Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 142-148

УДК 517.518.4

П. В. Задерей (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)
О. М. Пелагенко (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)
Р. В. Товкач (Волинський державний університет)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ КРАТНИХ РЯДІВ ФУР'Є

Отримано достатні умови, виражені в термінах коефіцієнтів Фур'є, для збіжності в середньому кратних рядів Фур'є сумовних функцій.

Нехай V — замкнений обмежений поліедр в $\mathbb{R}^m$ з вершинами в точках з раціональними координатами, зірковий відносно початку координат, яка є його внутрішньою точкою, і такий, що продовження будь-якої його грані не проходить через початок координат; W — множина поліедрів з вказаними властивостями; $nV = \{x \in \mathbb{R}^m : x/n \in V\}$; $\mathbb{Z}^m$ — цілочислення решітка в $\mathbb{R}^m$.

Позначимо через $L_1(T^m)$ простір визначених на T^m 2π-періодичних по кожній змінній інтегровних функцій f з нормою $||f||_{L_1(T^m)} = \int\limits_{T^m} |f(x)|\, dx < \infty$, де $T^m = [0, 2\pi)^m$; $L_1 := L_1(T^1)$.

Нехай $f \in L_1(T^m)$ має ряд Фур'є виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}, \tag{1}$$

де $l \in \mathbb{Z}^m$, $(l, x) = \sum\limits_{i=1}^{m} l_i x_i$ і

$$S_{nV}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \tag{2}$$

— n-та частинна сума ряду (1).

Кажуть, що ряд (1) збігається в середньому (або в нормі простору $L_1(T^m)$) до функції f, якщо при $n \to \infty$

$$||f - S_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} \to 0. \tag{3}$$

Співвідношення (3) справедливе не для всіх функцій з простору $L_1(T^m)$. Приклад функції з L_1, для якої не виконується (3), побудував Ф. Рісс [1, с. 599].

В роботі знайдені достатні умови для виконання співвідношення (3), виражені через коефіцієнти Фур'є ряду (1).

Наведемо результати, які стосуються збіжності в середньому одновимірних тригонометричних рядів Фур'є

$$(C)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,\quad (S)\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx$$

відповідно парної функції $c \in L_1$ і непарної функції $s \in L_1$.

В подальшому будемо використовувати такі означення. Послідовність $\{a_k\} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ називається:

1) послідовністю обмеженої варіації, якщо $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\triangle a_k| < \infty$, де $\triangle a_k = a_k - a_{k+1} \forall\ k \geq 0$;

2) випуклою, якщо $\triangle^2 a_k = \triangle a_k - \triangle a_{k+1} \geq 0\ \forall\ k \geq 0$;

3) квазівипуклою, якщо $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle^2 a_k| < \infty$;

4) нуль-послідовністю, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Множини послідовностей 1) — 4) будемо позначати відповідно через BV, Y, K, C_0.

Має місце включення $Y \cap C_0 \subset K \cap C_0 \subset BV \cap C_0$.

Перші відомі результати, які стосуються збіжності в середньому рядів Фур'є парних інтегровних функцій, належать В. Юнгу і А.М. Колмогорову. Так, В. Юнг [2] показав, що ряд Фур'є (C), коефіцієнти якого $\{a_k\} \in Y$, збігається в середньому тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} a_k \ln k = 0. \tag{4}$$

А.М. Колмогоров [3] довів, що у випадку, коли $\{a_k\} \in K$, для збіжності в середньому ряду Фур'є (C) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (4).

Результати В. Юнга і А.М. Колмогорова узагальнювались багатьма авторами [4] — [10]. Зокрема, в [9] доведено, що ряд Фур'є (C), коефіцієнти якого $\{a_k\} \in BV$ і

$$k\triangle a_k = O(1)\ \text{ при } k \to \infty, \tag{5}$$

збігається в середньому тоді і тільки тоді, коли має місце (4).

Відомо [11, с. 136], що у випадку, коли послідовність дійсних чисел квазівипукла і обмежена, то вона є послідовністю обмеженої варіації і має місце (5).

Умови збіжності в середньому кратних тригонометричних рядів знайдені в [12] — [14].

Наступна теорема є m-вимірним аналогом одного результату С.В. Станоєвича з [9]. Умови, які накладаються на коефіцієнти Фур'є, на нашу думку, зручніші для перевірки, ніж, зокрема, умови, одержані в [12].

Теорема. *Нехай* $f \in L_1(T^m)$, *і її ряд Фур'є має вигляд* (1). *Якщо послідовність коефіцієнтів ряду* (1) $\{a_k\} \in BV$ *і задовольняє умови* (5) *та*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ln^m n = 0, \tag{6}$$

то має місце співвідношення (3).

В доведенні будемо використовувати один результат з [15].

Теорема А (А.Н. Подкоритов [15]). *Для довільного поліедра* $V \subset \mathbb{R}^m$ *справедлива асимптотична рівність*

$$C_1 \ln^m n \le \int\limits_{T^m} |D_{kV}(x)| dx \le C_2 \ln^m n, \tag{7}$$

де

$$D_{nV}(x) := \sum_{l \in nV} e^{i(l,x)}, \ l \in \mathbb{Z}^m,$$

$C_1, \ C_2$ — *абсолютні додатні сталі.*

Доведення теореми. Через $V_{2n,n}(f;x) := V_{2nV,nV}(f;x)$ позначимо суму Валле Пуссена функції $f(x)$

$$V_{2n,n}(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_{kV}(f;x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} \ a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0,n}; \\ \frac{2n-k+1}{n+1}, & k = \overline{n+1,2n}. \end{cases}$$

Покажемо, що для будь-якої функції $f \in L_1(T^m)$

$$||f - V_{2n,n}(f)||_{L_1(T^m)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Позначимо через

$$\sigma_{nV}(f;x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_{kV}(f;x)$$

середні Фейєра – Марцинкевича ($p = 1$).

В [12] (див. теорему А) доведено, що для довільної функції $f \in C(T^m)$ і довільного поліедра $V \in W$ середні $\sigma_{nV}(f;x)$ збігаються рівномірно до $f(x)$ на T^m і, як наслідок [16, гл. 7], $\sigma_{nV}(f;x)$ збігаються в нормі простору $L_1(T^m)$ до $f(x)$ для довільної функції $f \in L_1(T^m)$.

Має місце рівність

$$V_{2n,n}(f;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_{kV}(f;x) =$$

$$= 2\sigma_{2nV}(f;x) - \sigma_{nV}(f;x) - \frac{1}{n+1} \left(\sigma_{2nV}(f;x) - \sigma_{nV}(f;x)\right),$$

тоді

$$||f - V_{2n,n}(f)||_{L_1(T^m)} \leq ||f - \sigma_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} +$$
$$+2||\sigma_{2nV}(f) - \sigma_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} +$$
$$+\frac{1}{n+1}||\sigma_{2nV}(f) - \sigma_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} \to 0, \; n \to \infty.$$

Застосуємо перетворення Абеля до суми

$$V_{2n,n}(f;x) - S_{nV}(f;x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k D_{kV}(x) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k D_{kV}(x) -$$

$$-\frac{n}{n+1}a_{n+1}D_{nV}(x) = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x). \tag{8}$$

Оцінимо інтеграл від модуля $S_3(x)$ з (8). Згідно з (7)

$$\int\limits_{T^m} \left|\frac{n}{n+1}a_{n+1}D_{nV}(x)\right| dx \le C|a_n| \ln^m n. \tag{9}$$

Аналогічну оцінку одержимо для інтеграла від модуля суми $S_2(x)$ з (8). Дійсно,

$$\int\limits_{T^m} \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k D_{kV}(x)\Big| dx \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} |a_k| \ln^m k \le C|a_n| \ln^m n. \tag{10}$$

Для завершення доведення залишається показати, що

$$I := \int\limits_{T^m} \Big|\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k D_{kV}(x)\Big| dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Нехай $r_k \in \mathbb{Z}^m$, де $k = \{\inf \nu : r_k \in \nu V\}$. Коефіцієнт a_k ряду Фур'є (1) обчислюється за формулою

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} f(t) e^{-i(r_k,t)} dt. \tag{11}$$

Підставивши вирази для коефіцієнтів Фур'є (11) в (2), одержимо

$$S_{nV}(f;0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{T^m} f(t) D_{nV}(t) dt. \tag{12}$$

Враховуючи (12), оцінимо I за допомогою нерівності Гельдера

$$I = \sup_{|\varphi(x)|\le 1} \Big| \int\limits_{T^m} \varphi(x) \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k D_{kV}(x) dx \Big| =$$

$$= \sup_{|\varphi(x)|\le 1} \Big| \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k \int\limits_{T^m} \varphi(x) D_{kV}(x) dx \Big| =$$

$$= C \sup_{|\varphi(x)|\le 1} \Big| \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k S_{kV}(\varphi;0) \Big| \le$$

$$\le C \sup_{|\varphi(x)|\le 1} \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} \Big(\frac{2n-k}{n+1} \triangle a_k \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} (S_{kV}(\varphi;0))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C(n+1) \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} (\triangle a_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \sup_{|\varphi(x)|\le 1} \frac{1}{n+1} \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} (S_{kV}(\varphi;0))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C(n+1) \max_{n+1\le k\le 2n-1} |\triangle a_k| \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} |\triangle a_k| \Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C(n+1)|\triangle a_n| \Big(\sum_{k=n+1}^{2n-1} |\triangle a_k| \Big)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Об'єднавши оцінки (9), (10) і (13), знайдемо, що при $n \to \infty$

$$||f - S_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} = ||V_{2n,n}(f) - S_{nV}(f)||_{L_1(T^m)} + o(1) \to 0.$$

Таким чином, умова

$$a_n \ln^m n \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

є достатною для збіжності в середньому ряду Фур'є (1), за умови, що його коефіцієнти утворюють послідовність обмеженої варіації і задовольняють умову (5).

Теорема доведена.

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
2. *Young W.H.* On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc. — 1913. — **12**, № 1. — P. 41-70.
3. *Колмогоров А.Н.* Sur l'ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier-Lebesgue // Bull. Acad. pol. sci.(A). — 1923. — P. 83-86.
4. *Теляковский С.А.* К вопросу о сходимости рядов Фурье в метрике L // Мат. заметки. — 1967. — **1**, № 1. — С. 91-98.
5. *Теляковский С.А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1973. — **14**, № 3. — С. 317-328.

6. *Фомин Г.А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 2. — С. 213-222.

7. *Теляковский С.А.* К вопросу о сходимости рядов Фурье в метрике L // Мат. заметки. — 1967. — **1**, № 1. — С. 91-98.

8. *Фомин Г.А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сборник. — 1979. — **110** (152), № 2 (10). — С. 251-265.

9. *Stanojević Č.V.* Classes of L^1-convergence of Fourier and Fourier – Stieltjes series // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — **82**, № 2. — С. 209-215.

10. *Задерей П.В., Смаль Б.А.* О сходимости в пространстве L_1 рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 639-646.

11. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. Т. 1. — М.: Мир, 1985. — 264 с.

12. *Кузнецова О.И.* Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1998. — **63**, № 3. — С. 402-406.

13. *Kaur K., Bhatia S.S., Ram B.* L^1-convergence of complex double Fourier series // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) — 2003. — **113**, № 4. — P. 355-363.

14. *Задерей П.В., Капітоненко О.М.* Необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є і Тейлора // Збірник праць Ін-ту математики НАН Укра-їни. Т2, №2: Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. — Ки-їв: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 117-124.

15. *Подкорытов А.Н.* Порядок констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. — 1982. — **7**. — С. 110-111.

16. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — 332 с.