

УДК 517.5

П. В. Задерей, О. В. Іващук, О. М. Пелагенко

(Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

**ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ
В СЕРЕДНЬОМУ КРАТНИХ РЯДІВ ФУР'Є***Отримано необхідні умови для збіжності в середньому кратних рядів Фур'є інтегрованих функцій.*

Позначимо через $L_1(T^m)$ простір 2π -періодичних інтегрованих функцій $f(x)$ з нормою

$$\|f\|_1 = \int_{T^m} |f(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \dots dx_m = \int_{T^m} |f(x)| dx < \infty,$$

де $x = (x_1, \dots, x_m)$ і $T^m = [0, 2\pi]^m = \underbrace{[0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]}_m$.

Нехай $f \in L_1(T^m)$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l_1|=k} a_l e^{il_1 x_1} \dots e^{il_m x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l_1|=k} a_l e^{i(l,x)}, \quad (1)$$

а

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{|l_1|=k} a_l e^{i(l,x)}$$

— n -та частинна сума ряду (1), де $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $l_j \geq 0$, $|l_1| = |l_1| + |l_2| + \dots + |l_m|$, а $(l, x) = l_1 x_1 + \dots + l_m x_m$.

Кажуть, що ряд (1) збігається в середньому по трикутниках до функції $f(x)$, якщо при $n \rightarrow \infty$

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_1 \rightarrow 0. \quad (2)$$

© П.В. Задерей, О.В. Іващук, О.М. Пелагенко, 2007

В даній роботі знайдено умови, необхідні для виконання співвідношення (2). У випадку $m = 1$ такі умови наведені в [1]. Для рядів вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{|l_1|=k} e^{i(l,x)} \quad (3)$$

в роботі [2] встановлено, що необхідною умовою збіжності в середньому цих рядів є виконання співвідношення

$$\ln^{m-1} n \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n+k}|}{k} \rightarrow 0 \quad (4)$$

при $n \rightarrow \infty$. Цій тематиці присвячено також роботи [3] та [4].

Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай $f \in L_1(T^m)$ і її ряд Фур'є має вигляд (1). Тоді справедлива нерівність при $n \rightarrow \infty$*

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_1 \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left\| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 + o(1).$$

Наслідок 1. *Нехай $f \in L_1(T^m)$ і її ряд Фур'є має вигляд (1). Тоді для збіжності в середньому ряду (1) необхідно, щоб виконувалось співвідношення*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left\| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Оскільки має місце асимптотична рівність ([2, 5])

$$\left\| \sum_{|l_1|=n+k} e^{i(l,x)} \right\|_1 \asymp \ln^{m-1} n,$$

то має місце таке твердження.

Наслідок 2. *Необхідною умовою збіжності в середньому рядів вигляду (3) є виконання співвідношення (4).*

При доведенні теореми будемо використовувати методи роботи [2].

Для зручності наведемо нерівність типу нерівності С.Н. Бернштейна для тригонометричних поліномів багатьох змінних

$$t_n(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=0}^n \sum_{|l_1|=k} a_l e^{il_1 x_1} \cdot \dots \cdot e^{il_m x_m},$$

яка сформульована в [2]:

$$\left\| \frac{\partial t_n}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial t_n}{\partial x_m} \right\|_1 \leq 2^m n \|t_n(x_1, \dots, x_m)\|_1 \quad (6)$$

В доведенні застосовується теорема Харді–Літлвуда [5].
Нехай

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots \in H_1,$$

тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F(e^{ix}) dx, \quad (7)$$

де H_1 — простір Харді (простір аналітичних при $|z| < 1$ функцій $F(z)$, для яких $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{ix})| < \infty$).

Доведення теореми. Через $V_{2n}^n(f; x)$ позначимо суму Валле Пуссена функції $f(x)$:

$$V_{2n}^n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} S_k(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} \sum_{|l_1|=k} a_l e^{il_1 x_1} \cdot \dots \cdot e^{il_m x_m},$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n}; \\ \frac{2n-k+1}{n} & k = \overline{n+1, 2n}. \end{cases}$$

Відомо, що для будь-якої функції $f \in L_1(T^m)$, яка задовольняє умови теореми, при $n \rightarrow \infty$

$$\|f(x) - V_{2n}^n(f; x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Тому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n(f; x)\|_1 &\geq \|V_{2n}^n(f; x) - S_n(f; x)\|_1 - \\ - \|f(x) - V_{2n}^n(f; x)\|_1 &\geq \|V_{2n}^n(f; x) - S_n(f; x)\|_1 + o(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи нерівність (6), оцінимо перший доданок в правій частині нерівності (8).

$$\begin{aligned} &\|V_{2n}^n(f; x) - S_n(f; x)\|_1 = \\ &= \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} \sum_{|l|_1=k} a_l e^{i(l,x)} \right| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2^m n} \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k \sum_{|l|_1=k} a_l e^{i(l,x)} \right| dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Враховуючи 2π -періодичність підінтегральних функцій в (9) і незалежність інтеграла від проміжку інтегрування довжини 2π , отримуємо

$$\frac{1}{2^m n} \frac{1}{2\pi} \int_{T^m} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k \sum_{|l|_1=k} a_l e^{i(l,x)} e^{ikt} \right| dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2^m n} \frac{1}{2\pi} \int_{T^m} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n} (n+k) \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} e^{ikt} \right| dt \right) dx. \quad (10)$$

Підінтегральна функція в (10) відносно змінної t належить простору Харді, тому до внутрішнього інтеграла в (10) застосуємо нерівність Харді–Літлвуда (7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^m n} \frac{1}{2\pi} \int_{T^m} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n} (n+k) \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} e^{ikt} \right| dt dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2^m n} \frac{1}{2\pi} \int_{T^m} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \left| \frac{n-k+1}{n} (n+k) \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right| dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2^m n} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n} \frac{n+k}{k+1} \int_{T^m} \left| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right| dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2^m 2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left\| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 - \frac{1}{2^m 2\pi} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Як відомо, простір $L_1(T^m)$ є повним сепарабельним нормованим простором, в якому множина поліномів $\sum_{k=0}^n \sum_{|l_1|=k} \alpha_l e^{i(l,x)}$,

де α_l — деякі числа, є щільною. Тоді $\left\| \sum_{|l_1|=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 = \left\| \sum_{|l_1|\leq n+k} a_l e^{i(l,x)} - \sum_{|l_1|\leq n+k-1} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. А то-

му

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{|l|_1=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Отже, згідно з (8), (9), (11) і (12)

$$\|V_{2n}^n(f; x) - S_n(f; x)\|_1 + o(1) \geq \frac{1}{2^m 2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left\| \sum_{|l|_1=n+k} a_l e^{i(l,x)} \right\|_1 + o(1).$$

Звідси випливає твердження теореми.

1. *Задерей П. В., Смалъ Б. О.* О сходимости в пространстве L_1 рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 639–645.
2. *Задерей П. В., Капітоненко О. М.* Необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є і Тейлора // Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 117–124.
3. *Задерей П. В.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами в среднем // Методы теории приближений и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 43–48.
4. *Задерей П. В.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 562–568.
5. *Подкорытов А. Н.* Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиедрам // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. — 1982. — № 7. — С. 110–111.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1 — 615 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 538 с.