Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 167-179

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін–т математики НАН України, Київ)

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{1,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ПРОСТОРІ L_{∞}

Одержано порядкові оцінки колмогоровських поперечників класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі істотно обмежених на кубі функцій.

В даній роботі вивчаються колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_{∞}. Одержані результати доповнюють ті, які були отримані в роботах [1–3]. Наведемо необхідні для викладу позначення та означення.

Нехай $L_p(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$, і відповідно істотно обмежених при $p = \infty$ на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченними нормами

$$||f||_p = \Big((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1, d}.$$

Наведемо означення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, розглянутого в роботі [1].

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо через $\Omega_l(f, t)_p$ мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1, d}}} ||\Delta^l_h f(x)||_p,$$

де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\dots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0, \ t_j > 0, \ j = \overline{1, d}; \quad \Omega(t) = 0, \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \Big)^l \Omega(t), \ m_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, d};$

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0, \quad j = \overline{1, d}$.

Крім того, будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [4]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma} \ , \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i, \ i \ne j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють сформульовані вище умови 1) – 4), (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot ... \cdot t_d^{r_d} \cdot \Big(\log \frac{1}{t_1} \Big)^{m_1} \cdot ... \cdot \Big(\log \frac{1}{t_d} \Big)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а m_j, $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Якщо $\mathcal{A}$ — скінченна множина, то через $|\mathcal{A}|$ будемо позначати кількість її елементів.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \big\{k = (k_1, \ldots, k_d) : 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1,d}\big\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\delta_s(f,x) = \sum\limits_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$, де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Отже, нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S) і (S_l). Тоді, згідно з означенням [1]

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \big\{f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1\big\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \Big\{ \sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\delta_s(f,x)||_p^{\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \leq \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} := \sup_s \frac{||\delta_s(f,x)||_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

а $\Omega(2^{-s}) := \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, розглянутими в роботі [5], а якщо $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, — з класами Бєсова $B^r_{p,\theta}$ (див., наприклад, [6]). З метою збереження такого зв'язку і для випадків $p = 1$ і $p = \infty$, означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна поширити і на ці випадки, дещо змінивши в (1) і (2) вигляд "блоків" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \big(1 - \frac{k-n}{n}\big) \cos kt$$

і $A_s(x) = \prod\limits_{j=1}^{d} \big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\big)$, $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x).$$

Тоді під класами $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ розуміють одиничні кулі в підпросторах функцій $f \in L_p(\pi_d)$, нормованих наступним чином (див., відповідно, [7] і [5])

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \Big(\sum_{s} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|A_s(f,x)\|_p^{\theta} \, \Big)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \; 1 \le \theta < \infty, \qquad (3)$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} := \sup_{s} \frac{\|A_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty. \qquad (4)$$

Зазначимо, що при $1 < p < \infty$ так визначені норми еквівалентні до означених рівностями (1) і (2).

Далі в роботі розглядаємо класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ вигляду

$$\Omega(t) = \omega\big(\prod_{j=1}^{d} t_j\big), \qquad (5)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Очевидно, що для $\Omega(t)$, $t = (t_1, ..., t_d)$, як для функції d змінних, виконуються умови 1) – 4), (S) і (S_l).

Наведемо означення величини, що нами досліджується.

Нехай Φ — центрально-симетрична множина банахового простору X. Величина

$$d_M(\Phi, X) := \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f - u\|_X, \qquad (6)$$

де L_M — довільний підпростір розмірності M простору X, називається M-вимірним колмогоровським поперечником множини Φ в просторі X.

Величина (6) введена А.М. Колмогоровим в [8], і згодом інтенсивно досліджувалася у великій кількості робіт для різних функціональних класів, в тому числі близьких за властивостями до $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

В роботі встановлено такий результат.

Теорема. *Нехай $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умови (S) з деяким $\alpha > 1$ і (S_l) при $l \ge 2$. Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$\omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \ll d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty) \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} n^{\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

Зауваження 1. Тут для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі далі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Доведення теореми. Для встановлення оцінки зверху в (7) достатньо показати, що $B^{\Omega}_{1,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta}$, $\Omega_1(t) = \omega_1(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}$, оскільки тоді згідно з елементарними властивостями колмогоровського поперечника

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty) \ll d_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_\infty)$$

і, як доведено в [3]

$$d_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_\infty) \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} n^{\frac{1}{2}}, \ 1 \le \theta \le \infty, \ \alpha > \frac{1}{2}. \qquad (8)$$

Вкладення $B^{\Omega}_{1,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta}$ рівносильне нерівності

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}} \le 1, \ \text{для } f \in B^{\Omega}_{1,\theta}. \qquad (9)$$

Для доведення (9), скористаємось таким відомим результатом.

Теорема A [9]. *Нехай $T_n(x)$ — тригонометричний поліном порядку $n=(n_1,...,n_d)$*

$$T_n(x)=\sum_{|k_1|\le n_1}...\sum_{|k_d|\le n_d}c_{k_1,...,k_d}e^{i(k,x)},$$

де n_j, $j=\overline{1,d}$, — натуральні числа, $c_{k_1,...,k_d}$ — довільні коефіцієнти. Тоді при $1\le q<p\le\infty$ має місце співвідношення

$$\|T_n(x)\|_p\le 2^d\Big(\prod_{j=1}^{d}n_j\Big)^{\frac1q-\frac1p}\|T_n(x)\|_q. \tag{10}$$

Нерівність (10) була встановлена С.М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". У випадку $d=1$ і $p=\infty$ відповідну нерівність довів Джексон [10].

Отже, нехай $f\in B^{\Omega}_{1,\theta}$. Тоді, застосувавши до $A_s(f,x)$, як до полінома степеня 2^{s_j+1} по змінній x_j, теорему A, будемо мати

$$1\ge\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}}=\Big(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,x)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac1\theta}\gg$$

$$\gg\Big(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})2^{-\frac{\|s\|_1}{2}\theta}\|A_s(f,x)\|_2^{\theta}\Big)^{\frac1\theta}=$$

$$=\Big(\sum_s\omega_1^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,x)\|_2^{\theta}\Big)^{\frac1\theta}=\|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}}, \tag{11}$$

тут $\|s\|_1:=s_1+...+s_d$.

Оцінка зверху в теоремі доведена.

Встановимо тепер відповідну оцінку знизу. Нехай спочатку $2\le\theta\le\infty$. В цьому випадку будемо користуватися відомим твердженням, для формулювання якого введемо відповідні позначення.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q=(q_1,q_2)$, позначає множину вимірних на π_{2d} функцій $f(x,y)$, $x=(x_1,...,x_d)$, $y=(y_1,...,y_d)$, зі скінченною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}:=\big\|\,\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\big\|_{q_2}:=$$

$$:= \left((2\pi)^{-2d} \int\limits_{\pi_d} \left| \int\limits_{\pi_d} \left|f(x,y)\right|^{q_1} dx \right|^{\frac{q_2}{q_1}} dy \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ величина

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$, називається найкращим білінійним наближенням функції f (див., наприклад, [11, с. 85]).

Нехай F — деякий клас функцій із $L_1(\pi_d)$ і g — фіксований елемент з F. Позначимо через F_g множину, що складається з функцій вигляду $g(x-y)$, які одержуємо із $g(x)$ шляхом зсуву аргументу $x \in \pi_d$ на довільний вектор $y \in \pi_d$. Тоді має місце рівність [11, с. 85]

$$\tau_M(g(x-y))_{q_1,\infty} = d_M(F_g, L_{q_1}). \tag{12}$$

Відповідно, якщо функціональний клас F інваріантний відносно зсуву аргумента функції $g \in F$, то згідно з (12) оцінками знизу для поперечників $d_M(F, L_{q_1})$ можуть слугувати відповідні оцінки знизу величин $\tau_M(g(x-y))_{q_1,\infty}$. Саме це і використаємо в подальших міркуваннях.

За заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким, щоб для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконувалось співвідношення $|Q_n| > 2M$ (відомо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$).

Розглянемо функції

$$g_1(x) = C_3 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_3 > 0,$$

та

$$g_2(x) = C_4 \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_4 > 0,$$

де $\rho^+(s) = \left\{k : \ k = (k_1, \ldots, k_d), \ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d}\right\}$ і покажемо, що при певних значеннях сталих C_3 та C_4: $g_1 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, та $g_2 \in B^{\Omega}_{1,\infty}$.

Дійсно,

$$\|g_1\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} = \Big(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g_1,x)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1})\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} = \sup_{n\le\|s\|_1\le n+d} \frac{\|A_s(g_2,x)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{n\le\|s\|_1\le n+d} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Тепер нам потрібен відомий результат Шмідта [12], який сформулюємо в тому вигляді, в якому він подається в [11, с. 10].

Теорема Б. *Нехай $\|K(x,y)\|_{2,2}<\infty$, $K-$ інтегральний оператор з ядром $K(x,y)$, K^* — оператор, спряжений до оператора K, і λ_j — незростаюча послідовність власних чисел оператора K^*K. Тоді*

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} = \Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\lambda_j\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отже, розглянемо інтегральний оператор G: $L_2(\pi_d)\to L_2(\pi_d)$ з ядром g_1:

$$(Gf)(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} g_1(x-y)f(y)\,dy.$$

Нехай G^* — оператор, спряжений до G, і λ_j — власні числа оператора G^*G, які розміщені в незростаючому порядку. В цьому випадку зрозуміло, що $\lambda_j = bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\ \omega^2(2^{-\|s\|_1}) =: bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\ \widetilde{\lambda}_j,\ b>0$ (відповідно, $\lambda_j = b\widetilde{\lambda}_j$ при $\theta=\infty$), тому, скориставшись теоремою Б, будемо мати

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\|g_1(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} \asymp$$

$$\asymp \Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_j\Big)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{\|s\|_1=n+d}\omega^2(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1}\Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (13)$$

Аналогічно, у випадку $\theta = \infty$

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| g_2(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (14)$$

Таким чином, із врахуванням (12) – (14), будемо мати

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Перейдемо тепер до розгляду випадку $1 \le \theta < 2$. Нехай, як і раніше, числа n та M пов'язані співвідношенням $|Q_n| > 2M$. Позначимо

$$\mathcal{T}_n = \Big\{ f: \ f(x) = \sum_{\|s\|_1 \le n} \delta_s(f,x) \Big\}.$$

Тоді, з одного боку, із означення колмогоровського поперечника випливає, що $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \ge d_M(B^{\Omega}_{1,\theta} \cap \mathcal{T}_n, L_2)$.

А з іншого, якщо P_n — оператор ортогонального проектування на $\mathcal{T}_n$, то для $f \in L_2$ і $t \in \mathcal{T}_n$

$$\|t-f\|_2 \ge \|P_n(t-f)\|_2 = \|t - P_n f\|_2$$

і, отже,

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \ge d_M(B^{\Omega}_{1,\theta} \cap \mathcal{T}_n, L_2 \cap \mathcal{T}_n). \qquad (15)$$

Оцінимо праву частину нерівності (15).

Нехай $K = |Q_n|$ і $\alpha_1, ..., \alpha_K$ — деяка ортонормована система функцій з $\mathcal{T}_n$. Тоді

$$e_k(x) = e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{K} a_k^j \alpha_j(x), \quad k \in Q_n,$$

і

$$\alpha_j(x) = \sum_{k \in Q_n} \overline{a}_k^j e_k(x), \quad j = \overline{1,K},$$

де $a_k^j = (e_k(x), \alpha_j(x)) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} e_k(x)\overline{\alpha_j(x)}\, dx, \quad j = \overline{1, K},$ — коефіцієнти Фур'є функції $e_k(x)$ за системою $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$, а $\overline{a}_k^j = (\alpha_j(x), e_k(x)),\ k \in Q_n$.

Внаслідок ортонормованості систем функцій $\{e_k(x)\}_{k\in Q_n}$ та $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$

$$\sum_{j=1}^{K} |a_k^j|^2 = \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 = 1. \tag{16}$$

Розглянемо наближення функції $e_k(x)$ її M-ою сумою Фур'є за системою $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$ $(M = [\frac{K}{2}])$. Одержимо

$$R_k^2 = \Big\| e_k(x) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(x) \Big\|_2^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{K} a_k^j \alpha_j(x) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(x) \Big\|_2^2 =$$

$$= \Big\| \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(x) \Big\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2.$$

Далі, скориставшись (16), можемо записати

$$\sum_{k\in Q_n} R_k^2 = \sum_{k\in Q_n} \sum_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2 = \sum_{k\in Q_n} \Big(\sum_{j=1}^{K} |a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^{M} |a_k^j|^2 \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{K} \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^{M} \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 = K - M \geq \frac{K}{2}. \tag{17}$$

Розглядаючи (17) приходимо до висновку, що існує вектор $s^* = (s_1^*, ..., s_d^*)$, $\|s^*\|_1 = n$, такий, що

$$\sum_{k\in\rho(s^*)} R_k^2 \geq \frac{1}{2} |\rho(s^*)|,$$

де $|\rho(s^*)|$ — кількість елементів множини $\rho(s^*)$.

Розглядаємо тепер функцію

$$g_3(x) = \omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} e^{i(k,x)}$$

і покажемо, що $C_5 g_3 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ при деякому $C_5 > 0$. Маємо

$$\|g_3\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \le C_6 \Big(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(g_3,x)\|_1^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 \omega^{-1}(2^{-\|s^*\|_1}) \|A_{s^*}(g_3,x)\|_1 \le C_7 \omega^{-1}(2^{-\|s^*\|_1}) \omega(2^{-\|s^*\|_1}) = C_7,$$

і отже, $C_5 g_3 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ при $C_5 = C_7^{-1}$.

Далі, запишемо відхилення від функції $g_3(x+y)$, $x, y \in \pi_d$, її M-ої суми Фур'є $S_M(g_3(x+y), \alpha)$ за системою функцій $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$. Матимемо

$$R_M(x,y) = g_3(x+y) - S_M(g_3(x+y), \alpha) =$$

$$= \omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k \in \rho(s^*)} e^{i(k,y)} \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(x)$$

і відповідно

$$\|R_M(\cdot,y)\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{K} \Big| \omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k \in \rho(s^*)} a_k^j e^{i(k,y)} \Big|^2. \tag{18}$$

Тепер, враховуючи співвідношення (16) – (18), будемо мати

$$(2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \|R_M(\cdot,y)\|_2^2 \, dy = \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{j=M+1}^{K} \sum_{k \in \rho(s^*)} |a_k^j|^2 =$$

$$= \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k \in \rho(s^*)} \sum_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2 = \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k \in \rho(s^*)} R_k^2 \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) |\rho(s^*)|.$$

Звідси випливає, що для деякого $y^* \in \pi_d$ мають місце співвідношення:

$$\|R_M(\cdot,y^*)\|_2^2 \gg \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) |\rho(s^*)| \asymp \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) 2^{\|s^*\|_1}$$

або
$$\|R_M(\cdot, y^*)\|_2 \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}. \tag{19}$$

Таким чином, із (15) та (19) отримуємо
$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}$$

і як наслідок:
$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty) \geq d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}.$$

Шукана оцінка поперечника $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty)$ у випадку $1 \leq \theta < 2$ встановлена. Теорему доведено.

Зауваження 2. Покладаючи в теоремі $\theta = \infty$, отримуємо таку оцінку
$$\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}} \ll d_M(H^{\Omega}_1, L_\infty) \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d}{2}}.$$

Зауваження 3. При $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$, $r_1 > 1$, з результатів теореми випливають відповідні результати для класів $B^r_{1,\theta}$, які встановлено в роботі [13].

1. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356 – 377.
2. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1557–1568.
3. *Конограй А.Ф.* Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_∞ // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2006. — **3**, №4. — С. 181 – 197.
4. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.
5. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — P. 35 – 48.
6. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1989.— **187**.— С. 143–161.
7. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.

8. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse // Ann. Math. — 1936. — **37**. — P. 107 - 111.
9. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
10. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P. 889–906.
11. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 - 112.
12. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — С. 433–476.
13. *Романюк А.С.* Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ в метрике пространства L_∞ // Укр. мат. вісник.— 2005.— **2**, № 2. — С. 201–218.