Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 149-152

УДК 513.836

Ю. Б. Зелинский (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

О КОНЕЧНОКРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ

Показано, что в классе непрерывных отображений произвольного двумерного многообразия в двумерный шар существует отображение, имеющее для каждой точки образа не более двух прообразов.

Будем говорить, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств конечнократно, если прообраз $f^{-1}y$ произвольной точки $y \in Y$ содержит конечное или пустое число точек.

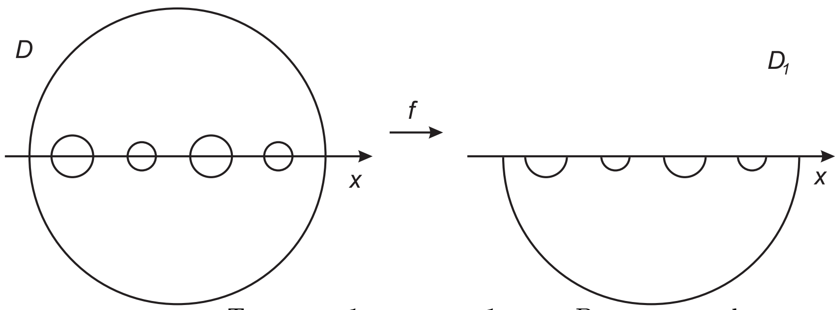
Скажем, что отображение f принадлежит к классу K_m, если прообраз каждой точки y содержит не более m точек. В случае, когда будем фиксировать отображаемые пространства, используем обозначение $K_m(X, Y)$.

Пусть $X = M^n$ — замкнутое n-мерное многообразие, а $Y = B^n$ — шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Известно, что произвольное непрерывное отображение замкнутого n-мерного многообразия в шар имеет топологическую степень нуль [1]. Тогда из теоремы 1.6.16 [1] следует, что каждое конечнократное отображение $f : M^n \to B^n$ принадлежит некоторому классу $K_m(M^n, B^n)$, где $m \geq 2$.

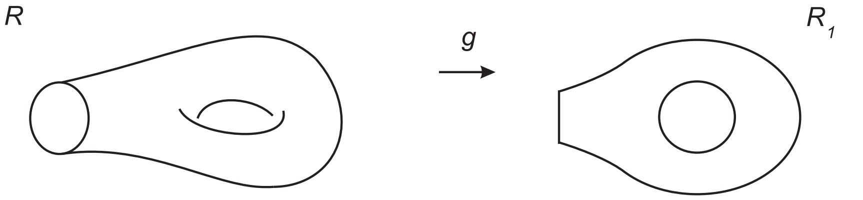
Исследуем некоторые случаи, когда класс $K_2(M^n, B^n)$ непуст. Рассмотрим непрерывные отображения замкнутых двумерных многообразий в двумерный шар.

Согласно известной топологической классификации замкнутых двумерных многообразий [2,3], произвольное такое многообразие можно представить как двумерную сферу с выброшенными $l+q$ кругами, заклеенными l ориентируемыми и q неориентируемыми ручками, где ориентируемая ручка — это тор с выброшенным кругом, а неориентируемая ручка — лист Мебиуса. Зададим непрерывное отображение на каждой части отдельно.

Двумерная сфера с выброшенными $l + q$ кругами топологически эквивалентна простому кругу с выброшенными $l + q - 1$ кружками. Не нарушая общности, пусть D — симметричный относительно оси x на координатной плоскости круг, а выброшенные кружки имеют

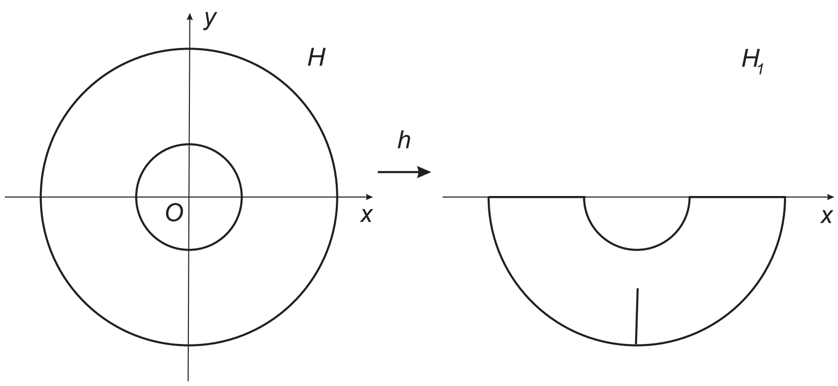


центры на оси x. Тогда отображение области D, заданное формулой $f(x,y) = (x, -|y|)$, принадлежит классу $B_2(D, D_1)$ и каждая точка области D_1, за исключением точек лежащих на оси x, имеет ровно два прообраза.



Ориентируемая ручка R, которую можно выбрать симметричной относительно плоскости xOy, очевидным образом проекцией на плоскость xOy также отображается отображением g класса $K_2(R, R_1)$ в плоское кольцо.

Лист Мебиуса представим как симметричное в координатной плоскости кольцо с тождественными антиподальными точками $(x,y) \equiv (-x,-y)$ внешней окружности. Зададим отображение $h \in K_2(H, H_1)$ как суперпозицию отображения кольца $h_1(x,y) = (x, -|y|)$ и отображения h_2, заданного на внешней окружности как склейка четырех точек кольца (x,y), $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ (отметим, что пары (x,y); $(-x,-y)$ и $(-x,y)$; $(x,-y)$ внешней окружности задают две точки листа Мебиуса). Это отображение $h = h_1 h_2$ согласовано со структурой листа Мебиуса и отображает лист Мебиуса на плоскую



односвязную область. Теперь для получения искомого отображения класса $K_2(M^2, B^2)$ достаточно склеить заданные отображения на соответствующих окружностях, которые при таких отображениях перешли в дуги окружностей. Отсюда получаем следующий результат:

Теорема 1. *Для произвольного замкнутого двумерного многообразия M^2 класс $K_2(M^2, B^2)$ непуст.*

Естественно, что теорема остается справедливой для подобластей двумерных многообразий при замене M^2.

Вопрос непустоты класса $K_2(M^n, B^n)$ для $n \geq 3$ остается открытым. В общем случае неизвестна даже оценка минимального m, для которого класс $K_m(M^n, B^n)$ непуст.

Для вещественных проективных пространств $\mathbb{RP}^n$, последовательно используя конструкцию, проведенную для листа Мебиуса, можно получить грубую оценку.

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ как шар B^n с отождествленными антиподальными точками граничной сферы S^n. Тогда отображение h, которое внутри шара задано как $h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n|)$, а на сфере S^n отождествляет все точки вида $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \ldots, \pm x_n)$, имеет кратность 2^{n-1}.

Теорема 2. *Классы $K_m(\mathbb{RP}^n, B^n)$ непусты при $m \geq 2^{n-1}$.*

В связи с полученными результатами и утверждениями из 1.6.14 и 1.6.16 [1] остаются открытыми следующие вопросы.

Пусть f — непрерывное отображение, заданное на границе области D в область D_1 n-мерного многообразия. Известно, что f принадлежит классу $K_k(\partial D, D_1)$.

Вопрос 1. Когда существует непрерывное продолжение f на всю область, которое на $\operatorname{Int} D$ будет внутренним отображением?

Вопрос 2. Когда существует непрерывное продолжение f на всю область, которое принадлежит классу $K_k(\partial D, D_1)$?

Вопрос 3. Когда существует непрерывное продолжение f на всю область, которое принадлежит классу $K_m(\partial D, D_1)$, где $m \leq k+2$?

1. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **73**. — 308 с.

2. *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977. — 344 с.

3. *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 301 с.