Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 113-123

УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Міжнарод. матем. центр НАН України, Київ)

КОНТРПРИКЛАД В КОМОНОТОННОМУ НАБЛИЖЕННІ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Побудовано неперервну періодичну кусково-монотонну функцію, для якої при наближенні її кусково-монотонними поліномами не справджується оцінка типу Джексона з модулем гладкості порядку ≥ 3.

1. Вступ. Нехай C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, і $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – простір тригонометричних поліномів порядку $\leq n$. Позначимо

$$E_n(f) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n} \|f - t_n\| .$$

Добре відомо [1], що при кожному $k \in \mathbb{N}$ для будь-якої $f \in C$ справджується нерівність

$$E_n(f) \leq c(k)\, \omega_k(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $c(k)$ – стала, яка залежить лише від k, і $\omega_k(f, \cdot)$ – модуль гладкості порядку k функції f.

Зафіксуємо набір $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ точок y_i таких, що

$$-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi, \quad s \in \mathbb{N},$$

і для решти $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ ($y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...$). Виділимо в C множину $\Delta^{(1)}(Y)$ всіх функцій, що не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д. Позначимо

$$E_n^{(1)}(f) := E_n^{(1)}(f, Y) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y)} \|f - t_n\| .$$

З [2] і [3] відомо, що якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$E_n^{(1)}(f) \leq c(s)\, \omega_1(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

і

$$E_n^{(1)}(f) \leq c(s)\, \omega_2(f, 1/n), \quad n \geq N(Y), \tag{3}$$

$$E_n^{(1)}(f) \le C(Y)\, \omega_2\,(f, 1/n)\,, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

відповідно, де $c(s)$ – стала, яка залежить лише від s, а $N(Y)$ і $C(Y)$ – сталі, які залежать тільки від Y, тобто від $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$.

В [4, с. 64-83], при кожному $n \in \mathbb{N}$ побудовано функцію $g_n(x) = g_n(x, s, Y, k) \in \Delta^{(1)}(Y)$ таку, що

$$E_n^{(1)}(g_n) \ge C(Y, k)\, n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k\,(g_n, 1/n)\,, \tag{5}$$

де $C(Y, k)$ – стала, яка залежить лише від Y і k. Іншими словами, при кожному $n \in \mathbb{N}$ можно підібрати функцію з $\Delta^{(1)}(Y)$ для якої (2)–(4) з ω_k, $k \ge 3$, хибні.

В цьому повідомлені ми будуємо одну таку функцію (для всіх $n \in \mathbb{N}$), а саме: доводимо, що має місце така теорема.

Теорема 1. *Для кожного натурального $k \ge 3$ в множині $\Delta^{(1)}(Y)$ існує функція $g(x) := g(x, s, Y, k)$ така, що*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(g)}{\omega_k\,(g, 1/n)} = \infty. \tag{6}$$

Доведення. 1°. В пункті 1° ми, в зручному для нас вигляді, наведемо деякі факти з [4, с. 64-83]. Зважаючи на періодичність, без втрати загальності будемо вважати, що точка 0 належить набору $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, тобто $y_{i_*} = 0$ при деякому $i_* \in \mathbb{Z}$. Позначимо

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2}, \quad \big(\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)\big),$$

$$\Pi_*(x) := \prod_{i=1, i\ne i_*}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2}.$$

(Відмітимо, що якщо періодична f диференційовна, то $f \in \Delta^{(1)}(Y) \iff f'(x)\Pi(x) \ge 0,\ x \in \mathbb{R}$.) Нехай для визначеності i_*– непарне число (тоді $\Pi_*(0) > 0$). Позначимо $2d := \min\{|y_{i_*} - y_{i_*-1}|, |y_{i_*} - y_{i_*+1}|\}$, відмітимо $d \le \pi/2$ і $\Pi_*(x) > 0,\ x \in (-2d, 2d)$. Покладемо

$$M := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad m := \min_{x\in[-d,d]} \Pi_*(x), \quad M_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|.$$

Оберемо (в залежності від Y) натуральне число N – найменше з чисел, що задовольняють нерівність

$$m \sin\frac{d}{8} \geq \frac{5}{N}(M+M_1). \tag{7}$$

В цьому випадку щонайменьше $d > 60/N$. Для побудови g буде використано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4 .$$

Нагадаємо (див., наприклад, [5, с. 127]) деякі його властивості: а) $J_N(t)$ є парним невід'ємним поліномом з $\mathbb{T}_{2N-2}$;
б)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_N(t)dt = 1; \tag{8}$$

в) для будь-якої неперервно диференційовної періодичної f в кожній точці x має місце нерівність

$$\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(x))J_N(t-x)dt\Big| \leq \frac{5}{N}\|f'\|. \tag{9}$$

Оберемо натуральне число ν з умови

$$\frac{1}{2}d < d^* := \frac{\pi}{N} + \nu\frac{2\pi}{N} \leq d < \frac{\pi}{N} + (\nu+1)\frac{2\pi}{N}.$$

Позначимо

$$\widetilde{M}{:=}\frac{1}{\pi}\|J_N\|,$$

$$\widetilde{m}{:=}\frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t-d^*) = \frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t+d^*),$$

і відмітимо, що $\widetilde{m} > 0$. Покладемо

$$\overline{M} := 4 + 2\pi^2\frac{M\widetilde{M}}{m\widetilde{m}}.$$

Скрізь надалі припускаємо, що число b задовольняє нерівність

$$0 < b < \frac{\pi}{4N\overline{M}}$$

(щоб для зручності $J_N(x) > 0,\ x \in [-2\overline{M}b, 2\overline{M}b]$). Для кожного (такого) b позначимо

$$Q_r(x,b) := Q_r(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{x} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)J_n(t-d^*)dt,$$

$$Q_l(x,b) := Q_l(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{x} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)J_n(t+d^*)dt,$$

і відмітимо, що

$$Q_r(2\pi-b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{2\pi-b} \sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*)J_n(t-d^*)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{2\pi-b}\left(\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t) - \sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*)\right)J_n(t-d^*)dt.$$

Крім того, $d/8 < (d^*-b)/2$, оскільки $30/N < d/2 < d^*$. Тому в силу (8), (9) і (7)

$$Q_r(2\pi-b) \ge \sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\left(\sin\frac{\cdot-b}{2}\Pi_*(\cdot)\right)'\right\| \ge$$

$$\ge m\sin\frac{d}{8} - \frac{5}{N}(M+M_1) \ge 0.$$

Аналогічно, $Q_l(2\pi-b) \le 0$. Тому можно визначити число $\alpha_b \in [0,1]$ з умови

$$\alpha_b Q_r(2\pi-b) + (1-\alpha_b)Q_l(2\pi-b) = 0. \qquad (10)$$

Покладемо

$$Q(x,b) := Q(x) := \alpha_b Q_r(x) + (1-\alpha_b)Q_l(x).$$

Рівність (10) свідчить про те, що $Q \in \mathbb{T}_{2N+s-2}$.

Зауважимо, що для будь-якого b існує число b_0 таке, що

$$b < b_0 < \overline{M}b \tag{11}$$

і

$$Q(b_0) = 0. \tag{12}$$

Дійсно, з одного боку, $Q(b) < 0$ і справджується нерівність

$$|Q(b)| \le M\widetilde{M}\left|\int\limits_{-b}^{b} \sin\frac{t-b}{2}dt\right| = 4M\widetilde{M}\sin^2\frac{b}{2} \le M\widetilde{M}b^2,$$

а з іншого боку, при $\overline{M}b < \frac{\pi}{2N}$,

$$Q(\overline{M}b) - Q(b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{b}^{\overline{M}b} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt \ge$$

$$\ge m\widetilde{m}\int\limits_{b}^{\overline{M}b} \sin\frac{t-b}{2}dt = 4m\widetilde{m}\sin^2\frac{(\overline{M}-1)b}{4} \ge \frac{m\widetilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-1)^2b^2,$$

і тому

$$Q(\overline{M}b) = Q(\overline{M}b) - Q(b) + Q(b) \ge \frac{m\widetilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-1)^2b^2 - M\widetilde{M}b^2 > 0.$$

2°. Оскільки $\omega_k(f,t) \le 2\omega_{k-1}(f,t),\ k \in \mathbb{N}$, то (6) достатньо довести лише для $k = 3$.

При кожному b через $K_{r,b}(x)$ і $K_{l,b}(x)$ позначимо дві 2π-періодичні функції такі, що

$$K_{r,b},\ K_{l,b} \in C^{(2)}; \quad 0 \le K_{r,b}(x) \le 1,\ 0 \le K_{l,b}(x) \le 1,\ x \in \mathbb{R};$$

$$K_{r,b}(x) := \begin{cases} 0,\ x \in \left[-\dfrac{\overline{M}b}{2}, b_0\right], \\ 1,\ x \in [-\pi, -\overline{M}b] \cup [b_0 + b, \pi]; \end{cases}$$

$$K_{l,b}(x) := \begin{cases} 0, \ x \in \left[-b, b_0 + \dfrac{\overline{M}b}{2}\right], \\ 1, \ x \in [-\pi, -2b] \cup [b_0 + \overline{M}b, \pi]; \end{cases}$$

і доведемо нерівність

$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,b}(t) \sin \frac{t-b}{2} \Pi_*(t) \times$$

$$\times \Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*) \Big) dt > 0.$$

Для цього, внаслідок (10)–(12), достатньо довести, що

$$\left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t-b}{2} \Pi_*(t) \Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*) \Big) dt \right| >$$

$$> \int_{b_0}^{b_0+b} \sin \frac{t-b}{2} \Pi_*(t) \Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*) \Big) dt.$$

Якщо $-\frac{\overline{M}b}{2} \le t \le -b$, то

$$|\Pi_*(t)| \ge m, \quad \frac{1}{\pi} J_N(t-d^*) \ge \widetilde{m}, \quad \frac{1}{\pi} J_N(t+d^*) \ge \widetilde{m},$$

тобто

$$\left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t-b}{2} \Pi_*(t) \Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*) \Big) dt \right| >$$

$$> \pi m \widetilde{m} \left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t-b}{2} dt \right| =$$

$$= 4\pi m \widetilde{m} \sin \frac{(\overline{M}-2)b}{8} \sin \frac{(\overline{M}+6)b}{8} > \frac{m \widetilde{m} (\overline{M}-2)^2 b^2}{4\pi}.$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{b_0}^{b_0+b} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt <$$

$$< bM\pi\widetilde{M}\sin\frac{b_0}{2} < \pi M\widetilde{M}\frac{\overline{M}}{2}b^2.$$

З вибору $\overline{M}$ випливає, що $m\widetilde{m}(\overline{M}-2)^2b^2/(4\pi) > \pi M\widetilde{M}\overline{M}b^2/2$. Аналогічно,

$$I_2 := \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{l,b}(t)\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt < 0.$$

Тому виберемо $\beta_b \in (0,1)$ із умови $\beta_b I_1 + (1-\beta_b)I_2 = 0$ і покладемо

$$K_b(x) := \beta_b K_{r,b}(x) + (1-\beta_b)K_{l,b}(x).$$

Отже, при кожному b $K_b(x)$ є 2π-періодична 2 рази неперервно диференційовна функція така, що

$$K_b(x) := \begin{cases} 0, \; x \in [-b, b_0]\,, \\ 1, \; x \in [-\pi, -\overline{M}b] \cup [b_0 + \overline{M}b, \pi]; \end{cases}$$

$$0 \le K_b(x) \le 1, \;\; x \in \mathbb{R};$$

$$\int\limits_{-b}^{2\pi-b} K_b(t)\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt = 0. \quad (13)$$

3°. Згідно з (10)–(13) функції

$$q_b := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{x} K_b(t)\sin\frac{t-b}{2}\,\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

$$Q_b := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{x} \sin\frac{t-b}{2}\,\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

є 2π-періодичні і такі, що

$$q_b(x) = 0, \quad x \in [-b, b_0], \tag{14}$$

$$q_b \in C^{(3)} \cap \Delta^{(1)}(Y), \tag{15}$$

$$\|q_b\| \le 1, \tag{16}$$

$$\|q_b - Q_b\| = \|q_b - Q_b\|_{[-\overline{M}b, b_0 + \overline{M}b]} \le M\widetilde{M}(b_0 + 2\overline{M}b)\times$$

$$\times \sin \frac{b_0 + \overline{M}b - b}{2} < (3M\widetilde{M}\overline{M}^2 + 1)b^2 =: c_1 b^2, \tag{17}$$

$$\omega_3(q_b, t) \le \omega_3(q_b - Q_b, t) + \omega_3(Q_b, t) \le$$

$$\le 8\|q_b - Q_b\| + t^3 \left\| Q_b^{(3)} \right\| \le 8c_1 b^2 + t^3 L, \tag{18}$$

де L =const не залежить від b.

Наведемо наслідок з теореми І.І.Привалова (див. [6, с. 96-98]): для довільного полінома $R_n \in \mathbb{T}_n$ і будь-якого додатного $h \le \pi$ справджується нерівність

$$h|R_n'(0)| \le An\|R_n\|_{[-h,h]},$$

де $A = \text{const} > 1$ ($A \approx 2\pi$). Візьмемо довільний поліном $\tau_n \in \Delta^{(1)}(Y)$ порядку $n > 2N+s-2$, покладемо $R_n(x) := \tau_n(x) - Q_b(x)$ і помітимо, що

$$R_n'(0) = \tau_n'(0) - Q_b'(0) = -Q_b'(0) \ge \frac{bm\widetilde{m}}{\pi M} =: c_2 b.$$

Тому

$$hc_2 b \le hR_n'(0) \le An\|R_n\|_{[-h,h]} \le An\big(\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]}+$$

$$+\|q_b - Q_b\|\big) \le An\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} + Anc_1 b^2,$$

звідки

$$\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} \ge \frac{c_2\, h}{A\, n} b - c_1 b^2. \tag{19}$$

4°. Позначимо

$$b_n := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}},$$

і виберемо N_0 таким, щоб $N_0 > 2N + s - 2$ і $b_{N_0} < \frac{\pi}{4N\overline{M}}$. Для всіх $n > N_0$ покладемо

$$g_n(x) := q_{b_n}(x),$$

і з (18) помітимо, що

$$\omega_3(g_n, t) \leq (8c_1 + L)t^3 =: c_3 t^3, \quad t \geq \frac{1}{n}. \tag{20}$$

Для даного Y означимо $g(x, s, Y, 3) =: g(x)$. Спочатку візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{10}$ і оберемо $n_0 \geq N_0$ настільки великим, щоб

$$2c_3 < n_0^{\varepsilon}, \tag{21}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_0} < 1. \tag{22}$$

Покладемо $\gamma_0 := 1$ і

$$\gamma_j := \frac{c_2 b_{n_{j-1}} b_{n_j}}{A 4 n_j} \gamma_{j-1} = \frac{b_{n_0}}{b_{n_j}} \prod_{\nu=1}^{j} \frac{c_2 b_{n_\nu}^2}{A 4 n_\nu}, \quad j \geq 0, \tag{23}$$

де зростаюча послідовність $\{n_\nu\}$ визначається за індукцією наступним чином. Припустимо, що числа $\{n_0, ..., n_{\sigma-1}\}$ вже визначені, тоді покладемо

$$G_{\sigma-1}(x) := \sum_{j=1}^{\sigma-1} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x), \quad (G_0(x) := 0),$$

і виберемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ настільки великим, щоб

$$\left\| G_{\sigma-1}^{(3)} \right\| \leq \gamma_{\sigma-1} n_\sigma^{\varepsilon} \tag{24}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_{\sigma-1}} \geq 2c_1 \frac{1}{n_\sigma^{\varepsilon}}. \tag{25}$$

Позначимо

$$\overline{G}_\sigma(x) := \sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x),$$

і зауважимо, що рівномірна збіжність цього ряду забезпечується співвідношеннями (16) і нерівністю

$$\sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} \le \gamma_{\sigma-1} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ...\right) < 2\gamma_{\sigma-1}, \tag{26}$$

яка випливає з (22) і (23).

Покладемо

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x) \quad \Big(= G_{\sigma-1}(x) + \overline{G}_\sigma(x)\Big),$$

і з (15) помітимо, що $g \in \Delta^{(1)}(Y)$. Залишилось перевірити (6). Оцінка

$$\omega_3\left(\overline{G}_\sigma, 1/n_\sigma\right) \le \frac{c_3}{n_\sigma^3} \sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} < \frac{2c_3}{n_\sigma^3} \gamma_{\sigma-1} < \frac{\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\varepsilon}}$$

випливає з (20), (26) і (21), а оцінка

$$\omega_3\left(G_{\sigma-1}, 1/n_\sigma\right) \le \frac{1}{n_\sigma^3} \left\| G_{\sigma-1}^{(3)} \right\| \le \frac{\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\varepsilon}}$$

– з (24). Тому для всіх σ

$$\omega_3\left(g, 1/n_\sigma\right) \le \frac{2\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\varepsilon}}. \tag{27}$$

Тепер оцінимо $E_{n_\sigma}^{(1)}(g)$ знизу. Оскільки внаслідок (14) $G_{\sigma-1}(x) = 0$ на

$$\left[-b_{n_{\sigma-1}}, b_{n_{\sigma-1}}\right] := I_{\sigma-1},$$

то

$$g(x) = \gamma_{\sigma-1} g_{n_\sigma}(x) + \overline{G}_{\sigma+1}(x), \quad x \in I_{\sigma-1}.$$

Нехай

$$\tau_{n_\sigma} := \frac{1}{\gamma_{\sigma-1}} \Gamma_{n_\sigma},$$

де Γ_{n_σ} – довільний поліном з $\Delta^{(1)}(Y)$ порядку n_σ, тоді за (19)

$$\|\tau_{n_\sigma} - g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} \geq \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A n_\sigma} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2.$$

Співвідношення (16), нерівність (26) і означення (23) тягнуть оцінку

$$\left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| \leq \sum_{j=\sigma+1}^{\infty} \gamma_{j-1} < 2\gamma_\sigma = \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A4n_\sigma} b_{n_\sigma} \gamma_{\sigma-1}.$$

Тому з урахуванням (25) запишемо

$$E_{n_\sigma}^{(1)}(g) = \|g - \Gamma_{n_\sigma}\| \geq \|\Gamma_{n_\sigma} - g\|_{I_{\sigma-1}} \geq \|\Gamma_{n_\sigma} - \gamma_{\sigma-1} g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} -$$
$$- \left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| = \gamma_{\sigma-1}\|\tau_{n_\sigma} - g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} - \left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| \geq$$
$$\geq \gamma_{\sigma-1}\left(\frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A n_\sigma} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2 - \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A4n_\sigma} b_{n_\sigma}\right) \geq$$
$$\geq \gamma_{\sigma-1}\left(\frac{c_1}{n_\sigma^{1+\varepsilon}} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2\right).$$

Разом з (27), (25) і (22) це тягне нерівність

$$\frac{E_{n_\sigma}^{(1)}(g)}{\omega_k\left(g, 1/n_\sigma\right)} \geq \frac{c_1}{2}\left(n_\sigma^{-1-\varepsilon} n_\sigma^{-3/2} n_\sigma^{3-\varepsilon} - n_\sigma^{-3} n_\sigma^{3-\varepsilon}\right) =$$
$$= \frac{c_1}{2}\left(1 - \frac{1}{n_\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right) n_\sigma^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} \geq \frac{c_1}{4} n_\sigma^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}$$

для всіх σ, тобто (6) вірно, оскільки $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Теорему 1 доведено.

1. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1951. — Т. 15. — С. 219–242.
2. Pleshakov M. G. Comonotone Jackson's Inequality // J. Approx. Theory. — 1999. — V. 99. — P. 409–421.
3. Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г. Комонотонное приближение периодических функций // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83. — С. 199–209.
4. Плешаков М. Г. Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева : Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, СГУ, 1997.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. — 512 с.
6. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1. — Саратов: Изд-во Сарат. у-та, 1990. — 230 с.