Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, Т.5, №1, 104-112

УДК 517.5

Б. И. Голубов (Московский физико-технический ин-т (государственный ун-т), г. Долгопрудный, Московская обл., Россия)

О СУЩЕСТВОВАНИИ БАЗИСОВ ИЗ СДВИГОВ ФУНКЦИЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Доказано, что в однородном бесконечномерном пространстве функций на аддитивной компактной топологической группе не существует базиса из сдвигов конечного множества функций. Приводятся примеры однородных пространств, для которых справедливо сформулированное утверждение. В частности, оно справедливо для пространств $L^p(T)$, $1 \le p < \infty$, *и* $C(T)$, *а также для пространств* $L^p[0,1]^*, 1 \le p < \infty$, *и* $C[0,1]^*$ *относительно двоичных сдвигов, где* $[0,1]^*$ *— модифицированный отрезок* $[0,1]$. *Кроме того, указываются классы пространств Орлича и симметричных (перестановочно инвариантных) пространств функций, которые являются однородными пространствами.*

1. Введение. Известно, что в некоторых полных бесконечномерных пространствах функций существуют базисы вида $\{f(\lambda_n x)\}$, т.е. базисы из "сжатий" одной функции. Например, тригонометрическая система $\{\exp(i\,nx)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ при $1 < p < \infty$ является базисом (при $p = 1$ — полной равномерно минимальной системой) в пространствах $L^p(T)$ комплекснозначных 2π-периодических функций. Системы $\{\cos nx\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ при $1 < p < \infty$ являются базисами (при $p = 1$ — полными равномерно минимальными системами) в пространствах $L^p_c(t)$ и $L^p_s(T)$ 2π-периодических соответственно четных и нечетных действительнозначных функций (см., [1, с. 594]).

Естественно возникает вопрос о том, существуют ли в конкретных бесконечномерных функциональных пространствах базисы или хотя бы полные равномерно минимальные системы, состоящие из сдвигов одной функции, т.е. имеющие вид $\{f(x - t_n)\}$? Например, в [2] доказано, что в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, не существует базиса Рисса из сдвигов одной функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, т.е. базиса

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00669.

Рисса вида $\{f(\cdot - t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. В книге [3, с. 489], доказано, что в про странстве $L(\mathbb{R})$ не существует полных равномерно минимальных систем, а следовательно, и базисов, состоящих из сдвигов одной функции $f \in L(\mathbb{R})$, т.е. имеющих вид $\{f(\cdot - t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Доказательство опирается на глубокую теорему Винера, согласно которой множество $\{f(\cdot - t)\}$ всех сдвигов функции $f \in L(\mathbb{R})$ плотно в пространстве $L(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, где $\hat{f}(x)$ — преобразование Фурье функции f.

В нашей работе [4] доказано, что в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$ не существует базиса из двоичных сдвигов одной функции. Доказательство опирается на двоичный аналог теоремы Винера, согласно которому для плотности множества всех двоичных сдвигов $\{f(\cdot \oplus t)\}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$ необходимо и достаточно выполнение условия $\hat{f}_W(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, где $\hat{f}_W(x)$ — преобразование Фурье–Уолша функции f [5]. На самом деле, из доказательства, приведенного в [4], следует, что в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$ не существует и полной равномерно минимальной системы, состоящей из двоичных сдвигов одной функции.

В той же работе [4] доказано, что в пространствах $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, и $C(T)$ 2π-периодических функций не существует базисов из сдвигов одной функции. Аналогичный результат доказан для пространств $L^p[0,1]^*$, $1 \leq p < \infty$, и $C[0,1]^*$ относительно двоичных сдвигов. (Здесь $[0,1]^*$ — модифицированный отрезок [0,1], который является двоичной группой относительно операции двоичного сложения $\oplus$). Эти результаты являются следствием общей теоремы, согласно которой в бесконечномерном однородном пространстве функций, заданных на аддитивной компактной топологической группе, не существует базисов, состоящих из сдвигов одной функции [4].

В данной работе доказывается, что в бесконечномерном однородном пространстве функций (со значениями в банаховом пространстве), заданных на аддитивной компактной топологической группе, не существует бесконечных равномерно минимальных систем, а следовательно, и базисов, состоящих из сдвигов конечного множества функций. Этот результат, очевидно, окончателен в том смысле, что в нем конечное множество функций нельзя заменить счетным множеством. Действительно, существуют бесконечномерные однородные пространства (например, $C(T)$) с базисом, который, очевидно, является счетным множеством.

2. Основные результаты. Напомним некоторые определения и факты из функционального анализа (см., например, [6, гл. 1]).

Пусть X — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство над полем комплексных или вещественных чисел. Последовательность его элементов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ называется базисом, если для всякого элемента $x \in X$ существует единственный ряд $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \hat{x}(n)e_n$, сходящийся к x. Во всех классических сепарабельных банаховых пространствах базисы были построены. Долгое время оставалась нерешенной проблема Шаудера [7, гл. 7]: всякое ли сепарабельное банахово пространство имеет базис. В 1972 г. Энфло [8] дал отрицательное решение этой проблемы, построив пример сепарабельного банахова пространства без базиса.

Обозначим через $\mathrm{clos}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+})$ замыкание линейной оболочки системы $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset X$ называется:
a) *полной*, если $\mathrm{clos}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}) = X$;
b) *минимальной*, если $e_n \notin \mathrm{clos}(\{e_n\}_{k\neq n})$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$;
c) *равномерно минимальной*, если существует такое $\delta > 0$, что

$$\mathrm{dist}(e_n, \mathrm{clos}(\{e_n\}_{k\neq n})) > \delta\|e_n\|$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\mathrm{dist}(x, A)$ обозначает расстояние от элемента $x \in X$ до множества $A \subset X$, т.е. $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\limits_{y\in A} \|x - y\|$.

Отметим, что в книге [6, с. 68] отмечается, что остается нерешенной проблема: в каждом ли сепарабельном банаховом пространстве существует полная равномерно минимальная система.

Пусть X^* — сопряженное пространство к пространству X, т.е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве X. Система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ полна в X тогда и только тогда, когда не существует отличного от нулевого функционала $f \in X^*$, удовлетворяющего условию $f(e_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Если система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ является базисом пространства X, то она полна и равномерно минимальна в X.

Пусть G — топологическая аддитивная группа с групповой операцией "+", т.е. выполнены следующие условия: 1) G является коммутативной группой; 2) G является (хаусдорфовым) топологическим пространством со второй аксиомой счетности; 3) операции сложения "$+$" и обратная операция "$-$" непрерывны в топологии пространства G. Это означает, что: а) если $z = x + y$, то для любой окрестности $U(z)$ элемента z найдутся окрестности $U(x)$ и $U(y)$ элементов x и y такие, что $U(x) + U(y) \subset U(z)$, где $A + B = \{c \in G : c = a + b, a \in A, b \in B\}$; б) для любой окрестности $U(-x)$ элемента $-x$ найдется такая окрестность $U'(x)$ элемента x, что $-U'(x) \subset U(-x)$, где $-A = \{b \in G : b = -a, a \in A\}$.

Пусть G — топологическая компактная аддитивная группа, а $X(G)$ — банахово пространство функций на G, удовлетворяющее условиям: если $f \in X(G)$, то $f(\cdot + x) \in X(G)$ для любого $x \in G$, причем норма в пространстве $X(G)$ инвариантна относительно сдвига и непрерывна, т.е.

$$\|f(\cdot + x)\|_{X(G)} = \|f\|_{X(G)} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \|f(\cdot + x) - f(\cdot)\|_{X(G)} = 0. \tag{1}$$

Такие банаховы пространства $X(G)$ коротко будем называть *однородными пространствами.* В нашей работе [4] доказана

Теорема A. *В однородном бесконечномерном пространстве функций $X(G)$ не существует базисов вида $\{f(\cdot - -x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где $f \in X(G)$, а $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset G$.*

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 1. *В однородном бесконечномерном пространстве функций $X(G)$ не существует бесконечных равномерно минимальных систем вида $\{f(\cdot - x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где $f \in X(G)$, а $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset G$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции $f \in X(G)$ и некоторой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset G$ система $\{f(\cdot - x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является равномерно минимальной в пространстве $X(G)$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|f(\cdot - x_n) - f(\cdot - x_k)\|_{X(G)} > \delta \|f(\cdot - x_n)\|_{X(G)} \quad \text{при} \quad n \neq k.$$

Отсюда, учитывая инвариантность нормы относительно сдвига аргумента, имеем

$$\|f(\cdot) - f(\cdot + (x_n - x_k))\|_{X(G)} > \delta \|f(\cdot)\|_{X(G)}, \quad n \neq k. \tag{2}$$

Поскольку группа G компактна, то без ограничения общности последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ можно считать сходящейся. Но тогда $\lim\limits_{n,k\to+\infty}(x_n - x_k) = 0$ и поэтому согласно второму из условий (1)

$$\lim_{n,k\to+\infty} \|f(\cdot) - f(\cdot + (x_n - x_k))\|_{X(G)} = 0,$$

что противоречит неравенству (2), так как правая часть неравенства (2) положительна. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Теорема 2. *Пусть $X(G)$ — бесконечномерное однородное пространство и функции $f_1(x), ..., f_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат $X(G)$. Тогда в пространстве $X(G)$ не существует бесконечной равномерно минимальной системы $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, каждый элемент которой является сдвигом одной из указанных функций.*

Доказательство. Предположим, что система функций $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, заданных на аддитивной топологической компактной группе G, является равномерно минимальной в пространстве $X(G)$, причем для каждой функции $e_n(x)$ найдется такая функция $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, и такой элемент $x_{i,n} \in G$, что $e_n(x) = f_i(x - x_{i,n})$. Тогда множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$ можно разбить на m непересекающихся подмножеств $E_1, ..., E_m$ так, что если $n \in E_i$ то $e_n(x) = f_i(x - x_{i,n})$. Так как множество $\mathbb{Z}_+$ бесконечно, то одно из множеств $E_1, ..., E_m$ также бесконечно. Пусть таким множеством является $E_j, 1\le j\le m$. Тогда подпространство $X_j(G) \equiv \mathrm{clos}(\{e_n\}_{n\notin E_j})$ будет бесконечномерным однородным пространством и система функций $\{e_n(x)\}_{n\in E_j}$, будет равномерно минимальной в $X_j(G)$. Но каждая функция $e_n(x) \in X_j(G)$ имеет вид $f_j(x - x_{j,n})$, т.е. является сдвигом одной функции $f_j(x)$. Тем самым, в бесконечномерном однородном пространстве функций $X_j(G)$ нашлась бесконечная равномерно минимальная система, состоящая из сдвигов одной функции $f_j(x)$. Это противоречит теореме 1. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $X(G)$ — бесконечномерное однородное пространство и функции $f_1(x), ..., f_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат $X(G)$. Тогда в пространстве $X(G)$ не существует базиса, каждый элемент которого является сдвигом одной из указанных функций.*

Теорема 3 является следствием теоремы 2, так как всякий базис является полной равномерно минимальной системой.

3. Примеры однородных пространств.

1. *Пространства* $L^p(T), 1 \leq p < \infty$, *и* $C(T)$. Если групповой операцией на торе $T = [0, 2\pi]$ считать операцию сложения по $\mathrm{mod}\ 2\pi$, то в классической топологии тор T превращается в компактную аддитивную группу. Следовательно, пространства $L^p(T), 1 \leq p < \infty$, и пространство $C(T)$ непрерывных 2π-периодических функций являются однородными бесконечномерными сепарабельными пространствами.

2. *Пространства Орлича* $L_M^*(T)$. Рассмотрим пространство Орлича $L_M^*(T)$ (см. [9, гл. 2]), состоящее из функций, заданных на торе T. Это пространство определяется N-функцией $M(u)$, т.е. непрерывной четной выпуклой на числовой оси функцией, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty.$$

Все пространства Орлича являются банаховыми пространствами (см. [9, с. 87]). Пространство $L_M^*(T)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. $M(2u) = O(M(u))$ при $u \to +\infty$. Во всех сепарабельных пространствах Орлича существуют базисы (см. [9, с. 125]). Известно, что все функции из пространства $L_M^*(T)$ имеют абсолютно непрерывные нормы тогда и только тогда, когда N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию (см. [9, с. 106]). Следовательно, все сепарабельные пространства Орлича $L_M^*(T)$ являются однородными пространствами.

3. *Симметричные пространства* $X(T)$. Пусть $X(T)$ — симметричное (перестановочно инвариантное) пространство функций на торе $T = [0, 2\pi]$ (см. [10] или [11, с. 114]). Известны теоретико-множественные вложения $L^\infty(T) \subset X(T) \subset L(T)$. Пространство $X(T)$ является банаховым пространством. При этом оно может быть как сепарабельным, так и несепарабельным. Во всяком сепарабельном пространстве $X(T)$ существует базис. Например, система Хаара является базисом во всяком сепарабельном симметричном пространстве $X(T_1)$, состоящем из 1-периодических функций. В сепарабельном симметричном пространстве $X(T_1)$ норма непрерывна и инвариантна относительно сдвига. Следовательно, такое пространство является однородным.

Примерами симметричных пространств $X(T)$ могут служить пространства $L^p(T), 1 \le p < \infty$, или пространства Лоренца $\Lambda_\psi(T)$. Каждое из пространств Лоренца $\Lambda_\psi(T)$ определяется с помощью возрастающей на $[0, +\infty)$ вогнутой функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\psi(0) = 0$. При этом пространство Лоренца $\Lambda_\psi(T)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\psi(+0) = 0$ и $\psi(+\infty) = +\infty$.

4. *Пространства* $L^p[0,1]^*, 1 \le p < \infty$, *и* $C[0,1]^*$. Определим теперь модифицированный отрезок $[0,1]^*$ (см. [12, гл. 1] или [13, гл. 4]). Он получается из отрезка $[0,1]$ заменой каждой двоично-рациональной точки $0 < x < 1$ двумя точками $x-0$ и $x+0$ следующим образом. Будем считать, что точке $x - 0$ соответствует разложение числа x в бесконечную двоичную дробь: $x - 0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$, где $x_n = 1$ для $n \ge n(x)$, а точке $x + 0$ — разложение числа x в конечную двоичную дробь: $x + 0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$, где $x_n = 0$ для $n \ge n(x)$. Для унификации обозначений считаем, что $0 = 0 + 0, \quad 1 = 1 - 0$.

Элементами модифицированного отрезка $[0,1]^*$ считаем все двоично-иррациональные числа $0<x<1$ и точки $x-0,\ x+0$, которые получены описанным выше способом для двоично-рациональных чисел $x \in [0,1]$.

Упорядочим модифицированный отрезок $[0,1]^*$ следующим образом. Будем считать, что $x - 0 < x + 0$, если $0 < x < 1$, а число x двоично-рационально. Далее, будем считать, что $x + 0 < y$, если $x \in [0,1]^*$ двоично-рационально, а $y \in [0,1]^*$ двоично-иррационально и $x < y$. Кроме того, будем считать, что $y < x - 0$, если $y \in [0,1]^*$ двоично-иррационально, а $x \in [0,1]^*$ двоично-рационально и $y < x$. Элементы модифицированного отрезка $[0,1]^*$ будем обозначать также символами $x^*, y^*, \ldots$. При этом считаем, что $+0 < x^*$, если $x \in [0,1]^*$ и $x^* \ne +0$, а также $x^* < 1 - 0$, если $x^* \in [0,1]^*$ и $x^* < 1 - 0$.

После указанного упорядочивания можно говорить об отрезках $[x^*, y^*] = \{z^* : \ x^* \le z^* \le y^*\}$.

Согласно сказанному выше каждому элементу $x \in [0,1]^*$ сопоставлено взаимно однозначно некоторое разложение числа $0 \le x \le 1$ в двоичную дробь (конечную или бесконечную). Тем самым, установлено взаимно однозначное соответствие между модифицированным отрезком $[0,1]^*$ и множеством всех рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}x_k$, где x_k принимают значения 0 или 1. Мы будем отождествлять элемент $x^* \in [0,1]^*$ с последовательностью $(x_1, x_2, ...)$ из нулей и единиц. Положим $|x^*| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$, если $x^* = (x_1, x_2, ...)$.

Операция сложения $\oplus$ вводится на $[0,1]^*$ следующим образом. Для $x^*, y^* \in [0,1]^*$ полагаем $x^* \oplus y^* = z$, где $z = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots)$, а $x_n \oplus y_n = x_n + y_n (\mathrm{mod}\ 2)$. Эта операция коммутативна и ассоциативна на $[0,1]^*$. Модифицированный отрезок $[0,1]^*$ с введенной операцией сложения является абелевой группой, на которой вводится расстояние $\rho(x^*, y^*) = |x^* \oplus y^*|$ После этого модифицированный отрезок $[0,1]^*$ превращается в компактную топологическую группу, топология в которой задается расстоянием $\rho(x^*, y^*)$. Нормированную меру Хаара на этой группе обозначим символом μ. Отметим, что обратная операция к групповой операции $\oplus$ совпадает с ней самой. Очевидно, пространства $L^p[0,1]^*, 1 \le p < \infty$, μ-измеримых на $[0,1]^*$ функций с нормой

$$\|f\|_{L^p[0,1]^*} = \left(\int_{[0,1]^*} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty$$

являются однородными пространствами.

Функция $f : [0,1]^* \to \mathbb{R}$ называется ρ-непрерывной в точке $x^* \in [0,1]^*$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x^* \oplus y^*) - f(x^*)| < \varepsilon$ при $|y^*| < \delta$. Линейное пространство всех функций, ρ-непрерывных в каждой точке $x^* \in [0,1]^*$, обозначим символом $C[0,1]^*$. Если ввести в нем норму равенством $\|f\|_{C[0,1]^*} = \max\limits_{x^* \in [0,1]^*} |f(x^*)|$, то $C[0,1]^*$ станет однородным пространством на компактной аддитивной группе $[0,1]^*$.

5. *Пространства* $C^{(n)}(T)$. Пространство $C^{(n)}(T)$ 2π-периодических функций, имеющих непрерывные производные заданного порядка $n \in \mathbb{N}$, с нормой

$$\|f\| = \max_{0 \le k \le n} \|f^{(k)}\|_{C(T)},$$

очевидно, является сепарабельным однородным пространством.

6. *Пространство Харди.* Обозначим через $H(T)$ пространство действительнозначных 2π-периодических функций $f \in L(T)$, для которых сопряженные функции

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt,$$

которые существуют почти всюду на T, также принадлежат $L(T)$. Введем в $H(T)$ норму равенством $\|f\|_{H(T)} = \|f\|_{L(T)} + \|\tilde{f}\|_{L(T)}$. Тогда $H(T)$ превращается в однородное банахово пространство, которое называется действительным пространством Харди. Оно изоморфно комплексному пространству Харди $H(D)$, состоящему из функций $f(z)$, аналитических в единичном круге $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{H(D)} = \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})d\theta$$

(см. [1,с. 542]).

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961.
2. *Olson T.E., Zalik R.A.* Nonexistence of a Riesz basis of translates // Proceedings of the 6th Southeastern Approximation Theory Annual Conference. — New York–Basel, 1992. — P. 401–408.
3. *Седлецкий А.М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.
4. *Голубов Б.И.* Об аппроксимации свертками и базисах из сдвигов функции // Analysis Mathematica. — 2008. — **34**, № 1 (2008), С. 9–28.
5. *Голубов Б.И.* Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы // Известия РАН. Сер. мат. — 2003. — **67**, № 1. — С. 33–58.
6. *Бирман М.Ш., Виленкин Н.Я., и др.* Функциональный анализ. Издание второе. — М.: Изд-во "Наука 1972.
7. *Банах С.* Теория линейных операций. — Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
8. *Enflo P.* A counterexample to the approximation property in Banach spaces // Acta Math. — 1973. **139**. P. 309–317.
9. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1958.
10. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Изд-во "Наука 1978.
11. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, II. Function spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Ferlag, 1979.
12. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М.: Изд-во "Наука" , 1987.
13. *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. Издание второе. — М.: Изд-во URSS, 2007.