

УДК 517.5

Я. Г. Іващук

(Нац. ун-т водного господарства та природокористування, Рівне)

**ОЦІНКИ ЗБІЖНОСТІ АЛГОРИТМУ РЕМЕЗА
ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСІВ***В статті доведено лінійну та квадратичну збіжність алгоритму Ремеза для інтерполяційних класів.*

Вступ. Вперше застосування алгоритму Ремеза до побудови елемента найкращого наближення в інтерполяційному класі запропоновано в роботі [1]. Однак в цитованій роботі не запропоновано конструктивного алгоритму побудови елемента найкращого наближення на множині із $n + 1$ точки, і доведено лише факт збіжності алгоритму Ремеза без оцінок швидкості збіжності.

Практичні аспекти застосування алгоритму, включаючи наближення на множині із $n + 1$ точки, досліджувались в роботах Є. Ремеза та В. Гаврилюк (див. [2,3]).

Метою цієї роботи є доведення лінійної та квадратичної (при відповідних обмеженнях) збіжності алгоритму Ремеза для найкращого рівномірного наближення неперервних функцій елементами інтерполяційних класів.

Нагадаємо, що інтерполяційним класом F порядку $n - 1$ називається множина неперервних по $x \in [a, b]$ функцій $y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, залежних від параметрів $c_1, c_2, \dots, c_n$, в якому однозначно розв'язується інтерполяційна задача в n довільних точках відрізка $[a, b]$ [3].

Отже, на відрізку $[a, b]$ розглядається простір $C[a, b]$ неперервних функцій та інтерполяційний клас F порядку $n - 1$, елементи якого неперервні по змінній x і неперервно диференційовні по параметрах $c_j, j = \overline{1, n}$. Оператор $P : C[a, b] \rightarrow F$, який у відповідність кожній неперервній функції $f \in C[a, b]$ ставить елемент її найкращого рівномірного наближення $P(f) \in F$, називаємо оператором найкращого наближення. Величину найкращого рівномірного наближення функції $f \in C[a, b]$ позначимо через $E(f)$, тобто $E(f) = \|f - P(f)\|_{C[a, b]}$.

© Я. Г. Іващук, 2008

Алгоритм Ремеза для інтерполяційного класу передбачає ітераційний процес, де на кожному кроці ітерації будується елемент найкращого наближення на множині із $n+1$ точки (так звана узагальнена чебишовська інтерполяція). Перехід до наступної ітерації здійснюється заміною однієї із цих точок точкою максимального відхилення побудованого елемента від функції, що наближається.

Зазначимо, що оператор найкращого наближення елементами інтерполяційного класу порядку $n-1$ на множині із $n+1$ точки, на відміну від многочленів, є нелінійним. В роботі [4] розроблено алгоритм побудови елемента найкращого рівномірного наближення з інтерполяційного класу на скінченній множині, що складається із $n+1$ точки. Доведено, що цей ітераційний алгоритм збігається з квадратичною швидкістю. Там же побудовано і новий алгоритм побудови елемента найкращого наближення на відрізку, який загалом збігається з лінійною швидкістю, а при певних умовах – з квадратичною.

Питання про швидкість збіжності алгоритму Ремеза для інтерполяційних класів досі залишалося відкритим.

Для дослідження швидкості збіжності алгоритму Ремеза ми користуємося, як і в роботі [4], диференціальними властивостями оператора P найкращого наближення елементами інтерполяційного класу [5].

1. Основні позначення і теорема про лінійну збіжність.

Для довільного компакту $X \subset \mathbf{R}$ через $C(X)$ позначимо банахів простір неперервних на X функцій з рівномірною нормою. Через $P(f, X)$ позначимо елемент найкращого рівномірного наближення функції f елементами інтерполяційного класу F на множині X . $\mathbf{P}_X : C(X) \rightarrow F$ означатиме відповідний оператор найкращого рівномірного наближення на компактi X .

Нехай задано функцію $f(x) \in C([a, b])$. Через $X^k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\}$ позначимо множину точок з відрізка $[a, b]$, на якій в k -й ітерації побудовано елемент $F^k = F(x, c^k)$ найкращого рівномірного наближення із інтерполяційного класу F для функції $f(x)$. Позначимо при цьому $E^k = \|f(x) - F^k(x)\|_{C[a, b]}$, $e^k = \|f(x) - F^k(x)\|_{C[X^k]}$.

Через $x_*^{(k)}$ позначимо точку відрізка $[a, b]$, в якій дося-

гається максимальне відхилення елемента F^k від функції $f(x)$. При переході до наступної ітерації ця точка замінить на множині X^k деяку точку $x_j^{(k)}$ так, що матимемо нову множину $X^{k+1} = X^k \setminus \{x_j^{(k)}\} \cup \{x_*^{(k)}\} = \{x_1^{(k+1)}, \dots, x_{n+1}^{(k+1)}\}$, на якій різниця $f(x) - F^k(x)$ змінюватиме знак n раз.

Теорема 1. Для довільної неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ та довільного заданого на $[a, b]$ інтерполяційного класу F , неперервно диференційного за параметрами, послідовність побудованих алгоритмом елементів $F^k(x) = F(x, c^k)$ збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ зі швидкістю геометричної прогресії.

Доведення. Зауважимо, що послідовність $F(x, c^k)$ збігається до елемента $P(f)$ найкращого наближення функції $f(x)$. Звідси випливає, що послідовність множин X^k поточною збігається до множини точок альтернансу різниці $f(x) - P(f, x)$.

За теоремою Валле-Пуссена величина $E(f)$ найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ задовольняє нерівність

$$e^k < E(f) < E^k.$$

Доведемо, що для всіх значень k виконується нерівність:

$$e^{k+1} \geq e^k + c(E^k - e^k), \quad (1)$$

де $0 < c = \text{const} < 1$ не залежить від k .

На множині X^{k+1} розглянемо допоміжну функцію g_k таку, що $g_k(x_*^{(k)}) = \pm(e^k - E^k)$, де знак плюс береться у випадку, коли $x_*^{(k)}$ є $(+)$ -точкою, а знак мінус — у випадку, коли $x_*^{(k)}$ є $(-)$ -точкою. В усіх інших точках множини X^{k+1} приймаємо $g_k(x) = 0$.

Тоді елемент F^k є елементом найкращого наближення функції $f + g_k$ на множині X^{k+1} , і при цьому $e^k = \|f + g_k - F^k\|_{C[X^{k+1}]}$, а $E^k - e^k = \|g_k\|_{C(X^{k+1})}$.

В кожній точці відрізка $f + (1-t)g_k$, $0 \leq t \leq 1$, елемент $F(x, t) = P(f + (1-t)g_k, X^{k+1})$ найкращого наближення функції $f + (1-t)g_k$ на множині X^{k+1} та похибка $E(t) = \|f + (1-t)g_k - F(x, t)\|$ такого наближення є неперервно диференційовними за параметром t . При цьому

$$E'(t) = - \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(t) g_k(x_j^{(k+1)}), \quad (2)$$

де $\delta_j(t)$ є додатними коефіцієнтами з критерію найкращого рівномірного наближення [4]:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(t) (f(x_j^{(k+1)}) + (1-t)g_k(x_j^{(k+1)}) - F(x_j^{(k+1)}, t)) \hat{\varphi}(x_j^{(k+1)}, t) = 0,$$

де

$$\hat{\varphi}(x_j^{(k+1)}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x_j^{(k+1)}, c(t))}{\partial c_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(x_j^{(k+1)}, c(t))}{\partial c_n} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(t) = 1, \quad \delta_j(t) > 0.$$

Із зробленого на початку доведення зауваження випливає існування константи $\delta > 0$, незалежної від t та від k , такої, що при всіх $k \geq 0$, всіх $j = 1, 2, \dots, n+1$ та всіх $t \in [0, 1]$ виконується нерівність:

$$\delta_j(t) \geq \delta. \quad (3)$$

Із (2) та (3) випливає, що для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$ має місце нерівність:

$$|E'(t)| \geq \delta \|g_k\|_{C(X^{k+1})} = \delta(E^k - e^k). \quad (4)$$

Оскільки

$$e^{k+1} = \|f(x) - F^{k+1}(x)\|_{C[X^{k+1}]} = E(1),$$

$$e^k = \|f(x) + g_k - F^{k+1}(x)\|_{C[X^{k+1}]} = E(0),$$

то за теоремою про скінченні прирости маємо:

$$e^{k+1} - e^k = E(1) - E(0) = E'(t) \geq \delta(E^k - e^k).$$

Нерівність (1) доведено.

З (1) випливає нерівність:

$$E(f) - e^{k+1} \leq E(f) - e^k - \delta(E^k - e^k).$$

Оскільки $E(f) \leq E^k$, то звідси випливає:

$$E(f) - e^{k+1} \leq (1 - \delta)(E(f) - e^k).$$

Враховуючи, що $0 < \delta < 1$, маємо лінійну збіжність послідовності $\{E(f) - e^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Звідси за допомогою стандартних міркувань із застосуванням нерівності сильної єдиності [5] виводиться лінійна збіжність послідовності елементів $\{F^k\}_{k=0}^{\infty}$ до елемента найкращого наближення $P(f)$.

2. Теорема про квадратичну збіжність.

Теорема 2. Нехай задана на $[a, b]$ функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційовною, а функції $F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ інтерполяційного класу F — двічі неперервно диференційовні по x та по параметрах c_i , $i = \overline{1, n}$. Якщо модуль різниці

$$f(x) - P(f, x) \quad (5)$$

досягає свого максимуму рівно в $n+1$ точці $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, які утворюють чебишовський альтернанс різниці (5) на відрізку $[a, b]$, і в кожній такій точці виконується умова

$$f''(x_j) - P''_{xx}(f, x_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (6)$$

то послідовність побудованих за алгоритмом Ремеза елементів $F(x, c^k)$, починаючи з деякої ітерації, збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ з квадратичною швидкістю.

Доведення. Із того, що різниця $f - P(f)$ має єдиний альтернанс довжини $n+1$ впливає, що оператор найкращого наближення елементами інтерполяційного класу є диференційовним по Гато в усіх точках з деякого околу точки f [4].

Нехай в результаті виконання k -ї ітерації, відповідно до вище запроваджених позначень, отримано елемент $F^k(x)$, який найкращим чином наближає функцію $f(x)$ на множині $X^k = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n+1}^k\}$. Наступний елемент найкращого наближення необхідно будувати на множині X^{k+1} . Позначимо також

$$E^k = \|f - F^k\|_{C[a, b]}, e^k = \|f - F^k\|_{C(X^k)}.$$

Аналогічно до доведення теореми 1, побудуємо допоміжну функцію g_k , тепер уже двічі неперервно диференційовну і таку, що елемент F^k є елементом найкращого наближення функції $f + g_k$ на

$[a, b]$, і при цьому $E^k = \|f + g_k - F^k\|$, а $E^k - e^k = \|g_k\|_{C(X^{k+1})}$, $\|g_k\|_{C(X^{k+1})} = \|g_k\|_{C[a, b]}$.

Завдяки збіжності алгоритму можемо стверджувати, що при всіх достатньо великих значеннях k умови теореми виконуватимуться для всіх функцій відрізка $f + (1 - t)g_k$.

Враховуючи що

$$\begin{aligned} F^{k+1} &= P(f, X^{k+1}) = P(f + g_k) + D(f + g_k, -g_k) + o(\|g_k\|) = \\ &= F^k + D(f + g_k, -g_k) + o(\|g_k\|) \end{aligned}$$

для всіх достатньо великих k за теоремою про скінченні прирости [6] маємо

$$\begin{aligned} \|P(f) - F^{k+1}\| &\leq 2 \|P(f) - P(f + g_k) - D(f + g_k, -g_k)\| \leq \\ &\leq 2 \|g_k\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|P'(f + (1 - t)g_k) - P'(f + g_k)\|, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} P'(f + (1 - t)g_k) &= \frac{\partial P(f + (1 - t)g_k)}{\partial t}, \\ P'(f + g_k) &= \frac{\partial P(f + (1 - t)g_k)}{\partial t} \Big|_{t=+0}. \end{aligned}$$

Покажемо, що

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|P'(f + (1 - t)g_k) - P'(f + g_k)\| \leq K \|g_k\|, \quad K = \text{const}. \quad (8)$$

Розглянемо систему рівнянь для похідної $P'(f + (1 - t)g_k) = D(t) = D(t, x)$:

$$D(t, x_j(t)) + (-1)^j \alpha(t) = -g_k(x_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (9)$$

де $\alpha(t) = E'(t) = \frac{d\|f + (1 - t)g_k - P(f + (1 - t)g_k)\|}{dt}$ — похідна від величини найкращого наближення по параметру t (див. [4]).

Оскільки визначник такої системи відокремлений від нуля для всіх значень $t \in [0, 1]$, то коефіцієнти $d_i = d_i(t)$ полінома $D(t, x(t))$ при всіх значеннях $t \in [0, 1]$ задовольняють нерівність

$$|d_i(t)| \leq K_1 \|g_k\|_{C[a, b]}. \quad (10)$$

Із рівностей

$$f'(x_j(t)) + (1-t)g'_k(x_j(t)) - P'_x(x_j(t), t) = 0, \quad (11)$$

що виконуються для всіх внутрішніх точок відрізка $[a, b]$, диференційовності оператора найкращого наближення і функції похибки найкращого наближення та умов теореми, за теоремою про неявну функцію випливає, що всі такі функції $x_j(t)$ є неперервно диференційовними на $[0, 1]$ (якщо до точок альтернансу входять кінцеві точки, диференційовність відповідних функцій очевидна).

Із (11) за теоремою про неявну функцію завдяки умовам теореми та нерівностям (10) отримуємо нерівності:

$$\left| \frac{dx_j(t)}{dt} \right| = \left| \frac{D'_x(x_j(t), t)}{f''(x_j(t)) + (1-t)g''_k(x_j(t)) - P''_{xx}(x_j(t), t)} \right| \leq K_2 \|g_k\|_{C[a,b]}. \quad (12)$$

Через те, що поліноми $D(x, t)$ здійснюють чебишовську інтерполяцію функції $-g_k$ у точках $x_j(t)$ і є неперервно диференційовними по змінній x , то із нерівності (12) випливає потрібна нерівність (8).

Оскільки оператор P диференційовний по Гато в точці f , то для всіх достатньо великих номерів k маємо нерівність

$$\|P(f) - F^k\| = \|P(f) - P(f + g_k)\| \geq c \|g_k\|, \quad c = \text{const} > 0,$$

Тоді із (7) та (8) випливає

$$\|P(f) - F^{k+1}\| \leq K \|g_k^2\| = K(E^k - e^k)^2 \leq K_4(P(f) - F^k)^2.$$

Теорему доведено.

1. Новодворский Е.П., Пинскер И.Ш. Процесс уравнивания максимумов // Успехи мат. наук. — 1951. — 4, № 6(46). — С. 174–181.

2. Ремез Е.Я., Гаврилюк В.Т. Предложение о функциях интерполяционного класса доставляющее ключевой подход к трактовке общих аналогов метода последовательных чебышевских интерполяций // Докл. АН СССР. — 1968. — 183, №4. — С. 750–753.

3. Ремез Е.Я., Гаврилюк В.Т. О построении чебышевских приближений функциями интерполяционных классов // Укр. мат. жур. — 1971. — 23, №1. — С. 25–33.

4. Іващук Я.Г. Алгоритми найкращих наближень функцій інтерполяційними класами // Теорія наближень функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. 31. — С. 179–189.

5. Angelos J.R., Henry M.S., Kaufman E.H., Kroo A., Lenker T.D. Local Lipschitz and Strong Unicity Constants for Certain Nonlinear Families // J. Approx. Theory. — 1989. — 58. — Р. 164–183.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.