Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 180-190

УДК 517.5

А. А. Кореновский (Одес. нац. ун-т имени И. И. Мечникова, Одесса)

О МНОЖИТЕЛЯХ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ МАКЕНХАУПТА

Светлой памяти
Александра Ивановича Степанца
посвящается

Изучаются некоторые достаточные условия на такую функцию ψ, что принадлежность функции f классу Макенхаупта влечет принадлежность произведения ψf тому же классу Макенхаупта.

Для неотрицательной на интервале $J \subset \mathbb{R}$ функции f и числа $\alpha \neq 0$ будем обозначать

$$f_{J,\alpha} = \left(\frac{1}{|J|} \int_J f^{\alpha}(x)\, dx \right)^{1/\alpha},$$

где $|\cdot|$ – мера Лебега. Если $\alpha < \beta,\ \alpha\beta \neq 0$, то, в силу неравенства Гельдера,

$$f_{J,\alpha} \leq f_{J,\beta}.$$

Пусть заданы интервал $J_0 \subset \mathbb{R}$ и число $1 < p < \infty$. Для $0 < \delta \leq |J_0|$ положим

$$[f]_{p,\delta} = \sup_{|J| \leq \delta} \frac{f_{J,1}}{f_{J,-1/(p-1)}},$$

где верхняя грань берется по всем интервалам $J \subset J_0$, длина которых не превосходит δ. Говорят, что функция f удовлетворяет условию Макенхаупта A_p на интервале J_0 $(f \in A_p)$, если

$$[f]_p \equiv \sup_{0<\delta<|J_0|} [f]_{p,\delta} \equiv$$

$$\equiv \sup_{J \subset J_0} \frac{1}{|J|} \int_J f(x)\, dx \left(\frac{1}{|J|} \int_J f^{-1/(p-1)}(x)\, dx \right)^{p-1} < \infty, \qquad (A_p)$$

где верхняя грань берется по всем интервалам $J \subset J_0$. Из неравенства Гельдера мгновенно вытекает, что

$$1 \le [f]_p \le [f]_q, \quad 1 < p < q < \infty.$$

Фундаментальное свойство класса Макенхаупта заключается в следующем вложении

$$A_p \subset A_{p-\varepsilon}, \tag{1}$$

справедливом при некотором $\varepsilon > 0$. Это свойство, установленное в работе Макенхаупта [1], использовалось для доказательства ограниченности максимального оператора Харди–Литтлвуда в весовом пространстве L^p. Впоследствии в ряде работ различных авторов было показано, что принадлежность весовой функции f классу A_p необходимо и достаточно для ограниченности в весовом пространстве L^p многих других операторов, а функции f, удовлетворяющие условию Макенхаупта A_p, часто называют весовыми функциями Макенхаупта.

Пусть $1 < p < \infty$. Для $B > 1$ через $A_p(B)$ будем обозначать совокупность всех таких функций f, для которых $[f]_p \le B$. В работе [2] было найдено предельное значение $0 < \varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(p, B) < p - 1$, такое, что вложение (1) справедливо при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Именно, число ε_0 определяется как корень уравнения

$$\frac{\varepsilon_0^{1-p}}{p - \varepsilon_0} = \frac{B}{(p-1)^{p-1}}. \tag{2}$$

В данной работе рассматривается следующий вопрос, тесно связанный с вложением (1). *Для каких неотрицательных функций ψ из условия $f \in A_p(B)$ следует, что $\psi f \in A_p$?* Тривиальным достаточным условием, очевидно, является существенная ограниченность функции $\psi + \psi^{-1}$, ибо в этом случае

$$[\psi f]_p \le \frac{M}{m} [f]_p,$$

где $M = \operatorname{ess\,sup} \psi$, $m = \operatorname{ess\,inf} \psi$. Поэтому в дальнейшем рассматриваются функции ψ, для которых $\operatorname{ess\,sup} \left(\psi + \psi^{-1}\right) = \infty$. Следующая теорема дает ответ на поставленный вопрос в случае степенной функции ψ.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p, B < \infty$, *число* ε_0 *определено равенством* (2). *Пусть, далее,* $0 < b_0 \le +\infty$ *и функция* $f \in A_p(B)$ *на интервале* $J_0 \equiv (0, b_0)$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (\varepsilon_0 - p, \varepsilon_0)$ *найдется такая постоянная* $B' \equiv B'(p, B, \varepsilon)$, *что* $x^{\varepsilon} f(x) \in A_p(B')$. *С другой стороны, найдутся такие функции* $f_0, f_1 \in A_p(B)$, *что* $x^{\varepsilon_0} f_0(x) \notin A_p$ *и* $x^{\varepsilon_0 - p} f_1(x) \notin A_p$.

Доказательство. Пусть интервал $J \equiv (a, b) \subset J_0$. Если $a \ge \frac{b}{2}$, то, учитывая, что определенное равенством (2) число ε_0 не превосходит p, для $\varepsilon \in (\varepsilon_0 - p, \varepsilon_0)$ будем иметь

$$\frac{1}{|J|}\int_J x^{\varepsilon} f(x)\,dx \left(\frac{1}{|J|}\int_J \left(x^{\varepsilon} f(x)\right)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \le$$

$$\le \left(\frac{b}{a}\right)^{|\varepsilon|} \frac{1}{|J|}\int_J f(x)\,dx \left(\frac{1}{|J|}\int_J f^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{p-1} \le 2^p B.$$

Если же $a < \frac{b}{2}$, то

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^{\varepsilon} f(x)\,dx \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x^{\varepsilon} f(x)\right)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \le$$

$$\le 2^p \frac{1}{b}\int_0^b x^{\varepsilon} f(x)\,dx \left(\frac{1}{b}\int_0^b \left(x^{\varepsilon} f(x)\right)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1}.$$

Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что

$$\sup_{0<b<b_0} \frac{1}{b}\int_0^b x^{\varepsilon} f(x)\,dx \left(\frac{1}{b}\int_0^b \left(x^{\varepsilon} f(x)\right)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \le c, \qquad (3)$$

где $c \equiv c(p, B, \varepsilon)$.

Пусть сначала $\varepsilon > 0$. В известном неравенстве Харди [3, с. 291]

$$\int_0^b x^{q'/p'-1} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-q'}\,dx \le$$

$$\le \left(\frac{p'+1}{p'}\right)^{q'} \int_0^b x^{q'/p'-1} f^{-q'}(x)\,dx, \quad p' \ge q' > 0 \qquad (4)$$

положим $q' = \frac{1}{p-1}$, $p' = \frac{1}{p-1-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < p-1$ (заметим, что определенное равенством (2) число $\varepsilon_0 < p-1$, так что и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < p-1$). Тогда получим

$$\int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \le$$

$$\le (p-\varepsilon)^{1/(p-1)} \int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)} f^{-1/(p-1)}(x)\,dx.$$

Отсюда и из условия $f \in A_p(B)$ будем иметь

$$(p-\varepsilon)^{1/(p-1)} \int_0^b (x^\varepsilon f(x))^{-1/(p-1)}\, dx \ge$$

$$\ge \int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \ge$$

$$\ge B^{-1/(p-1)} \int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)-1} \int_0^x f^{-1/(p-1)}(y)\,dy\,dx =$$

$$= B^{-1/(p-1)} \int_0^b f^{-1/(p-1)}(x) \int_x^b y^{-\varepsilon/(p-1)-1}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} \int_0^b f^{-1/(p-1)}(x) \left[x^{-\varepsilon/(p-1)} - b^{-\varepsilon/(p-1)}\right] dx =$$

$$= \frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} \int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)} f^{-1/(p-1)}(x)\,dx -$$

$$- \frac{p-1}{\varepsilon} B^{-\varepsilon/(p-1)} b^{-\varepsilon/(p-1)} \int_0^b f^{-1/(p-1)}(x)\,dx.$$

Поскольку $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $\frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} > (p-\varepsilon)^{1/(p-1)}$ и поэтому, снова используя условие $f \in A_p(B)$, находим

$$\left[\frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} - (p-\varepsilon)^{1/(p-1)}\right] \frac{1}{b} \int_0^b x^{-\varepsilon/(p-1)} f^{-1/(p-1)}(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} b^{-\varepsilon/(p-1)} \frac{1}{b}\int_0^b f^{-1/(p-1)}(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{p-1}{\varepsilon} B^{-1/(p-1)} b^{-\varepsilon/(p-1)} B^{1/(p-1)} \left(\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx\right)^{-1/(p-1)} \le$$

$$\le \frac{p-1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{b}\int_0^b x^{\varepsilon} f(x)\,dx\right)^{-1/(p-1)}$$

и тем самым завершается доказательство (3) для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Для доказательства (3) при $\varepsilon_0 - p < \varepsilon < 0$ воспользуемся тем, что условие $f \in A_p(B)$ равносильно тому, что $g \equiv f^{-1/(p-1)} \in A_{p/(p-1)}\left(B^{1/(p-1)}\right)$. Положим $q = \frac{p}{p-1}$, $C = B^{1/(p-1)}$. Применяя уже доказанное неравенство (3) к функции g, получим, что при $x^{\delta} g(x) \in A_q$ всех $0 < \delta < \delta_0$, таких, что

$$\frac{\delta_0^{1-q}}{q-\delta_0} = \frac{C}{(q-1)^{q-1}}.$$

Но $x^{\delta} g(x) = x^{\delta} f^{-1/(p-1)}(x) = \left(x^{-\delta(p-1)} f(x)\right)^{-1/(p-1)}$ и при этом условие $\left(x^{-\delta(p-1)} f(x)\right)^{-1/(p-1)} \in A_{p/(p-1)}$ равносильно тому, что $x^{-\delta(p-1)} f(x) \in A_p$. Положим $\varepsilon = -\delta(p-1)$. Тогда условие $0 < \delta < \delta_0$ принимает такой вид $\varepsilon_0 - p < \varepsilon < 0$ и, таким образом, (3) доказано для $\varepsilon_0 - p < \varepsilon < 0$.

Остается показать, что параметры изменения для ε нельзя расширить. Это легко проверяется на примере функции $f_0(x) = x^{\gamma}$, которая, как известно, принадлежит классу Макенхаупта $A_p\left(B_{\gamma}\right)$ при $-1 < \gamma < p-1$, где

$$B_{\gamma} = \frac{1}{b}\int_0^b x^{\gamma}\,dx \left(\frac{1}{b}\int_0^b x^{-\gamma/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} = \frac{(p-1)^{p-1}}{(\gamma+1)(p-1-\gamma)^{p-1}}.$$

Тогда $\varepsilon_0 \equiv p-1-\gamma$ удовлетворяет равенству (2) и при этом ясно, что $x^{\varepsilon_0} f_0(x) = x^{\gamma+\varepsilon_0} = x^{p-1}$ не принадлежит классу A_p. Далее, функция $x^{\varepsilon_0 - p} f_0(x) = x^{\gamma+\varepsilon_0-p} = x^{-1}$ также не принадлежит классу A_p и тем самым завершается доказательство теоремы.

Для изучения отличных от степенных множителей ψ установим сначала соответствующую модификацию неравенства Харди (4).

Лемма 1. *Пусть $p > 1$, неотрицательная функция φ не возрастает на $(0, b)$. Обозначим $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy \quad (0 < x < b)$. Тогда для любой неотрицательной функции f справедливо неравенство*

$$\int_0^b \Phi(x) \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \le$$

$$\le p^{1/(p-1)} \int_0^b \Phi(x) f^{-1/(p-1)}(x)\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Интегрируем по частям

$$\int_0^b \varphi(x) \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx =$$

$$= \left(\int_0^b \varphi(y)\,dy\right) \left(\frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} +$$

$$+\frac{1}{p-1}\int_0^b \int_0^x \varphi(y)\,dy \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)-1} \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(y)\,dy + \frac{1}{x} f(x)\right) dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{p-1}\int_0^b \Phi(x) \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)-1} f(x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{p-1}\int_0^b \Phi(x) \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx.$$

Так как $\Phi(x) \ge \varphi(x)$, то получаем

$$\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \int_0^b \Phi(x) \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \ge$$

$$\geq \frac{1}{p-1}\int_0^b \Phi(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)-1} f(x)\,dx.$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$p\int_0^b \Phi(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy\right)^{-1/(p-1)} dx \geq$$

$$\geq \left(\int_0^b \Phi(x) f^{-1/(p-1)}(x)dx\right)^{1-p}\left(\int_0^b \Phi(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^{-1/(p-1)} dx\right)^p,$$

откуда вытекает (5). Лемма доказана.

Замечание 1. Множитель $p^{1/(p-1)}$ перед интегралом в правой части (5), вообще говоря, нельзя уменьшить. Действительно, если $\varphi \equiv \Phi \equiv 1$, то (5) обращается в обычное неравенство Харди (4), в котором $p' = q' = \frac{1}{p-1}$ и постоянная перед интегралом точная. С другой стороны, если $\Phi(x) = x^{-\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$, то постоянная справа в (5) оказывается завышенной, в чем легко убедиться, сравнивая (5) с (4).

Теорема 2. *Пусть $1 < p, B < \infty$, неотрицательная функция φ не возрастает на $J_0 \equiv (0, b_0)$, где $0 < b_0 \leq +\infty$, $\Phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy \quad (0 < x < b_0)$. Предположим, что найдется такое $\sigma \equiv \sigma(p, B) > 1$, что для любого $b \in (0, b_0)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{0<x\leq \frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\Phi(x)}\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y} > (pB)^{1/(p-1)}. \tag{6}$$

Тогда для любой функции $f \in A_p(B)$ на J_0 функция $\Phi^{1-p}f$ принадлежит классу A_p.

Доказательство. Обозначим $\psi = \Phi^{1-p}$. Пусть интервал $J \equiv (a, b) \subset J_0$. Если $a \geq \frac{b}{2}$, то $\frac{\psi(b)}{\psi(a)} \leq 2^{p-1}$ и поэтому

$$\frac{1}{|J|}\int_J \psi(x) f(x)\,dx\left(\frac{1}{|J|}\int_J (\psi(x)f(x))^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leq$$

$$\leq \frac{\psi(b)}{\psi(a)}\frac{1}{|J|}\int_J f(x)\,dx\left(\frac{1}{|J|}\int_J f^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq 2^{p-1}B.$$

Если же $a < \frac{b}{2}$, то

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)f(x)\,dx\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(\psi(x)f(x))^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leq$$

$$\leq 2^p\frac{1}{b}\int_0^b \psi(x)f(x)\,dx\left(\frac{1}{b}\int_0^b(\psi(x)f(x))^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1}$$

и, таким образом, достаточно показать, что

$$\sup_{0<b<b_0}\frac{1}{b}\int_0^b \psi(x)f(x)\,dx\left(\frac{1}{b}\int_0^b(\psi(x)f(x))^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leq c, \quad (7)$$

где $c \equiv c(p,B,\psi)$.

Пользуясь неравенством (5) и условием $f \in A_p(B)$, меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$p^{1/(p-1)}\int_0^b \Phi(x)f^{-1/(p-1)}(x)dx \geq \int_0^b \Phi(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right)^{-1/(p-1)} dx \geq$$

$$\geq B^{-1/(p-1)}\int_0^b \Phi(x)\frac{1}{x}\int_0^x f^{-1/(p-1)}(y)\,dy\,dx =$$

$$= B^{-1/(p-1)}\int_0^b f^{-1/(p-1)}(x)\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y}\,dx,$$

т. е.

$$\int_0^b\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y}\; f^{-1/(p-1)}(x)\,dx \leq (pB)^{1/(p-1)}\int_0^b \Phi(x)f^{-1/(p-1)}(x)\,dx. \quad (8)$$

Пользуясь условием (6), найдем такое $\delta > 0$, что

$$\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y} \geq \left((pB)^{1/(p-1)}+\delta\right)\Phi(x), \quad 0 < x \leq \frac{b}{\sigma},$$

причем можем считать, что $\delta \leq (pB)^{1/(p-1)}$. Если $\frac{b}{\sigma} \leq x \leq b$, то

$$\Phi(x) \leq \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) \leq \sigma\Phi(b),$$

и поэтому неравенство

$$2\sigma(pB)^{1/(p-1)}\Phi(b)+\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y}\geq\Big((pB)^{1/(p-1)}+\delta\Big)\,\Phi(x)$$

справедливо для всех $x\in(0,b)$. Подставляя его в (8), получим

$$\delta\int_0^b \Phi(x)f^{-1/(p-1)}(x)\,dx\leq 2\sigma(pB)^{1/(p-1)}\Phi(b)\int_0^b f^{-1/(p-1)}(x)\,dx.$$

Снова воспользовавшись условием $f\in A_p(B)$, находим

$$\frac{1}{b}\int_0^b(\psi(x)f(x))^{-1/(p-1)}\,dx\leq$$

$$\leq 2\frac{\sigma}{\delta}(pB)^{1/(p-1)}\Phi(b)B^{1/(p-1)}\left(\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx\right)^{-1/(p-1)}=$$

$$=2\frac{\sigma}{\delta}\left(pB^2\right)^{1/(p-1)}\left(\Phi^{1-p}(b)\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx\right)^{-1/(p-1)}\leq$$

$$\leq B_1\left(\frac{1}{b}\int_0^b\Phi^{1-p}(x)f(x)dx\right)^{-1/(p-1)}=B_1\left(\frac{1}{b}\int_0^b\psi(x)f(x)dx\right)^{-1/(p-1)},$$

где $B_1=2\frac{\sigma}{\delta}\left(pB^2\right)^{1/(p-1)}$. Возведем это неравенство в степень $p-1$ и получим (7) с постоянной $c=B_1^{p-1}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в теореме* 2 *условие* (6) *заменить следующим условием*

$$\sup_{0<x\leq\frac{b}{\sigma}}\frac{1}{\Phi(x)}\int_x^b\Phi(y)\frac{dy}{y}>B\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}, \tag{9}$$

то для любой $f\in A_p(B)$ функция Φf принадлежит A_p.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, воспользуемся тем, что условие $f\in A_p(B)$ равносильно тому, что $g\equiv f^{-1/(p-1)}\in A_{p/(p-1)}\left(B^{1/(p-1)}\right)$. Обозначим $q=\frac{p}{p-1}$,

$B_1 = B^{1/(p-1)}$. Тогда условие (9) принимает такой вид

$$\sup_{0<v\leq \frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\Phi(x)} \int_x^b \Phi(y) \frac{dy}{y} > (qB_1)^{1/(q-1)}.$$

Поэтому, в силу теоремы 2, если $g \in A_q(B_1)$, то $\Phi^{1-q} g \in A_q$. Но условие $A_{p/(p-1)} = A_q \ni \Phi^{1-q} g = (\Phi f)^{-1/(p-1)}$ влечет $\Phi f \in A_p$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть $f \in A_p(B)$ на $J_0 \equiv (0, b_0)$, где $0 < b_0 \leq +\infty$. Тогда функция $x^{\varepsilon_1} f(x)$ принадлежит классу A_p при любом $\varepsilon_1 > 0$, удовлетворяющем условию*

$$0 < \varepsilon_1 < (pB)^{-1/(p-1)}(p-1), \tag{10}$$

а функция $x^{-\varepsilon_2} f(x)$ принадлежит классу A_p при любом $\varepsilon_2 > 0$, удовлетворяющем условию

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{B}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1-p}. \tag{11}$$

Доказательство. Для $0 < \varepsilon < 1$ положим $\Phi(x) = x^{-\varepsilon}$. Тогда $\frac{1}{\Phi(x)} \int_x^b \Phi(y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^{\varepsilon}\right)$. Если число $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon(p-1)$ удовлетворяет условию (10), то непосредственным вычислением легко убеждаемся в справедливости условия (6) при $\sigma = \left(1 - \varepsilon(pB)^{1/(p-1)}\right)^{-1/\varepsilon} + 1$. В силу теоремы 2, условие $f \in A_p(B)$ влечет принадлежность функции $x^{\varepsilon_1} f(x)$ классу A_p.

Аналогично, если число $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon$ удовлетворяет условию (11), то условие (9) выполнено при $\sigma = \left(1 - \varepsilon B \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\right)^{-1/\varepsilon} + 1$. В силу следствия 1, из условия $f \in A_p(B)$ следует, что функция $x^{\varepsilon_2} f(x)$ принадлежит классу A_p. Следствие доказано.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что множителем ψ для функции $f \in A_p(B)$ может быть функция $\psi(x) = x^{\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon_1 < \left((p - \varepsilon_1) B\right)^{-1/(p-1)} (p-1),$$

более слабому, чем (10). Это объясняется тем, что при доказательстве теоремы 2 использовалось неравенство (5), которое в случае степенной функции ψ является более грубым, нежели неравенство Харди (4) (см. замечание 1). То же самое можно сказать и об условии (11). В этом смысле теорема 1 более точная по сравнению со следствием 2.

Следствие 3. *Пусть $f \in A_p(B)$ на $J_0 \equiv \left(0, \frac{1}{e}\right)$. Тогда при любом ε функция $\ln^{\varepsilon} \frac{1}{x} \cdot f(x)$ принадлежит классу A_p.*

Доказательство. Пусть $f \in A_p(B)$ при некотором $B > 1$, а число $\varepsilon > 0$. Для того, чтобы применить теорему 2 к функции $\Phi(x) = \ln^{\varepsilon} \frac{1}{x}$, достаточно проверить справедливость условия (6). Обозначим $\sigma = \exp\left(2(1+\varepsilon)(pB)^{1/(p-1)}\right)$. Пусть $0 < b < \frac{1}{e}$. Если $0 < x < \frac{b}{\sigma}$, то

$$\ln\frac{1}{x} - \ln\frac{1}{b} > 2(1+\varepsilon)(pB)^{1/(p-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\ln^{1+\varepsilon}\frac{1}{x} - \ln^{1+\varepsilon}\frac{1}{b} > 2(1+\varepsilon)(pB)^{1/(p-1)} \cdot \ln^{\varepsilon}\frac{1}{x},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\Phi(x)}\int_x^b \Phi(y)\frac{dy}{y} > 2(pB)^{1/(p-1)} \qquad \left(0 < x < \frac{b}{\sigma}\right),$$

т. е. условие (6) выполнено. Поэтому, в силу теоремы 2, функция $\Phi^{1-p}(x)f(x) \equiv \ln^{\varepsilon(1-p)}\frac{1}{x} \cdot f(x)$ принадлежит классу A_p. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что $\ln^{-\varepsilon}\frac{1}{x} \cdot f(x)$ принадлежит A_p при любом $\varepsilon > 0$.

Аналогично, используя следствие 1, убеждаемся в том, что $\ln^{\varepsilon}\frac{1}{x} \cdot f(x)$ принадлежит A_p при любом $\varepsilon > 0$. Следствие доказано.

1. *Muckenhoupt B.* Weighted inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 533–565.
2. *Кореновский А.А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта // Матем. заметки. – 1992. – **52**, № 6. – С. 32–44.
3. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. — 456 с.