра Івановича Степанця*

Отримані необхідні умови для вкладення $H_p^\omega \subset \varphi(L)$, які достатні у випадку $p = 1$.

Нехай Φ — сукупність парних, невід'ємних, скінченних та неспадних на півпрямій $[0, \infty)$ функцій φ з $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. Через $\varphi(L)$ ($\varphi \in \Phi$) позначимо клас всіх вимірних на $[0, 1]$ функцій f , для яких $\int_0^1 \varphi(f(x)) dx < \infty$.

Множину всіх вимірних на $[0, 1]$ функцій f , p -й степінь модуля яких інтегрований на цьому відрізку, будемо позначати через $L^p(0, 1)$, ($1 \leq p < \infty$). Інтегральним модулем неперервності функції $f \in L^p(0, 1)$ називається функція

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\{ \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Кожна неспадна, неперервна на $[0, 1]$ функція $\omega(\delta)$, яка задовольняє умови $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta)$ при $0 \leq \delta \leq \delta + \eta \leq 1$, називається модулем неперервності. Через H_p^ω позначають клас всіх функцій f із $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, у яких $\omega_p(f, x) \leq \omega(x)$. Через f^* позначають незростаючу на $(0, 1)$ рівновимірну з $|f|$ функцію.

В кінці 60-х та на початку 70-х років минулого століття П.Л. Ульянов заклав основи теорії вкладення класів H_p^ω . Зокрема, П.Л. Ульянов [1] поставив питання про необхідні та достатні умови для вкладення

$$H_p^\omega \subset \varphi(L) \tag{1}$$

і отримав ці умови в деяких важливих випадках, коли φ зростає не швидше ніж деяка степенева функція, а також достатні умови [2]

© В. О. Андрієнко, 2008

для низки вкладень (1) (див. також огляд [3]). Пізніше ці дослідження розвивались в роботах В.О. Андрієнка [4,5], Л. Лейндлера [6], Е.О. Стороженко [7,8], В.І. Коляди [11] та інших у випадку функцій φ , які зростають не швидше ніж степеневі.

П. Л. Ульянов [2] отримав перший результат для швидко зростаючих функцій. Він знайшов достатню умову на $\omega_1(f, \delta)$, за якою $f \in e^L$. Розвиненням цього результату є робота Е.О. Стороженко [8], де вказані достатні умови на $\omega_p(f, \delta)$, $p > 1$, які забезпечують вклюдження $f \in e^L$. Е.О. Стороженко вперше знайшла необхідні і достатні умови [9] для вкладення (1) у випадку $p = 1$, $\varphi = \exp|x|$ і опуклого модуля неперервності ω . Останній результат вона перенесла [10] на випадок функцій φ , які задовольняють так звану ω -умову:

$$\varphi(x+1) = O\{\varphi(x)\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

У даній статті отримано необхідні умови для вкладення (1) для більш широкого класу функцій φ , ніж у нашій роботі [12]. Доведення основних теорем базуються на наступних лемах.

Лема 1 (Нерівність Харді). Для кожної $f \in L^p(0,1)$, $p > 1$, виконується нерівність

$$\int_0^1 \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 |f(x)|^p dx,$$

де

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt.$$

Доведення див., наприклад, в книзі [13, с. 899].

Лема 2 ([14, с. 16]). Нехай функція $\varphi \in \Phi$ задовольняє умову (2). Тоді, якщо $f \in \varphi(L)$, то і $f + \tau \in \varphi(L)$ як тільки τ є вимірною та обмеженою функцією на $[0,1]$.

Лема 3 ([15, с. 242 і 244]). Нехай $f \in L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$. Тоді

$$\int_0^x \omega_p^p(f^*, u) du \leq \int_0^x \omega_p^p(f, u) du, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

і

$$\omega_p^p(f^*, x) = \int_0^{1-x} [f^*(u) - f^*(u+x)]^p du, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Лема 4 ([12, с. 5]). Нехай функція $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$. Тоді функція

$$F_p(x) = \int_0^x f^{*p}(u) du$$

задовольняє нерівності

$$\omega_p^p(f^*, x) \leq \omega_1(f^{*p}, x) \leq F_p(x) \leq \omega_1(f^{*p}, x) + 2x\|f\|_p^p, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

2. Основні теореми.

Теорема 1. 1) Нехай функція $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, і $\varphi \in \Phi$. Тоді

$$\int_0^1 \varphi(f(x)) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x) + 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p) dx + \varphi(2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p).$$

2) Якщо ж, крім того, функція φ або є цілою, що зростає швидше будь-якої степеневі функції на $[0, \infty)$, або $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ є опуклою для деякого $s > 1$, а φ неперервна та строго зростає на $[0, +\infty)$, то знайдуться сталі $A_1(p) > 0$, $A_2(p, f) \geq 0$ такі, що

$$A_2(p, f) + \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx \geq A_1(p) \int_0^1 \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x)) dx.$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3 (випадок $p = 1$) із роботи Е.О. Стороженко [7] з необхідними у нашому випадку змінами. Твердження 1) теореми є наслідком нерівності (3):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(f(x)) dx &= \int_0^1 \varphi(f^*(x)) dx \leq \int_0^1 \varphi(x^{-\frac{1}{p}} F_p^{\frac{1}{p}}(x)) dx \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x) + 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p) dx + \varphi(2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p). \end{aligned}$$

Нехай тепер ціла функція із класу Φ

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \quad 0 \leq u < \infty,$$

задовольняє умову 2) теореми. Оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{N}$:

$$+\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k = c_n + \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k u^k,$$

то існує нескінченно багато додатних коефіцієнтів c_k . Нехай $n > p$ — фіксований номер одного з цих коефіцієнтів. Тоді

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u^k + c_n u^n + o(u^n), \quad u \rightarrow 0.$$

Звідси та із нерівності $f^*(x) \leq (x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du)^{\frac{1}{p}}$ маємо

$$\varphi(f^*(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k f^{*k}(x) + c_n f^{*n}(x) + o\{(x^{-1} F_p(x))^{1/p}\}^n\}$$

Інтегруючи цю рівність та застосовуючи нерівність Харді (лема 1) до середнього доданка і враховуючи зростання функції $(1 - \frac{1}{x})^x$ при $x \geq 1$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k [f^{*k}(x)] dx + \\ &+ c_n \left(\frac{n-p}{n} \right)^{n/p} \int_0^1 (x^{-1} F_p(x))^{n/p} dx + \\ &+ \int_0^1 o\{(x^{-1} F_p(x))^{1/p}\}^n dx \geq \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} c_k [f^{*k}(x)] dx + \\ &+ c_n A_1(p) \int_0^1 (x^{-1} F_p(x))^{n/p} dx + A_1(p) \int_0^1 o\{(x^{-1} F_p(x))^{1/p}\}^n dx, \end{aligned}$$

де

$$A_1(p) = \left(\frac{[p] + 1 - p}{[p] + 1} \right)^{\frac{[p]+1}{p}} < \frac{1}{p}.$$

Додаючи до обох частин останньої нерівності

$$A_2(p, f) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\{ A_1(p) [(x^{-1} F_p(x))^{1/p}]^k - f^{*k}(x) \right\} \right) dx,$$

отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} A_2(p, f) + \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx &\geq A_1(p) \int_0^1 \varphi[(x^{-1} F_p(x))^{1/p}] dx \geq \\ &\geq A_1(p) \int_0^1 \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x)) dx, \end{aligned}$$

яка випливає з лівої частини нерівності (3). Якщо ж $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ є опуклою для деякого $s > 1$, а φ — неперервна та строго зростає на $[0, +\infty)$, то за теоремою порівняння для φ -середніх [16, с. 204, теорема 243], нерівності Харді (лемма1) та нерівності (3) маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x)) dx &\leq \int_0^1 \varphi[(x^{-1} F_p(x))^{1/p}] dx = \\ &= \int_0^1 [x^{-1} \int_0^x \varphi^{1/s}(f^*(u)) du]^s dx \leq \\ &\leq \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \int_0^1 \varphi(f^*(x)) dx = \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Умову опуклості функції $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ для деякого $s > 1$ на півпрямій $[0, +\infty)$ можна замінити умовою її опуклості для достатньо великих значень аргумента.

Дійсно, нехай $f^*(u) \geq C > 0$ для $u \in [0, x_0]$, тоді $x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du \geq C^p$ і опуклість $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ достатньо припустити для $x \geq C^p$, оскільки

$$\begin{aligned} &\left\{ \varphi^{\frac{1}{s}} \left[\left(x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^s dx = \\ &= \int_0^{x_0} \left\{ \varphi^{\frac{1}{s}} \left[\left(x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^s dx + \end{aligned}$$

$$+ \int_{x_0}^1 \left\{ \varphi^{\frac{1}{s}} \left[\left(x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^s dx$$

і до першого інтеграла можна застосувати ті ж самі міркування, що і на заключному етапі доведення теореми 1. Другий інтеграл, оскільки функція $x^{-1} \int_0^x f^{*p}(u) du$ є незростаючою, не перевищує величини

$$A = A(\varphi, f, p, x_0) = (1 - x_0) \varphi \left[\left(x_0^{-1} \int_0^{x_0} f^{*p}(u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi \left(x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{1/p}(f^{*p}, x) \right) dx &\leq A + \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \int_0^{x_0} \varphi(f^*(x)) dx \leq \\ &\leq A + \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \int_0^1 \varphi(f^*(x)) dx \leq A + \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Для функції φ , яка має другу скінченну похідну φ'' на $[0, +\infty)$, припущення про опуклість функції $y = \varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ для деякого $s > 1$ необхідно тягне за собою, що

$$\varphi(x) \geq \left(\frac{C_1}{sp} x^p + C_2 \right)^s, \quad C_1 > 0, \quad C_2 \in \mathbf{R}.$$

Дійсно, опуклість функції y рівносильна тому, що

$$y'' = \frac{1}{ps} \varphi^{\frac{1}{s}-1}(x^{\frac{1}{p}}) x^{\frac{1}{p}-1} \varphi'(x^{\frac{1}{p}}) \left[\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1} B(x) + \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{x} \right] \geq 0,$$

де

$$B(x) = \frac{\varphi''(x^{1/p})}{\varphi'(x^{1/p})} + (1/s - 1) \frac{\varphi'(x^{1/p})}{\varphi(x^{1/p})},$$

а це рівносильно тому, що вираз у квадратних дужках дорівнює

$$\frac{d}{dx} [\ln \varphi'(x^{1/p}) + (1/s - 1) \ln \varphi(x^{1/p}) + (1/p - 1) \ln x] \geq 0.$$

Інтегруючи цю нерівність, а потім потенціюючи отриманий результат, отримуємо ланцюжок рівносильних нерівностей

$$\varphi^{1/s-1}(x^{1/p})\varphi'(x^{1/p})x^{1/p-1} \geq C_1 > 0,$$

де $\ln C_1$ — довільна стала,

$$\frac{1}{s}\varphi^{1/s-1}(x^{1/p})\varphi'(x^{1/p})\frac{1}{p}x^{1/p-1} \geq \frac{C_1}{ps} \Leftrightarrow d\varphi^{1/s}(x^{1/p}) \geq \frac{C_1}{ps}dx.$$

Інтегруючи останню нерівність, будемо мати

$$\varphi^{1/s}(x^{1/p}) \geq \frac{C_1}{ps}x + C_2 \Leftrightarrow \varphi^{1/s}(x) \geq \frac{C_1}{ps}x^p + C_2 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \left(\frac{C_1}{ps}x^p + C_2\right)^s,$$

де C_2 — довільна стала.

Наслідок. Нехай $f \in L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$. Якщо функція φ задовольняє умову (2), то при виконанні умови 1) теореми 1 для збіжності інтеграла

$$\int_0^1 \varphi\{|f(x)|\}dx \quad (4)$$

достатньо, щоб

$$x^{-\frac{1}{p}}\omega_1^{\frac{1}{p}}(f^{*p}, x) \in \varphi(L). \quad (5)$$

Якщо ж виконуються умови 2) теореми 1, то збіжність інтеграла (4) необхідна для виконання умови (5).

Доведення. Перше твердження є наслідком твердження 1) теореми 1, умови (5) та леми 2. Тепер нехай інтеграл (4) збігається, але (5) не виконується. Тоді з твердження 2) теореми 1 випливає розбіжність інтеграла (4).

Теорема 2. Якщо функція φ задовольняє умову (2), то умова (5) рівносильна кожній із таких:

$$x^{-\frac{1}{p}}F_p^{\frac{1}{p}}(x) \in \varphi(L), \quad (6)$$

$$x^{-\frac{2}{p}}\left(\int_0^x F_p(2u)du\right)^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L), \quad (7)$$

$$x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega_1(f^{*p}, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L). \quad (8)$$

Доведення. З опуклості вгору функції F_p маємо

$$(2x)^{-\frac{1}{p}} F_p^{\frac{1}{p}}(2x) \leq x^{-\frac{2}{p}} \left\{ \int_0^x F_p(2u) du \right\}^{\frac{1}{p}} \leq x^{-\frac{1}{p}} F_p^{\frac{1}{p}}(x) \quad (9)$$

Із (3) випливає рівносильність умов (5) і (6), а із (9) — рівносильність умов (6) і (7). Оскільки, внаслідок (3)

$$x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega_1^p(f^{*p}, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \leq x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x F_p(2u) du \right)^{\frac{1}{p}},$$

то із (7) випливає (8). Тепер, нехай має місце (8). Тоді із (3) випливає (7).

Теорема 3. Якщо $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, а φ задовольняє умову (2) і

$$x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega_1(|f|^p, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L), \quad (10)$$

то $|f| \in \varphi(L)$.

Доведення. Оскільки, згідно з лемою 3 для $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ маємо

$$\left(\int_0^x \omega_1(f^{*p}, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^x \omega_1(|f|^p, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}},$$

то звідси та з умови (10) випливає (8), і отже, за теоремою 2 та наслідком будемо мати $|f| \in \varphi(L)$.

Теорема 4. Нехай $\omega(x)$, $0 \leq x \leq 1$, — опуклий модуль неперервності, а функція φ задовольняє умову (2) і або є цілою, що зростає швидше ніж будь-яка степенева функція на $[0, \infty)$, або $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ є опуклою для деякого $s > 1$, а φ — неперервна і строго зростає на $[0, +\infty)$. Тоді кожна з двох умов:

$$x^{-\frac{1}{p}} \omega(x) \in \varphi(L) \quad (11)$$

або

$$x^{-\frac{2}{p}} \left\{ \int_0^x \omega^p(2u) du \right\}^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L) \quad (12)$$

необхідна для вкладення (1), а у випадку $p = 1$ — необхідна та достатня для вкладення

$$H_1^\omega \subset \varphi(L). \quad (13)$$

Доведення. Достатність умови (11) у випадку $p = 1$ впливає із того, що оскільки функція $|f| \in L^p(0, 1)$ належить класу $\varphi(L)$ разом з її незростаючою перестановкою f^* , то для вкладення (13) потрібно показати, що воно є вірним для класу незростаючих функцій $0 \leq f \in H_1^\omega$, оскільки тоді $f^* = f \in H_1^\omega$ і достатність (11) впливає із наслідка. Достатність умови (12) негайно впливає із теореми 3. Для доведення необхідності припустимо, що вкладення (1) має місце, а (11) і (12) не виконуються, тобто

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \varphi(x^{-\frac{1}{p}} \omega(x)) dx = \infty \quad (14)$$

та

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \left\{ x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega^p(2u) du \right)^{1/p} \right\} dx = \infty. \quad (15)$$

Тоді функція $f_0 = \omega \in H_p^\omega$, оскільки

$$\begin{aligned} \omega_p^p(f_0, \delta) &= \sup_{0 \leq t \leq \delta} \int_0^{1-t} |\omega(u+t) - \omega(u)|^p du \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \delta} \int_0^{1-t} \omega^p(t) du \leq \omega^p(\delta), \end{aligned}$$

і очевидно, $f_0 = \omega \in \varphi(L)$. Але, з іншого боку, оскільки із леми 3 при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ маємо

$$\omega_p(\omega^*, x) \leq (1-x)^{1/p} \omega(x), \quad \text{а} \quad \omega(1) - \omega(1-x) \leq \omega(x),$$

то знайдеться функція $\alpha(x) \geq 0$ така, що

$$\begin{aligned} \omega_p(\omega^*, x) &\geq (1-x)^{1/p} \omega(x) - \alpha(x) \geq \\ &\geq x^{1/p} \omega(x) - \alpha(x) \geq x^{1/p} [\omega(1) - \omega(1-x)]. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ і $C_1 = \omega(\frac{1}{2})$ функцію $\alpha(x)$ вибираємо із умов

$$\alpha(x) \geq (1-x)^{1/p} \omega(x) - \omega_p(\omega^*, x) \geq 0$$

та

$$x^{1/p} \omega(x) - \omega_p(\omega^*, x) \leq \alpha(x) \leq x^{1/p} \omega(x) - x^{1/p} [\omega(1) - \omega(1-x)] \leq C_1 x^{1/p},$$

перша із яких очевидна, а друга рівносильна, внаслідок опуклості ω , а отже, і ω^* , такий нерівності:

$$\begin{aligned} \omega_p(\omega^*, x) &= \left(\int_0^{1-x} [\omega^*(u) - \omega^*(u+x)]^p du \right)^{1/p} \geq \\ &\geq (1-x)^{1/p} [\omega^*(0) - \omega^*(x)] \geq x^{1/p} [\omega(1) - \omega(1-x)]. \end{aligned}$$

В результаті отримуємо оцінку при $0 \leq x \leq 1/2$:

$$\omega_p(\omega^*, x) \geq (1-x)^{1/p} \omega(x) - C_1 x^{1/p} \geq (1-x) \omega(x) - C_1 x^{1/p}. \quad (16)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \{ x^{-\frac{1}{p}} \omega_1^{1/p}(\omega^{*p}, x) \} dx &\geq \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \{ x^{-\frac{1}{p}} \omega_p(\omega^*, x) \} dx \geq \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \{ x^{-\frac{1}{p}} \omega(x) - x^{1-\frac{1}{p}} \omega(x) - C_1 \} dx \geq C_2 \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \{ x^{-\frac{1}{p}} \omega(x) \} dx, \end{aligned}$$

де стала $C_2 > 0$ визначається з умови (2). Звідси та з (14) випливає, згідно з наслідком, що $\omega \in \varphi(L)$. Так само, із (15) отримуємо, що $\omega \in \varphi(L)$. Дійсно, на підставі (16), (15) та теореми 2, маємо

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \left\{ x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega_p^p(\omega^*, 2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right\} dx \geq \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \left\{ x^{-\frac{2}{p}} \left[\left(\int_0^x (1-2u)^{\frac{1}{p}} \omega(2u) - C_1 (2u)^{1/p} \right)^p du \right]^{1/p} \right\} dx \geq \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \left\{ x^{-\frac{2}{p}} \left[\left(\int_0^x \omega^p(2u) du \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_0^x 2u \omega^p(2u) du \right)^{\frac{1}{p}} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-C_1 \left(\int_0^x 2u du \right)^{\frac{1}{p}} \Bigg] \Bigg\} dx \geq C_3 \int_0^{\frac{1}{4}} \varphi \left\{ x^{-\frac{2}{p}} \left(\int_0^x \omega^p(2u) du \right)^{\frac{1}{p}} \right\} dx,$$

де стала $C_3 > 0$ визначається умовою (2).

1. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1968. — **32**, №3. — С. 649-686.
2. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношение между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. — 1970. — **81(123)**, №1. — С. 104-131.
3. Андриєнко В. А. Теоремы вложения для функций одного переменного // Итоги науки. Математический анализ 1970. — М.: ВИНТИ. — 1971. — С. 203-262.
4. Андриєнко В. А. Вложение некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — **31**, №6. — С. 1311-1326.
5. Андриєнко В. А. О необходимых условиях вложения классов функций H_p^ω // Мат. сб. — 1969. — **78**, №2. — С. 280-300.
6. Leindler L. On embedding of classes H_p^ω // Acta sci.math.(Szeged). — 1970. — **31**, №1-2. — P. 13-31.
7. Стороженко Э. А. Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — **37**, №2. — С. 386-398.
8. Стороженко Э. А. О вложении в класс e^L // Матем. заметки. — 1971. — **10**, №1. — С. 17-24.
9. Стороженко Э. А. О некоторых теоремах вложения // Матем. заметки. — 1976. — **19**, №2. — С. 187-200.
10. Стороженко Э. А. К вопросу о вложении некоторых классов функций // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, №3. — С. 334-345.
11. Коляда В. И. О вложении в классы $\varphi(L)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1975. — **39**, №2. — С. 418-437.
12. Андриєнко В. А. О вложении в класс $\varphi(L)$ // Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., инф. — 2006. — **12**, вып. 1. — С. 3-11.
13. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
14. Ульянов П. Л. Представление функций рядами // Успехи матем. наук. — 1972. — **27**, вып. 62. — С. 3-52.
15. Освальд П. О модулях непрерывности равноизмеримых функций в классах $\varphi(L)$ // Мат. заметки. — 1975. — **17**, №2. — С. 231-244.
16. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е. и Полиа Г. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.