Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 124-141

УДК 519.65

П. Г. Жданов
(Урал. гос. ун-т, Екатеринбург, Россия)
В. Т. Шевалдин
(Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ L-СПЛАЙНЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЛИНЕЙНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

В работе предложен новый метод кусочно-экспоненциальной аппроксимации, основанный на локальных неинтерполяционных L-сплайнах, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка с постоянными действительными коэффициентами. Доказаны формосохраняющие свойства (близкие к локальной монотонности и локальной выпуклости) построенных сплайнов, а также их сглаживающее свойство. Вычислена константа Лебега данного метода, как оператора, действующего из C в C.

Введение. В современной машинной графике и геометрическом дизайне основным аппаратом аппроксимации являются локальные сплайны одной или нескольких переменных, построенные на основе полиномиальных NURBSов (неравномерных полиномиальных B-сплайнов). В данной статье предлагается схема построения экспоненциальных аналогов NURBSов на основе B-L-сплайнов с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка с постоянными действительными коэффициентами. Эта схема обобщает и развивает результаты исследований [1–4]. Построенные по дискретным данным одномерные локальные L-сплайны обладают формосохраняющими и сгла-

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00325), Интеграционного проекта фундаментальных научных исследований, выполняемых учеными УрО РАН совместно с СО РАН и Программы государственной поддержки "Ведущие научные школы" (проект НШ-1071.2008.1).

живающими свойствами. В вычислительной математике задача построения по значениям в точках аппроксимируемой функции кривых и поверхностей сложной формы с сохранением их геометрических свойств называется задачей изогеометрической аппроксимации, обширную библиографию можно найти, например, в [5–8]. В настоящее время такие вычислительные схемы используются при моделировании самолетных поверхностей, корпусов судов, лопастей гидротурбин, при описании различных геологических, физических и биологических явлений, а также при обработке изображений, в картографии, индустрии фильмов и т.д.

1. Построение локальных L-сплайнов Пусть $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3$ ($a_i \in \mathbb{R}$, D — символ дифференцирования) — произвольный линейно дифференциальный оператор третьего порядка с действительными коэффициентами, старший из которых равен 1. Для простоты изложения вначале все построения проведем в предположении, что характеристический многочлен этого оператора имеет только действительные корни β, γ и δ, которые при этом будем считать попарно различными и не равными нулю. Оператор $\mathcal{L}_3$ может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta), \quad \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Введем функцию $\varphi(t) = (\gamma-\delta)e^{\beta t} + (\delta-\beta)e^{\gamma t} + (\beta-\gamma)e^{\delta t}$, являющуюся решением однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$ и удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{2}$$

Пусть $h > 0$ и $m = m(\beta, \gamma, \delta, h)$ — некоторая константа, являющаяся нормирующим множителем (не обязательно положительная), которую определим немного позже.

B-L-сплайном с носителем $\left[-\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right]$ и равномерными узлами $-\frac{3h}{2}$, $-\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$, $\frac{3h}{2}$, соответствующим линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3$, называется функция вида

$$B(x) = m\left[\varphi\left(x + \frac{3h}{2}\right) + A\varphi\left(\left(x + \frac{h}{2}\right)_+\right) + C\varphi\left(\left(x - \frac{h}{2}\right)_+\right)\right],$$

где $\varphi(t_+) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ и константы A и C выбираются так, чтобы имело место равенство $B\left(\frac{3h}{2}\right) = B'\left(\frac{3h}{2}\right) = 0$. Нетрудно проверить, что тогда

$$A = -(e^{\beta h} + e^{\gamma h} + e^{\delta h}), \quad C = -\left(e^{(\delta+\gamma)h} + e^{(\beta+\delta)h} + e^{(\gamma+\beta)h}\right).$$

С учетом этого функция $B(x)$ может быть записана в виде

$$B(x) = m\begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + \\ +(\beta-\delta)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in [-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}], \\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - \\ -(\delta-\beta)(e^{\beta h}+e^{\delta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - \\ -(\beta-\gamma)(e^{\delta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}], \\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{(\beta+\delta)h}e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} + \\ +(\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in [\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}], \\ 0, & x \notin [-\frac{3h}{2}, -\frac{3h}{2}]. \end{cases} \tag{3}$$

В силу выбора функции φ (см. равенство (2)) и построения B-L-сплайна имеем $B \in C^1(\mathbb{R})$. Пусть f — произвольная функция, определенная на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Локальный L-сплайн $S \in C^1(\mathbb{R})$ определим при $x \in \left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h, \left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$ $(l \in \mathbb{Z})$ следующей формулой:

$$S(x) = S(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_i B(x-jh) = y_{l-1}B(x-(l-1)h) +$$

$$+ y_l B(x-lh) + y_{l+1}B(x-(l+1)h). \tag{4}$$

Здесь $y_l = f((l+\varepsilon)h)$ — значения функции f в точках $(l+\varepsilon)h$. Ключевым моментом в данной схеме является выбор параметров $\varepsilon = \varepsilon(\beta,\gamma,\delta,h)$ и $m = m(\beta,\gamma,\delta,h)$. Пусть ε — решение уравнения

$$e^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)(\beta-\gamma)h} = \frac{e^{\gamma h}-e^{\delta h}}{e^{\delta h}-e^{\beta h}} \cdot \frac{\delta-\beta}{\gamma-\delta} > 0,$$

т.е.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)h} \ln\frac{(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(\delta-\beta)}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}. \tag{5}$$

Число m определим формулой

$$m = \left(\frac{e^{\delta h} - e^{\gamma h}}{\delta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{e^{\beta h} - e^{\delta h}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - \beta}} \times$$

$$\times \left((e^{\beta h} - e^{\gamma h})(e^{\delta h} - e^{\gamma h})(\delta - \beta) \right)^{-1}. \tag{6}$$

Забегая вперед (см. лемму 4), поясним, что параметры m и ε выбраны таким образом, чтобы построенная схема была точна на двух экспонентах, а именно, имели место равенства $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$, $S(e^{\gamma x}, x) = e^{\gamma x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Из равенств (3)–(4) выводим еще одно представление для локального сплайна $S(x)$ на отрезке $\left[\left(l - \frac{1}{2}\right) h, \left(l + \frac{1}{2}\right) h \right]$:

$$S(x) = m \Big\{ y_{l-1} \Big[(\gamma - \delta) e^{(\gamma + \delta) h} e^{\beta(x - lh + \frac{h}{2})} +$$

$$+ (\delta - \beta) e^{(\delta + \beta) h} e^{\gamma(x - lh + \frac{h}{2})} + (\beta - \gamma) e^{(\beta + \gamma) h} e^{\delta(x - lh + \frac{h}{2})} \Big] +$$

$$+ y_l \Big[-(\gamma - \delta)(e^{\gamma h} + e^{\delta h}) e^{\beta(x - lh + \frac{h}{2})} -$$

$$-(\delta - \beta)(e^{\beta h} + e^{\delta h}) e^{\gamma(x - lh + \frac{h}{2})} - (\beta - \gamma)(e^{\beta h} + e^{\gamma h}) e^{\delta(x - lh + \frac{h}{2})} \Big] +$$

$$+ y_{l+1} \Big[(\gamma - \delta) e^{\beta(x - lh + \frac{h}{2})} + (\delta - \beta) e^{\gamma(x - lh + \frac{h}{2})} + (\beta - \gamma) e^{\delta(x - lh + \frac{h}{2})} \Big] \Big\}. \tag{7}$$

Лемма 1. *При* $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq \delta$, $\gamma \neq \delta$ *число* $\varepsilon \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть $C = (\gamma - \delta)h$, $B = (\beta - \delta)h$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = C(e^B - 1) e^{B(x - \frac{1}{2})} - B(e^C - 1) e^{C(x - \frac{1}{2})}.$$

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что

$$g\left(\frac{1}{2}\right) g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Имеем

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = BC \left(\frac{e^B - 1}{B} - \frac{e^C - 1}{C} \right),$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = BC\left(\frac{1-e^{-B}}{B} - \frac{1-e^{-C}}{C}\right).$$

Поскольку $B \neq C$, то утверждение леммы 1 следует из выписанных формул и того факта, что функция $\frac{e^t-1}{t}$ монотонно возрастает, а функция $\frac{1-e^{-t}}{t}$ монотонно убывает на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция* $B(x) > 0$ *при* $x \in \left(-\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right)$.

Доказательство. Напомним, что в силу свойств B-L-сплайна имеют место равенства

$$B\left(-\frac{3h}{2}\right) = B'\left(-\frac{3h}{2}\right) = B\left(\frac{3h}{2}\right) = B'\left(\frac{3h}{2}\right) = 0.$$

Кроме того, из (6) легко следует, что

$$\operatorname{sign} m = \operatorname{sign}(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\delta-\beta). \tag{8}$$

Рассмотрим первую строку в правой части равенства (3). Пусть $t > 0,\ C = (\gamma-\delta)t,\ B = (\beta-\delta)t$ и

$$B_1(t) = \frac{me^{\delta t}}{t}(Ce^B - Be^C + B - C) =$$

$$= \frac{me^{\delta t}}{t}BC(B-C)\left[\frac{e^B}{B(B-C)} + \frac{e^C}{C(C-B)} + \frac{1}{BC}\right]. \tag{9}$$

Поскольку

$$\operatorname{sign} BC(B-C) = \operatorname{sign}(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\beta-\gamma) = \operatorname{sign} m,$$

то из выписанных формул заключаем, что для доказательства неравенства $B(x) > 0$ при $x \in \left(-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right]$ достаточно показать, что выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (9), является положительным. Этот факт, в свою очередь, следует из того, что функция

$$\Psi(x) = \frac{e^{Bx}}{B(B-C)} + \frac{e^{Cx}}{C(C-B)} + \frac{1}{BC}$$

удовлетворяет условиям: $\Psi(0) = 0,\ \Psi'(x) = \frac{e^{Bx}-e^{Cx}}{B-C} > 0$ при $x > 0$, и следовательно, $\Psi(1) > 0$.

Рассмотрим теперь отрезок $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. Во второй строке в правой части равенства (3) сделаем замену $t = x + \frac{h}{2} \geq 0$, и пусть $\widetilde{B} = \beta - \delta$, $\widetilde{C} = \gamma - \delta$. Тогда при указанных x и t имеет место равенство

$$B(x) = me^{\delta(t+h)}\widetilde{B}\widetilde{C}(\widetilde{B} - \widetilde{C})\times$$

$$\times\left[\frac{e^{\widetilde{C}t}(e^{\widetilde{B}h}+1)}{\widetilde{C}(\widetilde{B}-\widetilde{C})} + \frac{e^{\widetilde{B}t}(e^{\widetilde{C}h}+1)}{\widetilde{B}(\widetilde{C}-\widetilde{B})} - \frac{e^{\widetilde{B}h}+e^{\widetilde{C}h}}{\widetilde{B}\widetilde{C}}\right]. \tag{10}$$

Поскольку $\operatorname{sign} m = \operatorname{sign}(\widetilde{B}\widetilde{C}(\widetilde{B}-\widetilde{C}))$, то для доказательства неравенства $B(x) > 0$ при $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ требуется установить, что выражение в квадратных скобках в (10) является положительным при $t \in [0, h]$. Обозначим это выражение через $\nu(t)$. Имеем

$$\nu'(0) = \frac{e^{\widetilde{B}h} - e^{\widetilde{C}h}}{\widetilde{B} - \widetilde{C}} > 0, \quad \nu'(h) = \frac{e^{\widetilde{C}h} - e^{\widetilde{B}h}}{\widetilde{B} - \widetilde{C}} < 0,$$

$$\nu(0) = \frac{e^{-\delta(t+h)}}{m\widetilde{B}\widetilde{C}(\widetilde{B}-\widetilde{C})}B\left(-\frac{h}{2}\right) > 0,$$

$$\nu(h) = e^{(\widetilde{B}+\widetilde{C})h}\left[\frac{1}{\widetilde{B}\widetilde{C}} + \frac{e^{-\widetilde{B}h}}{\widetilde{B}(\widetilde{B}-\widetilde{C})} + \frac{e^{-\widetilde{C}h}}{\widetilde{C}(\widetilde{C}-\widetilde{B})}\right] > 0.$$

Последнее неравенство выводится из определения и свойств функции $\Psi(x)$, если сделать замену $B = -\widetilde{B}$, $C = -\widetilde{C}$, $x = h$. Производная функции $\nu(t)$ имеет ровно один нуль на интервале $(0, h)$, поэтому из выписанных неравенств получаем, что $\nu(t){>}0$ при $t \in [0, h]$ и следовательно, $B(x) > 0$ при $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

Доказательство неравенства $B(x) > 0$ при $x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right)$ аналогично доказательству, проведенному при $x \in \left(-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right]$. Лемма 2 доказана.

Поясним, как изменится построение локального сплайна $S(x)$, если характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ имеет комплексные корни. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\delta \in \mathbb{R}$ и $\beta = \theta + i\alpha$, $\gamma = \theta - i\alpha$ $(\theta, \alpha \in \mathbb{R})$, причем $\alpha > 0$. Все ранее выписанные представления для параметров ε и m и функций $B(x)$, $S(x)$

здесь также имеют место, но только везде следует считать выполненным неравенство $0 < h < \frac{\pi}{\alpha}$. Не вдаваясь в исследование остальных свойств, докажем в этом случае только аналог леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $\delta \in \mathbb{R}$, $\beta = \theta + i\alpha$, $\gamma = \theta - i\alpha$, $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $0 < h < \frac{\pi}{\alpha}$. *Тогда уравнение относительно* ε

$$e^{(\varepsilon-\frac{1}{2})(\beta-\gamma)h} = \frac{e^{\gamma h} - e^{\delta h}}{e^{\delta h} - e^{\beta h}} \cdot \frac{\delta - \beta}{\gamma - \delta}$$

имеет единственный действительный корень, и этот корень удовлетворяет неравенству $-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Сделаем замены: $\theta - \delta = \tau$, $\frac{1}{2} - \varepsilon = u$, $(\tau + i\alpha)h = z$, $(\tau - i\alpha)h = \bar{z}$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{e^z - 1}{e^{\bar{z}} - 1} \cdot \frac{\bar{z}}{z} = e^{2i\alpha h u}. \tag{11}$$

Поскольку модуль левой части этого уравнения равен 1, то уравнение (11) относительно переменной u имеет единственный действительный корень $u = u_0$. Для доказательства леммы требуется установить, что $0 < u_0 < 1$. Перепишем (11) в следующем виде

$$\frac{e^z - 1}{ze^{zu}} = \frac{e^{\bar{z}} - 1}{\bar{z}e^{\bar{z}u}}.$$

Замечаем, что правая часть последнего равенства равна $\overline{\left(\frac{e^z-1}{ze^{zu}}\right)}$. Поэтому, если $u = u_0$ — корень уравнения, то число $\frac{e^z-1}{ze^{zu}} \in \mathbb{R}$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ непрерывную кривую $g(z,u) = \frac{e^z-1}{ze^{zu}}$ при изменении параметра u от 0 до 1. Имеем

$$F(z) = g(z,0) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \Phi(z) = F(-z) = g(z,1) = \frac{e^z - 1}{ze^z}.$$

Ясно, что для доказательства леммы 3 достаточно показать, что мнимые части чисел $F(z)$ и $\Phi(z)$ имеют разные знаки. После элементарных преобразований получаем, что

$$T(\tau,\alpha) = \operatorname{Im} F(z) = \frac{e^{\tau h}}{h^2(\tau^2 + \alpha^2)}(\tau h \sin\alpha h - \alpha h \cos\alpha h + \alpha h e^{-\tau h}),$$

$$C(\tau,\alpha)=\operatorname{Im}\Phi(z)=\frac{e^{-\tau h}}{h^2(\tau^2+\alpha^2)}(\tau h\sin\alpha h+\alpha h\cos\alpha h-\alpha h e^{\tau h}). \quad (12)$$

Докажем, что при $0<h<\frac{\pi}{\alpha}$ $T(\tau,\alpha)>0$, $C(\tau,\alpha)<0$. Для этого воспользуемся тремя известными неравенствами:

$$e^x\geq 1+x \quad (x\in\mathbb{R}), \quad \sin x\leq x \quad (x\geq 0),$$

$$\sin x\geq x\cos x \quad (0\leq x\leq\pi).$$

При $0<h<\frac{\pi}{\alpha}$ имеем

$$\tau h\sin\alpha h-\alpha h\cos\alpha h+\alpha h e^{-\tau h}\geq \tau h\sin\alpha h-\sin\alpha h+\alpha h e^{-\tau h}\geq$$

$$\geq(\tau h-1+e^{-\tau h})\sin\alpha h\geq 0, \quad (13)$$

причем знак равенства в последнем неравенстве достигается только при $\tau=0$. Но при $\tau=0$ неравенства $\operatorname{Im}F(z)>0, \operatorname{Im}\Phi(z)<0$ очевидны. Из (12) и (13) получаем, что $\operatorname{Im}F(z)=T(\tau,\alpha)>0$. Неравенство $\operatorname{Im}\Phi(z)=C(\tau,\alpha)<0$ следует из того, что $C(\tau,\alpha)=-T(-\tau,\alpha)$ и предыдущего доказательства. Лемма 3 доказана.

Снова вернемся к случаю действительных корней β,γ и δ характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_3$. Напомним, что для простоты изложения мы считаем, что все эти числа попарно различны и не равны нулю.

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$S(e^{\beta x},x)=e^{\beta x}, \quad S(e^{\gamma x},x)=e^{\gamma x}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Поскольку числа β и γ входят в представление сплайна $S(x)$ симметрично, то достаточно проверить только одно равенство леммы 4. Из равенства (7) имеем

$$S(e^{\beta x},x)=m\Big\{e^{\beta(l-1+\varepsilon)h}\Big[(\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}+$$

$$+(\delta-\beta)e^{(\beta+\delta)h}e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}+(\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]+$$

$$+e^{\beta(l+\varepsilon)h}\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}-$$

$$-(\delta-\beta)(e^{\beta h}+e^{\delta h})e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}-(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]+$$

$$+e^{\beta(l+1+\varepsilon)h}\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}+(\delta-\beta)e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}+$$

$$+(\beta-\gamma)e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]\Big\}=me^{\beta(l+\varepsilon)h}\Big\{e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}(\delta-\beta)\times$$

$$\times\Big[e^{\delta h}-(e^{\beta h}+e^{\delta h})+e^{\beta h}\Big]+e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}(\beta-\gamma)\times$$

$$\times\Big[e^{\gamma h}-(e^{\beta h}+e^{\gamma h})+e^{\beta h}\Big]+e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}(\gamma-\delta)\times$$

$$\times\Big[e^{(\gamma+\delta-\beta)h}-(e^{\gamma h}+e^{\delta h})+e^{\beta h}\Big]\Big\}=Me^{\beta x},$$

где

$$M=me^{\beta(\varepsilon-\frac{1}{2})h}(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}-e^{\beta h})(e^{\delta h}-e^{\beta h}).$$

Равенство $M=1$ вытекает из (5) и (6). Лемма 4 доказана.

2. Формосохраняющие свойства локальных L-сплайнов.

Теорема 1. *Пусть* $y_{l-1},y_l,y_{l+1}\geq 0$ (≤ 0). *Тогда* $S(x)\geq 0$ (≤ 0) *при* $x\in\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$.

Доказательство следует из равенства (4) и леммы 2.

Теорема 2. *Локальный сплайн* $S(x)=S(f,x)$ *сохраняет свойство исходных данных* $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *близкое к локальной монотонности, а именно:*

а) *если* $y_{l+1}-e^{\delta h}y_l\geq 0,\ y_l-e^{\delta h}y_{l-1}\geq 0$, *то функция* $(D-\delta)S(x)\geq 0$ *на отрезке* $\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$ $(l\in\mathbb{Z})$,

б) *если* $y_{l+1}-e^{\delta h}y_l\leq 0,\ y_l-e^{\delta h}y_{l-1}\leq 0$, *то функция* $(D-\delta)S(x)\leq 0$ *на отрезке* $\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$ $(l\in\mathbb{Z})$.

Доказательство. Из равенства (7) получаем, что

$$(D-\delta)S(x)=m\Big\{y_{l-1}\Big[(\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}(\beta-\delta)e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}+$$

$$+(\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}(\gamma-\delta)e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]+$$

$$+y_l\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})(\beta-\delta)e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}-$$

$$-(\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})(\gamma-\delta)e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]+$$

$$+y_{l+1}\Big[(\gamma-\delta)(\beta-\delta)e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}+(\delta-\beta)(\gamma-\delta)e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}\Big]\Big\}=$$

$$=m\Big\{e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}(\gamma-\delta)(\beta-\delta)\Big[y_{l+1}-(e^{\gamma h}+e^{\delta h})y_l+e^{(\gamma+\delta)h}y_{l-1}\Big]-$$

$$-e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}(\gamma-\delta)(\beta-\delta)\Big[y_{l+1}-(e^{\beta h}+e^{\delta h})y_l+e^{(\delta+\beta)h}y_{l-1}\Big]\Big\}=$$

$$=m(\gamma-\delta)(\beta-\delta)(\beta-\gamma)\Big[(y_{l+1}-e^{\delta h}y_l)\alpha_1(x)-(y_l-e^{\delta h}y_{l-1})\alpha_2(x)\Big],$$

где

$$\alpha_1(x)=\frac{e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}-e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}}{\beta-\gamma},$$

$$\alpha_2(x)=\frac{e^{\gamma h+\beta(x-lh+\frac{h}{2})}-e^{\beta h+\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}}{\beta-\gamma}.$$

Неравенство $\alpha_1(x)\ge 0$ при $x\in\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$ очевидно. Второе неравенство $\alpha_1(x)\le 0$ при $x\in\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$ также легко доказывается из соображений монотонности. Отсюда, используя (8), выводим утверждение теоремы 2.

Пусть $\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2(D)=(D-\beta)(D-\gamma)$. Для дифференциального оператора $\mathcal{L}_2$ рассмотрим соответствующий разностный оператор (см., например, [9])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j=y_{j+2}-(e^{\beta h}+e^{\gamma h})y_{j+1}+e^{(\beta+\gamma)h}y_j, \tag{14}$$

определенный на пространстве числовых последовательностей $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Ясно, что если $f(x)=e^{\beta x}$ или $f(x)=e^{\gamma x}$ (функции из ядра оператора $\mathcal{L}_2$), то $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}f((l+\varepsilon)h)=0$ для любых $l\in\mathbb{Z}$ и любого числа $\varepsilon\in\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Локальный сплайн $S(x)=S(f,x)$ сохраняет свойство исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, близкое к локальной выпуклости, а именно:*

если $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}\ge 0$ (≤ 0), то $\mathcal{L}_2(D)S(x)\ge 0$ (≤ 0) при $x\in\left(\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right)$ $(l\in\mathbb{Z})$.

Доказательство. Из равенства (7) получаем

$$\mathcal{L}_2(D)S(x)=(D-\beta)(D-\gamma)S(x)=$$

$$= m(\beta-\gamma)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1}$$

$$\Big(x \in \Big(\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h, \Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big)\Big) \quad (l \in \mathbb{Z}). \qquad (15)$$

Отсюда, используя (8), выводим утверждение теоремы 3.

3. Сглаживающее свойство локальных L-сплайнов. Пусть AC — класс локально абсолютно непрерывных функций, $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций f, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$, с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Введем класс функций, определенных на всей числовой оси $\mathbb{R}$, соответствующий оператору $\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$

$$W_\infty = \Big\{f:\ f' \in AC,\ \|e^{-\delta x}(D-\beta)(D-\gamma)f(x)\|_\infty \le 1\Big\}.$$

При $\delta = 0$ — это обычный соболевский класс $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в случае $\mathcal{L}_2 = (D-\beta)(D-\gamma)$.

Теорема 4. *Для локальных L-сплайнов $S(x) = S(f,x)$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_\infty} \|e^{-\delta x}(D-\beta)(D-\gamma)S(x)\|_\infty =$$

$$= me^{\delta(\varepsilon-\frac{1}{2})h}(\beta-\gamma)(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\beta h}).$$

Доказательство. Любое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}_2(D)f = (D-\beta)(D-\gamma)f = u$$

(u — локально интегрируемая функция) может быть записано в виде

$$f(x) = C_1e^{\beta x} + C_2e^{\gamma x} + \int_0^x K(x-t)u(t)\,dt, \qquad (16)$$

где $K(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\gamma t}}{\beta - \gamma}$, C_1 и C_2 — произвольные константы. Вначале получим интегральное представление для разности $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1}$. Поскольку $y_l = f((l+\varepsilon)h)$ $(l \in \mathbb{Z})$, то из (14) и (16) получаем

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1} = y_{l+1} - (e^{\beta h} + e^{\gamma h}) y_l + e^{(\beta+\gamma)h} y_{l-1} =$$

$$= \frac{1}{\beta - \gamma} \Bigg\{ \int\limits_0^{(\varepsilon+l+1)h} \Big(e^{\beta((\varepsilon+l+1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l+1)h-t)} \Big) u(t)\, dt -$$

$$-(e^{\beta h} + e^{\gamma h}) \int\limits_0^{(\varepsilon+l)h} \Big(e^{\beta((\varepsilon+l)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l)h-t)} \Big) u(t)\, dt +$$

$$+ e^{(\beta+\gamma)h} \int\limits_0^{(\varepsilon+l-1)h} \Big(e^{\beta((\varepsilon+l-1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l-1)h-t)} \Big) u(t)\, dt \Bigg\},$$

так как неинтегральные слагаемые при подстановке значений y_{l-1}, y_l и y_{l+1} в (14) взаимно уничтожаются. Ранее уже отмечалось, что разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}$ выбрана таким образом, что для любой функции $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ при любых $l \in \mathbb{Z}$ и любом $\varepsilon \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f((l+\varepsilon)h) = 0.$$

С учетом этого обстоятельства, разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1}$ может быть записана в виде

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1} = \frac{1}{\beta - \gamma} \Bigg\{ \int\limits_{(\varepsilon+l-1)h}^{(\varepsilon+l+1)h} \Big(e^{\beta((\varepsilon+l+1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l+1)h-t)} \Big) u(t)\, dt -$$

$$-(e^{\beta h} + e^{\gamma h}) \int\limits_{(\varepsilon+l-1)h}^{(\varepsilon+l)h} \Big(e^{\beta((\varepsilon+l)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l)h-t)} \Big) u(t)\, dt \Bigg\} =$$

$$= \int\limits_{(\varepsilon+l)h}^{(\varepsilon+l+1)h} \left[\frac{e^{\beta((\varepsilon+l+1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon+l+1)h-t)}}{\beta - \gamma} \right] u(t)\, dt +$$

$$+\int\limits_{(\varepsilon+l-1)h}^{(\varepsilon+l)h}\left[\frac{e^{\beta h+\gamma((\varepsilon+l)h-t)}-e^{\gamma h+\beta((\varepsilon+l)h-t)}}{\beta-\gamma}\right]u(t)\,dt,$$

где $u(t)=\mathcal{L}_2(D)f(t)=(D-\beta)(D-\gamma)f(t)$. Оценим сверху величину $|\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}|$, принимая во внимание, что $f\in W_\infty$ и то, что выражения в квадратных скобках в последнем равенстве неотрицательны. Имеем

$$|\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}|\le\frac{1}{\beta-\gamma}\left\{\int\limits_{(\varepsilon+l)h}^{(\varepsilon+l+1)h}\Big(e^{\beta((\varepsilon+l+1)h-t)}-e^{\gamma((\varepsilon+l+1)h-t)}\Big)e^{\delta t}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(\varepsilon+l-1)h}^{(\varepsilon+l)h}\Big(e^{\beta h+\gamma((\varepsilon+l)h-t)}-e^{\gamma h+\beta((\varepsilon+l)h-t)}\Big)e^{\delta t}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{e^{\delta(\varepsilon+l-1)h}(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\beta h})}{(\delta-\beta)(\delta-\gamma)},\quad l\in\mathbb{Z}. \tag{17}$$

Полученная оценка сверху для величин $|\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}|$ является точной, так как знак равенства достигается для любой функции f такой, что $\mathcal{L}_2(D)f(t)=e^{\delta t},\ t\in[(\varepsilon+l-1)h,(\varepsilon+l+1)h]$. Из (15) и (17) выводим точное неравенство

$$|(D-\beta)(D-\gamma)S(x)|\le m(\beta-\gamma)(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\beta h})\times$$

$$\times e^{\delta(x+(\varepsilon-\frac{1}{2})h)},\quad x\in\left(\left(l-\frac{1}{2}\right)h,\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right),\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от l, то

$$\sup_{f\in W_\infty}\|e^{-\delta x}(D-\beta)(D-\gamma)S(x)\|_\infty=$$

$$=me^{\delta(\varepsilon-\frac{1}{2})h}(\beta-\gamma)(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\beta h}).$$

Теорема 4 доказана.

4. Константы Лебега локальных L-сплайнов. Локальный L-сплайн $S(x)=S(f,x)$, определенный формулой (4), задает линейный положительный метод аппроксимации (отметим, что он не является интерполяционным), ставящий в соответствие любой непрерывной на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функции f непрерывный L-сплайн. Величина

$$\sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})}\le 1} \|S(f,x)\|_{C(\mathbb{R})}$$

называется константой Лебега (нормой оператора из C в C) метода S.

Теорема 5. *Имеет место равенство*

$$\sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})}\le 1} \|S(f,x)\|_{C(\mathbb{R})} = \max_{t\in[0,h]} \Big\{ m\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta t}(e^{\gamma h}-1)(e^{\delta h}-1)+$$

$$+(\delta-\beta)e^{\gamma t}(e^{\beta h}-1)(e^{\delta h}-1)+(\beta-\gamma)e^{\delta t}(e^{\beta h}-1)(e^{\gamma h}-1)\Big]\Big\}.$$

Доказательство. Из (3), (4) с учетом леммы 2 для любой непрерывной функции f, удовлетворяющей неравенству $\|f\|_{C(\mathbb{R})}\le 1$ при $x\in\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)h, \left(l+\frac{1}{2}\right)h\right]$, выводим точное неравенство

$$|S(f,x)| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} B(x-jh) = B(x-(l-1)h)+B(x-lh)+$$

$$+B(x-(l+1)h) = m\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}(e^{\gamma h}-1)(e^{\delta h}-1)+$$

$$+(\delta-\beta)e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}(e^{\beta h}-1)(e^{\delta h}-1)+$$

$$+(\beta-\gamma)e^{\delta(x-lh+\frac{h}{2})}(e^{\beta h}-1)(e^{\gamma h}-1)\Big],$$

в котором знак равенства реализует функция $f(t)=1$. Отсюда следует утверждение теоремы 5.

5. Локальные сплайны на отрезке. В начале статьи были приведены формулы для локальных формосохраняющих L-сплайнов на всей числовой оси, определенных для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_3(D)=(D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ при условии точности данной схемы для двух функций $e^{\beta x}$ и $e^{\gamma x}$. Если же исходная функция f, по значениям в точках которой строится L-сплайн $S(f,x)$, задана только на отрезке, предлагаемые формулы требуют уточнения вблизи концов этого отрезка, поскольку мы не хотим привлекать информацию о функции f вне отрезка.

Пусть, как и раньше, числа $\varepsilon \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и m определены формулами (5) и (6). Будем строить сплайн $S(f,x)$ на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$, считая известными значения y_k функции f в точках $(\varepsilon + k)h$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Ясно, что, построив сплайн S на таком отрезке, можно с помощью сдвига и сжатия (или растяжения) получить формулы для L-сплайна и на любом отрезке. Разобьем указанный отрезок на части:

$$\left[\varepsilon h, \frac{h}{2}\right], \ \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right], \dots,$$

$$, \dots, \left[\left(n - \frac{3}{2}\right) h, \left(n - \frac{1}{2}\right) h\right], \ \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) h, \varepsilon h + nh\right].$$

При $x \in \left[\left(l - \frac{1}{2}\right) h, \left(l + \frac{1}{2}\right) h\right]$ $(l = 1, 2, \dots, n-1)$ сплайн S строим по формуле (4). Пусть также

$$S(x) = \frac{y_1 - e^{\gamma h} y_0}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} e^{\beta(x - \varepsilon h)} + \frac{y_1 - e^{\beta h} y_0}{e^{\gamma h} - e^{\beta h}} e^{\gamma(x - \varepsilon h)}, \quad x \in \left[\varepsilon h, \frac{h}{2}\right],$$

$$S(x) = e^{\beta h} \frac{y_n - e^{\gamma h} y_{n-1}}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} e^{\beta(x - \varepsilon h - nh)} +$$

$$+ e^{\gamma h} \frac{y_n - e^{\beta h} y_{n-1}}{e^{\gamma h} - e^{\beta h}} e^{\gamma(x - \varepsilon h - nh)}, \quad x \in \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) h, \varepsilon h + nh\right]. \tag{18}$$

Отметим ряд свойств построенного на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ сплайна $S(x)$. Во-первых, из (18) ясно, что

$$S(\varepsilon h) = y_0 = f(\varepsilon h), \quad S(\varepsilon h + nh) = y_n = f(\varepsilon h + nh),$$

т.е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию f в концах отрезка. Во-вторых, на крайних отрезках разбиения $\left[\varepsilon h, \frac{h}{2}\right]$, $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)h, \varepsilon h + nh\right]$ сплайн является линейной комбинацией не трех функций $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$ и $e^{\delta x}$, как это было на любом отрезке вида $\left[\left(l - \frac{1}{2}\right)h, \left(l + \frac{1}{2}\right)h\right]$ $(l = 1, 2, \dots, n-1)$, а только двух: $e^{\beta x}$ и $e^{\gamma x}$. Данное замечание позволяет сделать вывод, что для сплайна S на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$

выполнены аналоги краевых условий второго рода (см., например, [8]). В-третьих, используя (7) и (18), легко проверяется, что

$$S\left(\frac{h}{2}-0\right)=S\left(\frac{h}{2}+0\right),\quad S'\left(\frac{h}{2}-0\right)=S'\left(\frac{h}{2}+0\right),$$

$$S\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h-0\right)=S\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h+0\right),$$

$$S'\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h-0\right)=S'\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h+0\right),$$

и поэтому $S\in C^1[\varepsilon h,\varepsilon h+nh]$.

6. Замечания. Наследование свойств обобщенной монотонности и обобщенной выпуклости (см. теоремы 2 и 3) имеет место и в том случае, когда характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_3(D)=(D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ имеет комплексные корни. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\delta\in\mathbb{R}$ и $\beta=\theta+i\alpha$, $\gamma=\theta-i\alpha$ $(\theta\in\mathbb{R},\ \alpha>0)$. При этом следует требовать выполнение неравенства $0<h<\frac{\pi}{\alpha}$ (см. лемму 3). В отмеченном случае мы не приводим полные доказательства, поскольку их идейная сторона вполне аналогична случаю действительных корней характеристического многочлена (случай $\delta=\theta=0$ см. в [3]).

Возвращаясь к оператору $\mathcal{L}_3(D)=(D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ $(\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R})$, выделим работу [4] второго автора, посвященную случаю $\delta=0$. В этой статье, развивающей результаты [1–3], помимо доказательства формосохраняющих свойств соответствующих локальных L-сплайнов с равномерными узлами, вычислена точно величина аппроксимации в равномерной метрике класса $W_\infty^{\mathcal{L}_2}=\{f:\ f'\in AC:\|(D-\beta)(D-\gamma)f\|_\infty\le 1\}$ такими L-сплайнами. Отмеченный результат интересен тем, что при $\delta=0$ и $\beta=-\gamma$ (это означает, что оператор $\mathcal{L}_3$ является формально самосопряженным) указанная величина в периодическом случае совпадает с колмогоровским поперечником класса $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике. То есть построенное подпространство локальных L-сплайнов является экстремальным подпространством (наряду с тригонометрическими полиномами и интерполяционными L-сплайнами) в смысле поперечника по Колмогорову. Первым этот факт в случае $\beta=\gamma=\delta=0$ (т.е. для локальных параболических сплайнов для класса W^2_∞) заметил Ю.Н.Субботин [1]. Собственно, именно этот результат и породил интерес авторов к рассматриваемым задачам. В общем случае (т.е. при произвольных числах β, γ и δ) исследования аппроксимативных свойств построенных локальных L-сплайнов будет продолжено нами в следующей работе.

На основе B-L-сплайнов с равномерными узлами в периодическом случае по формуле

$$SR(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{w_j B(x - jh)}{\sum\limits_{k=0}^{n} w_k B(x - kh)}$$

$$\left(h = \frac{1}{2n},\ w_j > 0,\ f((j + \varepsilon)h) = y_j\right)$$

для произвольной 1-периодической функции могут быть построены локальные рациональные L-сплайны с равномерными узлами $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, являющиеся обобщениями классических параболических NURBSов (определения и свойства см., например, в [6]).

Отметим также работы [7], [10–12], содержащие точные результаты по аппроксимации локальными L-сплайнами с произвольным (не обязательно равномерным) расположением узлов.

1. *Субботин Ю. Н.* Исследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМ и МФ. — 1993. — **33**, № 7. — С. 996–1003.
2. *Kostousov K. V., Shevaldin V. T.* Approximation by Local Exponential Splines // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2004. — Suppl.10. — P. 147–157.
3. *Костоусов К. В., Шевалдин В. Т.* Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. — 2005. — **77**, № 3. — С. 354–363.
4. *Шевалдин В. Т.* Аппроксимация локальными L-сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — **12**, № 2. — С. 195–213.
5. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. — М.: Физматлит, 2006.
6. *Piegl L., Tiller W.* The NURBS book. — Berlin, Heidelberg. New York. Barselona. Hong Kong. London. Milan. Paris. Tokyo: Springer, 1997.

7. *Subbotin Yu. N.* Approximations by Polynomial and Trigonometric Splines of Third Order Preserving Some Properties of Approximated Functions // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of Russian Academy of Sciences. — 2007. — **13**, № 2. — P. 231–242.

8. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.

9. *Шарма А., Цимбаларио И.* Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. — 1977. — **21**, № 2. — С. 161–173.

10. *Шевалдин В. Т.* Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. мат. — 2005. — **34**, № 1. — С. 77–88.

11. *Шевалдина Е. В.* Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. мат. — 2006. — **9**, № 4. — С. 391–402.

12. *Шевалдин В. Т.* Трехточечная схема аппроксимации локальными сплайнами // Тр. Междун. летней мат. Школы С.Б.Стечкина по теории функций. — Тула: Из-во ТулГУ, 2007. — С.151–156.