Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 108-127

УДК 517.5

Т. В. Жигалло (Волин. держ. ун–т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАНИХ НА ВІДРІЗКУ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ПУАССОНА*

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень бігармонійних операторів Пуассона від функцій, заданих на відрізку $[-1,1]$*, які належать класу Ліпшиця* H^α, $0<\alpha\le 1$.

Для кожної неперервної на $[-1,1]$ функції f розглянемо оператор $B_\rho(f,T,x)$:

$$B_\rho(f,T,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k c_k\hat{T}_k\left(x\right), \quad 0\le\rho<1, \quad (1)$$

де $\hat{T}_0\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $\hat{T}_k\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\arccos x$, $k\in N$ — ортонормована з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система поліномів Чебишева, $c_k=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f за цією системою. Оператор $B_\rho(f,T,x)$ будемо називати бігармонійним оператором Пуассона. Неважко показати, що функція $B_\rho(f,T,x)$ може бути представлена у вигляді:

$$B_\rho(f,T,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos t)\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt,$$

де $y=\arccos x$, а $B(\rho,u)$ — бігармонійне ядро Пуассона:

---

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

$$B(\rho,u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k\cos ku=$$

$$=\frac{\left(1-\rho^2\right)^2\left(1-\rho\cos u\right)}{2\left(1-2\rho\cos u+\rho^2\right)^2}. \tag{2}$$

Через H^α, як прийнято, (див., наприклад, [1, с.15]) будемо позначати клас Ліпшиця порядку α, $0<\alpha\le 1$, функцій $f(x)$, які для всіх $x\in[-1,1]$ задовольняють умову:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^\alpha \quad \forall x_1,x_2\in[-1,1]. \tag{3}$$

В роботі вивчається поведінка величини

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;B_\rho;x\right)=\sup_{f\in H^\alpha}|f(x)-B_\rho(f,T,x)| \tag{4}$$

в кожній точці x відрізка $[-1,1]$, коли $\rho\to 1$ $(0<\rho<1)$, $0<\alpha\le 1$.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\rho)=\varphi(\rho;x)$ таку, що при $\rho\to 1$

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha;B_\rho;x\right)=\varphi(\rho;x)+o\left(\varphi(\rho;x)\right), \quad x\in[-1,1],$$

то, наслідуючи О.І. Степанця [2, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для бігармонійного оператора Пуассона вигляду (1) на класі H^α, $0<\alpha\le 1$.

С.М. Нікольський [3] встановив асимптотичні оцінки для наближення функцій $f\in H^\alpha$ методом підсумовування, який визначається множниками $\eta_k^{(n)}=\frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}$, $n\in N$, $k=1,2,...,$ $n-1$. Ним також досліджено питання про наближення функцій з класу H^1 частинними сумами порядку n ряду Фур'є–Чебишева $S_n(f,x,T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k\hat{T}_k(x)$. Пізніше О.П. Тіман [4] отримав асимптотичні рівності для величин типу (4) у випадку наближення функцій з класу Ліпшиця порядку α, $0 < \alpha \leq 1$, сумами $S_n(f,x,T)$ та сумами Фейєра $\sigma_n(f,x,T) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k(f,x,T)$. Задача Колмогорова–Нікольського для сум Абеля–Пуассона на класі H^α, $0 < \alpha \leq 1$, розв'язана у роботі Ю. І. Русецького [5]. Метою даної роботи є відшукання розв'язку задачі Колмогорова–Нікольського для бігармонійного оператора Пуассона вигляду (1) на класі H^α, $0 < \alpha \leq 1$, в кожній точці відрізка $[-1,1]$. Зауважимо, що поведінка верхніх меж наближень на класах періодичних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, гармонійними та бігармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці досліджувались у роботах [6–10].

Основним результатом даної роботи є таке твердження.

Теорема. *Для будь-якого* $\alpha \in (0,1]$ *в кожній точці* $x \in [-1,1]$ *при* $\rho \to 1$ *мають місце рівності:*

$$\mathcal{E}\big(H^\alpha;B_\rho;x\big)=\big(\sqrt{1-x^2}\big)^\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\big(1-\rho\big)^\alpha+\vartheta(\rho,\alpha)\right)+O\big(\theta_{\rho,\alpha}(x)\big), \tag{5}$$

коли $0 < \alpha < 1$, *де*

$$\vartheta(\rho,\alpha)=\begin{cases} O\left((1-\rho)^{3\alpha}\right), & 0<\alpha<\frac{1}{3};\\ O\left((1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}\right), & \alpha=\frac{1}{3};\\ O\left(1-\rho\right), & \alpha>\frac{1}{3}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\theta_{\rho,\alpha}(x)=\begin{cases} (1-\rho)^{2\alpha}|x|^\alpha, & 0<\alpha<\frac{1}{2};\\ (1-\rho)\sqrt{|x|}\ln\frac{1}{1-\rho}, & \alpha=\frac{1}{2};\\ (1-\rho)|x|^\alpha, & \alpha>\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{7}$$

і

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2(1-\rho)}{\pi}+\frac{2(1-\rho)^2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\right)+$$

$$+O(1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2}+|x|\right). \qquad (8)$$

Доведення. Враховуючи властивості додатного бігармонійного ядра та нерівність (3), маємо, що

$$|f(x)-B_\rho(f,T,x)|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(\cos t)-f(\cos y)\right)\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f(\cos t)-f(\cos y)\right|\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos t-\cos y|^\alpha\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt. \qquad (9)$$

Оскільки функція

$$f_0(u)=\begin{cases}(x-u)^\alpha, & -1\leq u\leq x,\\ (u-x)^\alpha, & x\leq u\leq 1.\end{cases}$$

належить класу H^α, $0<\alpha\leq 1$, і, як випливає із співвідношення (4),

$$E\left(H^\alpha;B_\rho;x\right)\geq|f_0(x)-B_\rho(f_0,T,x)|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos t-\cos y|^\alpha\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt, \qquad (10)$$

то із (9) та (10) отримуємо, що

$$E\left(H^\alpha;B_\rho;x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos t-\cos y|^\alpha\left(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\right)dt. \qquad (11)$$

Введемо позначення

$$I(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos t-\cos y|^{\alpha}\,B(\rho,t+y)dt. \tag{12}$$

Беручи до уваги те, що підінтегральна функція в (12) є періодичною, отримуємо

$$I(y)=\frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t-y}{2}\sin\frac{t+y}{2}\right|^{\alpha}B(\rho,t+y)dt=$$

$$=\frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t-2y}{2}\right|^{\alpha}B(\rho,t)dt=$$

$$=\frac{2^{\alpha}}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t\sin(t-y)|^{\alpha}\,B(\rho,2t)dt=$$

$$=\frac{2^{\alpha}}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin^2 t\cos y-\sin t\cos t\sin y\right|^{\alpha}B(\rho,2t)dt. \tag{13}$$

Оскільки при $\alpha\in(0,1]$

$$||u\pm v|^{\alpha}-|u|^{\alpha}|\le|v|^{\alpha}, \tag{14}$$

то із рівності (13) випливає:

$$I(y)=\frac{2^{\alpha}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t\cos t|^{\alpha}\,B(\rho,2t)dt+$$

$$+O(1)\frac{2^{\alpha}}{\pi}|\cos y|^{\alpha}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 t\right)^{\alpha}B(\rho,2t)dt.$$

Або

$$I(y)=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha}B(\rho,2t)dt+$$

$$+O(1)\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}|\cos y|^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha}tB(\rho,2t)dt. \tag{15}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $0<\alpha<1$. Використавши нерівність (14), перший доданок із правої частини співвідношення (15) записуємо у такому вигляді:

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha}B(\rho,2t)dt=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\alpha}\left|1-2\sin^2\frac{t}{2}\right|^{\alpha}B(\rho,2t)dt=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}tB(\rho,2t)dt+$$

$$+(\sin y)^{\alpha}O(1)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\alpha}B(\rho,2t)dt. \tag{16}$$

Обчислимо перший інтеграл із правої частини співвідношення (16). Врахувавши (2), отримуємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha \, B(\rho, 2t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - \rho^2\right) \right) \rho^k \cos 2kt \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos 2kt \right) dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2} \left(1 - \rho^2\right) \right) \rho^k \cos 2kt dt.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha \, B(\rho, 2t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t)dt + \frac{1 - \rho^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2kt dt, \qquad (17)$$

де $P(\rho, 2t)$ — гармонійне ядро Пуассона:

$$P(\rho, 2t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos 2kt = \frac{1 - \rho^2}{2\left(1 - 2\rho \cos 2t + \rho^2\right)}.$$

Інтегруючи частинами в другому доданку з (17), одержимо:

$$\frac{1-\rho^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos 2ktdt=\frac{1}{4}\sin^\alpha t\left(1-\rho^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin 2kt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\frac{\alpha}{4}\left(1-\rho^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}t\cos t\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin 2ktdt=$$

$$=-\frac{\alpha}{4}\rho\left(1-\rho^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}t\cos t\frac{\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}dt=$$

$$=-\alpha\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\cos^2 tP(\rho,2t)dt. \tag{18}$$

Об'єднуючи співвідношення (18) та (17), приходимо до рівності:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha tB(\rho,2t)dt=$$

$$=(1-\alpha\rho)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha tP(\rho,2t)dt+\alpha\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sin^2 tP(\rho,2t)dt. \tag{19}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла із правої частини (19). Як неважко переконатися, для довільної неперервної при $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функції $f(t)$ виконується рівність:

$$\frac{f(\sin t)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t}-\frac{f(t)}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}=O(1), \tag{20}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Із останнього співвідношення (див. також [5, с.138]) випливає, що

$$\frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 t} - \frac{t^\alpha}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} = O(1).$$

Отже,

$$(1-\alpha\rho)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t)dt = (1-\alpha\rho)\frac{1-\rho^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 t}dt =$$

$$= \frac{1-\alpha\rho}{2}\frac{1+\rho}{(1-\rho)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}t}{1-\rho}\right)^2}dt + O(1-\rho^2) =$$

$$= (1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt + O(1-\rho) =$$

$$= (1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\int\limits_0^{\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt + O(1-\rho). \tag{21}$$

Внаслідок формули 3.241.2 [11, с.306] при $\alpha \in (0,1)$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}. \tag{22}$$

Тому із співвідношення (21) при $\rho \to 1$, $0 < \alpha < 1$ випливає

$$(1-\alpha\rho)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t)dt = (1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} + O(1-\rho). \tag{23}$$

Позначимо

$$\xi(\rho) = (1-\rho)^{\alpha}\left((1-\alpha\rho)(1+\rho) - 2(1-\alpha)(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right).$$

Оскільки

$$\xi(\rho) = (1-\rho)^{\alpha}\left(-\alpha\rho-\alpha\rho^2+2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right) + (1-\rho)^{\alpha}\left(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right),$$

і при $\rho \to 1$

$$(1-\rho)^{\alpha}\left(-\alpha\rho-\alpha\rho^2+2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right) = o(1-\rho),$$

$$(1-\rho)^{\alpha}\left(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right) = o(1-\rho),$$

то $\xi(\rho) = o(1-\rho)$ при $\rho \to 1$. Тоді з (23) і з того, що

$$(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^{\alpha}}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} = (1-\alpha)\frac{\pi(1-\rho)^{\alpha}}{2^{\alpha+2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}} +$$

$$+\frac{\pi}{2^{\alpha+3}\cos\frac{\alpha\pi}{2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\xi(\rho),$$

при $\rho \to 1$ отримуємо оцінку першого доданка із правої частини рівності (19):

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} t P(\rho, 2t)dt = (1-\alpha)\frac{\pi(1-\rho)^{\alpha}}{2^{\alpha+2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}} + O(1-\rho). \quad (24)$$

Оцінимо другий інтеграл із правої частини рівності (19). Із рівності (20) маємо, що

$$\frac{\sin^{\alpha} t \sin^2 t}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 t} - \frac{t^{\alpha}t^2}{(1-\rho)^2+4\rho t^2} = O(1),$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена по всіх розглядуваних параметрах. Використовуючи останнє співвідношення, отримуємо

$$\alpha\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sin^2 tP(\rho,2t)dt=\alpha\rho(1-\rho^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha t^2dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}+O(1-\rho^2). \tag{25}$$

Далі, знаходимо оцінку першого доданка з (25):

$$\alpha\rho(1-\rho^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha t^2dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}=\frac{\alpha\rho(1-\rho^2)}{4\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha dt}{\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}t}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int\limits_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}\frac{t^{-\alpha}dt}{t^2(1+t^2)}<$$

$$<\frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int\limits_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}t^{-\alpha-2}dt=\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2). \tag{26}$$

Підставляючи оцінку (26) в (25), отримуємо, що

$$\alpha\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sin^2 tP(\rho,2t)dt=O(1-\rho),\quad \rho\to 1. \tag{27}$$

Поєднання співвідношень (19), (24) та (27) дає можливість записати оцінку першого доданка із правої частини співвідношення (16):

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^\alpha\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha B(\rho,2t)dt=$$

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha + O(1-\rho)\right). \tag{28}$$

Знайдемо другий інтеграл із правої частини співвідношення (16):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho, 2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho, 2t)dt +$$

$$+\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2kt dt. \tag{29}$$

Виконаємо інтегрування частинами в останньому інтегралі з правої частини співвідношення (29):

$$\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2kt dt =$$

$$= -\frac{\left(1-\rho^2\right)}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha\right)' \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin 2kt dt =$$

$$= -\frac{\alpha\rho}{4}(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\cos t \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} dt =$$

$$= -\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\cos^2 t + 2\cos^2 \frac{t}{2}\cos t\right) P(\rho, 2t)dt. \tag{30}$$

Об'єднавши співвідношення (29) і (30), знаходимо, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} B(\rho, 2t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} P(\rho, 2t)dt -$$

$$-\alpha\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} \left(\cos^2 t + 2\cos^2 \frac{t}{2} \cos t\right) P(\rho, 2t)dt <$$

$$< \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} P(\rho, 2t)dt. \tag{31}$$

Знову використовуючи оцінку (20), отримуємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} P(\rho, 2t)dt = \frac{1-\rho^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha}}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 t} dt =$$

$$= \frac{1-\rho^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{t^3}{4}\right)^{\alpha}}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} dt + O(1-\rho^2) =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt + O(1-\rho^2) =:$$

$$=: I(\alpha, \rho) + O(1-\rho^2). \tag{32}$$

Встановимо оцінку величини $I(\alpha, \rho)$ окремо при $\alpha < \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ і $\alpha > \frac{1}{3}$. Нехай $\alpha < \frac{1}{3}$. Тоді, з урахуванням (22), знаходимо:

$$I(\alpha, \rho) = \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt <$$

$$< \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{3\alpha}}{1+t^2}dt = \frac{(1+\rho)(1-\rho)^{3\alpha}}{2^{2\alpha+2}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{3\alpha}{2}\pi}. \tag{33}$$

При $\alpha = \frac{1}{3}$ отримуємо:

$$I\left(\frac{1}{3},\rho\right) = 2^{\frac{1}{3}}\frac{1-\rho^2}{16\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}}\frac{t}{1+t^2}dt = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{16\rho}\left(1-\rho^2\right)\ln\frac{\sqrt{(1-\rho)^2+\pi^2\rho}}{1-\rho}. \tag{34}$$

При $\alpha > \frac{1}{3}$ будемо мати, що

$$I(\alpha,\rho) < \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} t^{3\alpha-2}dt = \frac{\pi^{3\alpha-1}}{2^{5\alpha+2}(3\alpha-1)}\frac{1-\rho^2}{\rho}. \tag{35}$$

Поєднання співвідношень (31)–(35) дозволяє записати, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\alpha}B(\rho,2t)dt = \vartheta(\rho,\alpha), \tag{36}$$

де величина $\vartheta(\rho,\alpha)$ визначена рівністю (6).

Із співвідношень (16), (28) та (36) випливає, що при $0<\alpha<1$ має місце така оцінка першого доданка із правої частини співвідношення (15):

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha}B(\rho,2t)dt =$$

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\,(1-\rho)^{\alpha} + \vartheta(\rho,\alpha)\right). \qquad (37)$$

Оцінимо другий інтеграл із правої частини співвідношення (15). Міркуючи так само, як і при встановленні співвідношення (31), переконуємося в тому, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho,2t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho,2t)dt-$$

$$-2\alpha\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t \cos^2 t P(\rho,2t)dt < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho,2t)dt. \qquad (38)$$

Зі співвідношення (18) роботи [5, с.141] випливає така оцінка інтеграла (38):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho,2t)dt = \begin{cases} O\left((1-\rho)^{2\alpha}\right), & \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left((1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}\right), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ O(1-\rho), & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (39)$$

Поєднання співвідношень (15), (37) і (39) дозволяє записати оцінку інтеграла $I(y)$ при $0< \alpha < 1$:

$$I(y) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\,(1-\rho)^{\alpha} + \vartheta(\rho,\alpha)\right) + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right), \qquad (40)$$

де величина $\theta_{\rho,\alpha}(x)$, $x \in [-1,1]$, визначена співвідношенням (7).

Виконуючи аналогічні перетворення, як і при встановленні формули (13), легко показати, що інтеграл

$$I(-y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^{\alpha} B(\rho,t-y)dt \qquad (41)$$

можна подати у вигляді:

$$I(-y) = \frac{2^\alpha}{\pi} \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 t \cos y + \sin t \cos t \sin y\right|^\alpha B(\rho, 2t)dt.$$

Звідси, на основі співвідношення (14), переконуємося в тому, що для інтеграла $I(-y)$ має місце рівність (15). А тому, оцінка (40), отримана для інтеграла $I(y)$, справедлива і для інтеграла $I(-y)$:

$$I(-y) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha + \vartheta(\rho,\alpha)\right) + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right). \tag{42}$$

Отже, із формул (11), (12), (40)–(42) при $\rho \to 1$ випливає рівність (5).

Розглянемо випадок, коли $\alpha = 1$. Використовуючи співвідношення:

$$\frac{1-\rho\cos 2t}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{1}{2(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)} + \frac{1-\rho^2}{2\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)^2}, \tag{43}$$

знайдемо перший інтеграл із правої частини співвідношення (15). Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t B(\rho, 2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \frac{1-\rho\cos 2t}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} dt =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \left(\frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} + \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}\right) dt. \tag{44}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t dt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{8\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{4\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho},$$

а

$$(1-\rho^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t dt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{1}{2(1-\rho)(1+\rho)},$$

то, підставляючи отримані значення двох інтегралів у (44), знаходимо, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t B(\rho,2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{16\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{1-\rho^2}{8} =$$

$$= \frac{1-\rho}{4\pi} + \frac{(1-\rho)^2}{4\pi}\ln\frac{1}{1-\rho} + O((1-\rho)^2). \tag{45}$$

Знову використавши співвідношення (43), оцінимо другий інтеграл із правої частини співвідношення (15) у випадку, коли $\alpha=1$. Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho,2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\,(1-\rho\cos 2t)}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}dt =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}. \tag{46}$$

Обчислимо перший інтеграл із правої частини формули (46). Як випливає із (20)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-\rho^2)+4\rho\sin^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{(1-\rho^2)+4\rho t^2} + O(1),$$

тоді при $\rho \to 1$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}t\right)^2} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^3 \int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} + O(1) = O(1).$$

Оскільки

$$\frac{\sin^2 t}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = -\frac{1}{4\rho}\left(\frac{(1-\rho)^2}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} - \frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}\right),$$

то, використовуючи формули 2.562.1 та 2.563.1 [11, с.166], знаходимо, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{\pi}{4(1+\rho)^3(1-\rho)}.$$

Підставляючи отримані значення інтегралів у (46), приходимо до висновку, що при $\alpha = 1$ має місце така оцінка другого інтеграла із правої частини співвідношення (15):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho, 2t) dt = O((1-\rho)^2). \tag{47}$$

Із співвідношень (15), (45) та (47) при $\alpha = 1$ отримуємо оцінку інтеграла $I(y)$, вигляду (12):

$$I(y)=\left(\frac{1-\rho}{\pi}+\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\right)\sqrt{1-x^2}+O(1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2}+|x|\right). \tag{48}$$

Ще раз взявши до уваги те, що при $\alpha = 1$ для інтеграла $I(-y)$ вигляду (41) має місце оцінка (48), із співвідношень (11), (12) та (48) отримуємо рівність (8). Теорему доведено.

Зауважимо, що в кожній точці $x \in (-1, 1)$ при $\rho \to 1$ рівності (5) (коли $0 < \alpha < 1$) і (8) (при $\alpha = 1$) є асимптотичними рівностями.

Наслідок. *Для будь-якого* $0 < \alpha < 1$ *в кожній точці* $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ *при* $\rho \to 1$ *має місце асимптотична рівність:*

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha; B_\rho; x\right) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right). \tag{49}$$

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.

2. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: В 2-х ч.— Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч. I. — 427 с.

3. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. // Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1946. — Т. 27, № 4. — С. 295–318.

4. *Тиман А.Ф.* Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами. // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 6 — С. 969–972.

5. *Русецкий Ю.И.* О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля–Пуассона // Сибирский матем. журнал. — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 136–144.

6. *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950 — Т. 72. — С. 11–14.

7. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950 — Т. 74. — С. 17–20.

8. *Фалалеев Л.П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона // Сибирский матем. журнал. — 2001. — Т. 42, № 4. — С. 926–936.

9. *Pych B.* On biharmonic function in unit disc// Ann. pol. math. — 1968. — V. 20, № 3. — P. 203–213.

10. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 5. — С. 995–998.

11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматиз. — 1963. — 1100 с.