Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 160-166

УДК 517.5

В. В. Ковтунець (Національна академія управління, Київ)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ АЛГОРИТМУ РЕМЕЗА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ

В роботі описано аналог алгоритму Ремеза для комплекснозначних функцій та доведено його збіжність зі швидкістю геометричної прогресії.

Нехай K — довільний компакт, на якому задано простір $C(K)$ комплекснозначних неперервних на K функцій з рівномірною нормою. Припустимо, що на K задано комплеснозначну чебишовську систему функцій $\varphi_0(z), \varphi_1(z), ..., \varphi_n(z)$. Для довільної функції $f \in C(K)$ будемо розглядати узагальнений поліном $\mathrm{P}(f,z) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(z)$, який здійснює найкраще рівномірне наближення функції f на компакті K. Таким чином маємо заданий на просторі $C(K)$ оператор найкращого наближення $\mathrm{P} : C(K) \to P_{n+1}$ поліномами із $(n+1)$-вимірного підпростору P_{n+1}, натягнутого на вектори $\varphi_0(z), \varphi_1(z), ..., \varphi_n(z)$.

В роботі [1] показано, що в загальному випадку оператор P не задовольняє умову сильної єдиності і відповідно умову Ліпшиця, як у дійсному випадку. Натомість доведено, що оператор P задовольняє модифіковану нерівність сильної єдиності з показником 2:

$$\|f - Q\|^2 \geq \|f - \mathrm{P}(f)\|^2 + \gamma(f) \, \|Q - \mathrm{P}(f)\|^2$$

та відповідно умову Гельдера з показником 1/2.

Автором в роботах [2–4] доведено, що оператор P є односторонньо диференційовним за кожним напрямком у випадках:

1) множина K — скінченна;

2) характеристична множина різниці $f - \mathrm{P}(f)$ складається із $2n+3$ точок.

На основі згаданих результатів розроблено алгоритм типу Ремеза для побудови многочлена найкращого наближення [5–6]. Для побудованого алгоритму доведено просту збіжність, хоча в числових експериментах він забезпечує квадратичну швидкість збіжності на скінченних множинах, в т.ч. близьких до характеристичної (з кількістю точок від $n+2$ до $2n+3$), і лінійну збіжність на довільних множинах.

Таким чином, питання дослідження збіжності алгоритмів типу Ремеза залишається актуальним.

В цій роботі доводяться оцінки збіжності алгоритму Ремеза в припущенні, що існує ефективний спосіб побудови полінома найкращого наближення на скінченній множині з кількістю точок від $n+2$ до $2n+3$.

1. Опис алгоритму Ремеза для комплекснозначних функцій. Позначення. На початковому кроці вважаємо, що на множині Z_0, $n+2 \leq |Z_0| \leq 2n+3$, побудовано поліном найкращого наближення $p_0 \in P_{n+1}$.

На k-му кроці, маючи поліном p_k найкращого наближення на множині $Z_k = \left\{z_0^k, z_1^k, ..., z_m^k\right\}$, $n+1 \leq m \leq 2n+3$, знаходимо точку z_k^* максимального відхилення полінома p_k від функції f на всьому компакті K. Далі будуємо поліном p_{k+1} найкращого наближення функції f на множині $Z_k \bigcup \{z_k^*\}$. При цьому може з'ясуватися, що характеристична множина для задачі найкращого наближення на $Z_k \bigcup \{z_k^*\}$ не співпадає з множиною $Z_k \bigcup \{z_k^*\}$. Так, зокрема, буде кожного разу, коли множина Z_k містить $2n+3$ точки. Тоді деякі точки звідси можна вилучити. Таким чином, в підсумку множина Z_{k+1} має бути характеристичною для задачі найкращого рівномірного наближення на $Z_k \bigcup \{z_k^*\}$ і отримується приєднанням до Z_k точки z_k^* та, можливо, вилученням із неї деякої іншої точки (точок), що має з'ясуватися в процесі побудови полінома p_{k+1}.

Слід зазначити, що для побудови полінома найкращого рівномірного наближення на скінченній множиніZ_k можна скористатись як алгоритмом, запропонованим в [5], так і алгоритмом Лоусона [7] або методом напівнескінченного програмування [8]. Перевага алгоритму [5] та алгоритму Лоусона в тому, що вони одночасно знаходять характеристичну множину. Алгоритм [5] практично демонструє квадратичну швидкість збіжності, на відміну від алгоритму Лоусона, який практично і теоретично не має навіть лінійної збіжності.

Надалі будемо використовувати, крім наведених вище, такі позначення. Через e_k позначимо величину накращого наближення функції f на множині Z_k, а через E_k — норму різниці $\|f - p_k\| = \|f - p_k\|_{C(K)}$. Величину найкращого наближення функції f на компакті K традиційно позначатимено через $E(f)$. Якщо ж мова йтиме про величину найкращого наближення функції f на множині $Z \subset K$, то позначатимемо її через $E(f, Z)$.

2. Збіжність алгоритму Ремеза. Наступна теорема має допоміжне значення для подальших викладок. Наводимо її як окреме твердження і тому, що метод доведення показує, що алгоритми типу Ремеза можна застосовувати з гарантованою збіжністю до значно ширших класів задач.

Теорема 1. *Алгоритм Ремеза збігається на довільному метричному компакті K, тобто для довільного компакта K, довільної комплекснозначної неперервної на K функції f та довільної чебишовської на K системи функцій послідовність поліномів p_k збігається до полінома найкращого наближення функції f .*

Доведення. Припустимо супротивне. З обмеженої послідовності поліномів $\{p_k\}$ виберемо збіжну підпослідовність $\{p_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ таку, що збігається відповідна послідовність точок $\{z^*_{k_l}\}$, а також збігаються послідовності $\left\{e^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ та $\left\{E^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$. Позначимо

$$p_{k_l} = q_l, \quad z^*_{k_l} = v_l, \quad \lim_{l\to\infty} v_l = z^*, \quad \lim_{l\to\infty} q_l = p^*.$$

Із визначення точки z^* випливає, що $\lim\limits_{l\to\infty} e_{k_l} = \lim\limits_{l\to\infty} E^{k_l}$. Із зробленого припущення випливає, що $\lim\limits_{l\to\infty} e_{k_l} = e < E(f)$, і при цьому $\|f - p^*\| = e$. В той же час $\lim\limits_{l\to\infty} E^{k_l} = E^* \geq E(f)$, і $\|f - p^*\| = E^*$.

Отримана суперечність і доводить теорему.

3. Лінійна збіжність алгоритму Ремеза.

Теорема 2. *Алгоритм Ремеза на довільному метричному компакті K збігається зі швидкістю геометричної прогресії, тобто для довільного компакта K, довільної комплекснозначної неперервної на K функції f та довільної чебишовської на K системи функцій послідовність поліномів p_k збігається до полінома найкращого наближення функції f так, що*

$$\left\|\mathrm{P}(f) - p_k\right\| \leq Cq^k, \quad C = \mathrm{const}, \quad 0 < q = \mathrm{const} < 1.$$

Доведення. За теоремою 1 послідовність поліномів $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до полінома найкращого наближення $\mathrm{P}(f)$ функції f. Відповідно послідовність множин $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ мусить збігатися до характеристичної множини функції f.

За теоремою Валле–Пуссена величина $E\,(f)$ найкращого рівномірного наближення функції $f\,(x)$ при кожному значенні k задовольняє нерівність

$$e^k < E(f) < E^k.$$

Доведемо, що для всіх значень k виконується нерівність:

$$e^{k+1} \geq e^k + c(E^k - e^k), \tag{1}$$

де $0 < c = \mathrm{const} < 1$ не залежить від k.

Нехай m означає кількість точок у множині Z_{k+1}.

На множині Z_{k+1} розглянемо допоміжну функцію g_k, задану таким чином:

$g_k(z_k^*) = (e^k - E^k)\mathrm{sign}(f - p_k)(z_k^*)$,

$g_k(z) = 0$ у всіх інших точках множини Z_{k+1}.

Таким чином, поліном p_k є елементом найкращого наближення функції $f + g_k$ на множині Z_{k+1}, і при цьому $e^k = \|f + g_k - p_k\|_{C(Z_{k+1})}$, $e^{k+1} = \|f - p_{k+1}\|_{C(Z_{k+1})}$, а $E^k - e^k = \|g_k\|_{C(Z_{k+1})}$.

Розглянемо відрізок $f + (1-t)g_k$, $0 \leq t \leq 1$, у просторі $C(K)$ та відповідну однопараметричну множину поліномів найкращого наближення $p(z,t) = \mathrm{P}(f + (1-t)g_k, Z_k)$.

Критерій Ремеза найкращого рівномірного наближення при кожному значенні параметра t будемо записувати у формі

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j(t)\overline{(f(z_j^{k+1}) + g_k(z_j^{k+1}) - p(z_j^{k+1},t))}\varphi_i(z_j^{k+1}) = 0, \tag{2}$$

$$i = 0, 1, ..., n, \quad \sum_{j=1}^{n} \delta_j(t) = 1,$$

де сума береться по всіх точках множини Z_{k+1}, причому $z_m^{k+1} = z_{k+1}^*$, всі коефіцієнти $\delta_j(t)$ є загалом невід'ємними, а строго додатні лише ті з них, які відповідають точкам, що входять до характеристичної множини найкращого наближення відповідної функції $f + (1-t)g_k$ на множині Z_{k+1}.

З побудови множини Z_{k+1} випливає, що точка z^*_{k+1} належить до характеристичної множини найкращого наближення на Z_{k+1} функції f.

В кожній точці відрізка $f + (1-t)g_k$, $0 \le t \le 1$, у просторі $C(K)$ поліном $p(x,t) = \mathrm{P}(f+(1-t)g_k, Z_{k+1})$ найкращого наближення функції $f + (1-t)g_k$ на множині Z_{k+1} та похибка такого наближення є односторонньо диференційовними за параметром t. А при всіх значеннях параметра t, при яких чисельність елементів характеристичної множини не змінюється, існує відповідна похідна: ліва і права похідні тоді співпадають [4]. При цьому

$$E'(t) = -\sum_{j=1}^{m} \delta_j(t) \mathrm{Re} \frac{\overline{(f+(1-t)g_k)(z_j^{k+1}) - p(t, z_j^{k+1})}}{E(t)} g_k(z_j^{k+1}) =$$

$$= -\delta_m(t) \mathrm{Re} \frac{\overline{(f+(1-t)g_k)(z^*_{k+1}) - p(t, z^*_{k+1})}}{E(t)} g_k(z^*_k), \qquad (3)$$

де $\delta_j(t)$ взято з критерію найкращого рівномірного наближення (2).

Звідси, застосовуючи теорему 1, отримуємо такі твердження:

1) при будь-якому k функція $E(t)$ строго зростаюча на деякому проміжку $[0,\tau], 0 < \tau \le 1$;

2) при всіх достатньо великих значеннях k буде $\tau = 1$;

3) при всіх достатньо великих значеннях k буде виконуватись нерівність

$$\mathrm{Re} \frac{\overline{(f+(1-t)g_k)(z^*_{k+1}) - p(t, z^*_{k+1})}}{E(t)} g_k(z^*_{k+1}) \ge \gamma = \mathrm{const} > 0;$$

4) при всіх достатньо великих значеннях k буде виконуватись нерівність

$$\delta_{m+1}(t) \ge \lambda > 0.$$

Тоді при всіх достатньо великих k для всіх значень похідної $E^{'}(t)$, включаючи і обидві односторонні похідні, виконується нерівність

$$E'(t) \ge c \, \|g_k\|_{C(Z_{k+1})} = c(E^k - e^k), \quad t \in [0,1].$$

Отже,

$$e^{k+1} - e^k = E(0) - E(1) \geq c(E^k - e^k), \quad 0 < c < 1. \tag{4}$$

Нерівність (1) доведено.

З (1) випливає нерівність

$$E(f) - e^{k+1} \leq E(f) - e^k - c(E^k - e^k).$$

Оскільки $E(f) \leq E^k$, то далі отримуємо:

$$E(f) - e^{k+1} \leq (1-c)(E(f) - e^k).$$

Враховуючи, що $0 < c < 1$, маємо лінійну збіжність послідовності $\left\{E(f) - e^k\right\}_{k=0}^{\infty}$:

$$E(f) - e^k \leq Cq^k, \quad C = \text{const} > 0, \quad 0 < q = \text{const} < 1. \tag{5}$$

Із нерівностей (1) та (5) випливає

$$E_k - E(f) \leq \frac{1}{c}(E(f) - e_k) \leq C_1 q^k. \tag{6}$$

Застосовуючи нерівність сильної єдиності для комплекснозначних функцій [1], отримуємо

$$\|p_k - \mathrm{P}(f)\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}(\|p_k - f\|^2 - \|\mathrm{P}(f) - f\|^2) <$$

$$< \frac{2E_0}{\gamma}(\|p_k - f\| - \|\mathrm{P}(f) - f\|) \leq \frac{2E_0}{\gamma}(E^k - E(f) \leq C_2 q^k.$$

Отже,

$$\|p_k - \mathrm{P}(f)\| \leq C_2 q_1^k,$$

де $q_1 = \sqrt{q}$, що й потрібно було довести.

1. *Newman D.J., Shapiro H.S.* Some theorems on Tchebyshev Approximation // Duke Math. J. — 1963. — №30. — P. 673–681.

2. *Ковтунец В.В.* Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. I // Укр. мат. журн. — 1986. — **38,** №4. — С. 437–443.

3. *Ковтунец В.В.* Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. II // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №6. — С. 437–443.

4. *Ковтунец В.В.* Дифференцируемость оператора наилучшего равномерного приближения комплекснозначных функций // Докл. АН СССР. — 1990. — **313**, №3. — С. 548–551.

5. *Ковтунец В.В.* Алгоритм построения полинома наилучшего приближения комплекснозначных функций //Исследования по теории аппроксимации функций. — Киев: Институт математики АН УССР, 1987. — С. 35–42.

6. *Ковтунец В.В.* Алгоритм построения полинома наилучшего приближения комплекснозначной функции на компактном множестве // Некоторые вопросы теории приближения функций и ее приложения. — Киев: Институт математики АН УССР, 1988. — С. 71–78.

7. *Ellacott S., Williams J.* Linear Chebyshev approximation in the complex plane using Lawson's algorithm // Math. of Computations. — 1976. — **30**, №133. — P. 35–44.

8. *Glashoff K., Roleff K.* A new method for Chebyshev approximation of complex-valued functions. I // Math. of Computations. — 1981. — **36**, №153. — P. 233—239.