Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 73-91

УДК 517.5

У. В. Гудима, Ю. В. Гнатюк, В. О. Гнатюк
(Кам'янець-Поділ. держ. ун-т)

НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ВІДНОШЕННЯМ ОПУКЛИХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ МНОЖИН ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Встановлено теореми характеризації екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації неперервного компактнозначного відображення відношенням опуклих скінченновимірних множин однозначних неперервних відображень.

Нехай S — метричний компакт, s — його елементи, $C(S)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір неперервних на S дійснозначних функцій g з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S} |g(s)|$, $K(R)$ — сукупність непорожніх компактів простору R, $C(S, K(R))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в R таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(R)$ і, крім того, неперервних за Хаусдорфом на $K(R)$, $a \in C(S, K(R))$,

$$C^+(S) = \{g : \ g \in C(S), \, g(s) > 0, \ s \in S\}, U \subset C(S),$$

$$V \subset C^+(S), \frac{U}{V} = \left\{\frac{u}{v} : \ u \in U, \ v \in V\right\}.$$

Задачею найкращої рівномірної раціональної апроксимації багатозначного відображення a множиною $\frac{U}{V}$ будемо називати

© **У. В. Гудима, Ю. В. Гнатюк, В. О. Гнатюк, 2007**

задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right)=\inf_{(u,\upsilon)\in U\times V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u\left(s\right)}{\upsilon\left(s\right)}-y\right|. \tag{1}$$

Якщо існує така пара $(u^*,\upsilon^*)\in U\times V$, що

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*\left(s\right)}{\upsilon^*\left(s\right)}-y\right|,$$

то елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Слід зазначити, що задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервних компактнозначних відображень розглядались у багатьох працях (див.,наприклад, [1–8]). Проте в якості апроксимуючих множин в цих задачах виступали, зазвичай, Γ^* -множини, в тому числі зіркові та опуклі множини.

В даній статті розглядається задача найкращої рівномірної раціональної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною, яка є відношенням двох опуклих скінченновимірних множин однозначних неперервних функцій і не належить, взагалі кажучи, до класу названих вище множин.

Отримані в статті критерії екстремальності елемента $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*,\upsilon^*)\in U\times V$, для величини (1) є узагальненням на випадок задачі відшукання величини (1) теорем характеризації елемента найкращого наближення функції $a\in C\left(S\right)$ множиною $\frac{U}{V^+}$, де U, V — скінченновимірні підпростори простору $C\left(S\right)$, а $V^+=\{\upsilon:\ \upsilon\in V,\upsilon\left(s\right)>0,\ s\in S\}$ (див., наприклад, [9, с. 168–172]).

Нехай U є опуклою множиною вимірності r простору $C\left(S\right)$, а V є опуклою множиною вимірності l цього простору.

Тоді існують лінійні підпростори E_1 та E_2 простору $C\left(S\right)$, породжені відповідно лінійно незалежними функціями $u_i\in C\left(S\right)$, $i=\overline{1,r}$, $\upsilon_k\in C\left(S\right)$, $k=\overline{1,l}$, такі, що $U\subset u^*+E_1$,

$V \subset v^* + E_2$, де u^* — довільний фіксований елемент множини U, а v^* — довільний фіксований елемент множини V.

Звідси випливає, що $U \times V \subset (u^*, v^*) + E_1 \times E_2$.

Легко переконатися, що $U \times V \subset (u^*, v^*) + E_1 \times E_2$ є опуклою підмножиною скінченновимірного лінійного многовиду $(u^*, v^*) + E_1 \times E_2$ вимірності $k + l$ простору $C(S) \times C(S)$.

У подальшому будемо вважати, що обмеження $(u, v) \in U \times V$ у задачі відшукання величини (1) є істотним, тобто

$$\alpha_a^*(C(S)) < \alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right),$$

де

$$\alpha_a^*(C(S)) = \inf_{g \in C(S)} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} |g(s) - y|.$$

Для $(u^*, v^*) \in U \times V$ покладемо

$$\alpha^{(u^*, v^*)} = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y \right|;$$

$$S^{(u^*, v^*)} = \left\{ s : s \in S, \ \max_{y \in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y \right| = \alpha^{(u^*, v^*)} \right\};$$

$$a_s^{(u^*, v^*)} = \left\{ y : y \in a(s), \left| \frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y \right| = \max_{y \in a(s)} \left| \frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y \right| \right\},$$

$$s \in S^{(u^*, v^*)};$$

$$L\left(\frac{u^*}{v^*}\right) = \bigcup_{s \in S^{(u^*, v^*)}} \bigcup_{y \in a_s^{(u^*, v^*)}} \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right) \times$$

$$\times \left(u_1(s) v^*(s), ..., u_r(s) v^*(s); -v_1(s) u^*(s), ..., -v_l(s) u^*(s)\right).$$

Твердження 1. *Якщо* $s_k \in S$, $\lim\limits_{k \to \infty} s_k = s^*$, $y_k \in a(s_k)$, *то існує підпослідовність* $\{y_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *послідовності* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $y^* \in a(s^*)$ *такі , що* $\lim\limits_{n \to \infty} y_{k_n} = y^*$.

Твердження 2. *Нехай* $(u^*, v^*) \in U \times V$. *Множина* $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ *є компактом простору* R^{r+l} .

Доведення. Для кожного $s \in S^{(u^*,v^*)}$, $y \in a_s^{(u^*,v^*)}$ маємо, що

$$\|\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right)(u_1(s)v^*(s), ...,$$

$$..., u_r(s)v^*(s); -v_1(s)u^*(s), ..., -v_l(s)u^*(s))\| =$$

$$= \|(u_1(s)v^*(s), ..., u_r(s)v^*(s); -v_1(s)u^*(s), ..., -v_l(s)u^*(s))\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(u_i(s))^2(v^*(s))^2 + \sum_{k=1}^{l}(v_k(s))^2(u^*(s))^2} \leqslant$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\|u_i\|^2\|v^*\|^2 + \sum_{k=1}^{l}\|v_k\|^2\|u^*\|^2}.$$

Звідси випливає обмеженість множини $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$.

Переконаємось у її замкненості. Нехай $(a_1^*, ..., a_r^*; b_1^*, ..., b_l^*)$ — гранична точка $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$.

Тоді існують послідовності $\{s_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ такі, що $s_p \in S^{(u^*,v^*)}$, а $y_p \in a_{s_p}^{(u^*,v^*)}$, $p = \overline{1,\infty}$, і

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_p)}{v^*(s_p)} - y_p\right) u_i(s_p)v^*(s_p) = a_i^*, i = \overline{1,r},$$

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_p)}{v^*(s_p)} - y_p\right)(-v_k(s_p))u^*(s_p) = b_k^*, k = \overline{1,l}.$$

Оскільки S — компакт, а $\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_p)}{v^*(s_p)} - y_p\right) = \pm 1$, $p = \overline{1,\infty}$, то з послідовності $\{s_p\}_{p=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{s_{p_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ таку, що $\lim\limits_{\mu\to\infty} s_{p_\mu} = s^*$, де $s^* \in S$, і $\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_{p_\mu})}{v^*(s_{p_\mu})} - y_{p_\mu}\right) = 1$ або $\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_{p_\mu})}{v^*(s_{p_\mu})} - y_{p_\mu}\right) = -1$, $\mu = \overline{1,\infty}$.

Припустимо, що

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*\left(s_{p_\mu}\right)}{v^*\left(s_{p_\mu}\right)}-y_{p_\mu}\right)=1, \quad \mu=\overline{1,\infty}.$$

Тоді

$$\lim_{\mu\to\infty}\operatorname{sign}\left(\frac{u^*\left(s_{p_\mu}\right)}{v^*\left(s_{p_\mu}\right)}-y_{p_\mu}\right)u_i\left(s_{p_\mu}\right)v^*\left(s_{p_\mu}\right)=u_i\left(s^*\right)v^*\left(s^*\right)=a_i^*,$$

$$i=\overline{1,r},$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\operatorname{sign}\left(\frac{u^*\left(s_{p_\mu}\right)}{v^*\left(s_{p_\mu}\right)}-y_{p_\mu}\right)\left(-v_k\left(s_{p_\mu}\right)\right)u^*\left(s_{p_\mu}\right)=$$

$$=\left(-v_k\left(s^*\right)\right)u^*\left(s^*\right)=b_k^*, k=\overline{1,l}.$$

Звідси

$$\left(a_1^*,...,a_r^*;b_1^*,...,b_l^*\right)=\left(u_1\left(s^*\right)v^*\left(s^*\right),...,u_r\left(s^*\right)v^*\left(s^*\right);\right.$$

$$\left.-v_1\left(s^*\right)u^*\left(s^*\right),...,-v_l\left(s^*\right)u^*\left(s^*\right)\right). \qquad (2)$$

Крім того,

$$\frac{u^*\left(s_{p_\mu}\right)}{v^*\left(s_{p_\mu}\right)}-y_{p_\mu}=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*\left(s\right)}{v^*\left(s\right)}-y\right|=\alpha^{(u^*,v^*)}. \qquad (3)$$

Відповідно до твердження 1 існує підпослідовність послідовності $\left\{y_{p_\mu}\right\}_{\mu=1}^{\infty}$, яка збігається до елемента $y^*\in a\left(s^*\right)$. Не обмежуючи загальності, можемо записати, що $\lim\limits_{\mu\to\infty}y_{p_\mu}=y^*$. Перейшовши до границі в рівності (3) при $\mu\to\infty$, отримаємо

$$\frac{u^*\left(s^*\right)}{v^*\left(s^*\right)}-y^*=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*\left(s\right)}{v^*\left(s\right)}-y\right|=\alpha^{(u^*,v^*)}.$$

Звідси та зі співвідношення (2) робимо висновок, що $s^* \in S^{(u^*,\upsilon^*)}$, $y^* \in a_{s^*}^{(u^*,\upsilon^*)}$, а

$$(a_1^*, ..., a_r^*; b_1^*, ..., b_l^*) = \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s^*)}{\upsilon^*(s^*)} - y^*\right)(u_1(s^*)\upsilon^*(s^*), ...$$

$$..., u_r(s^*)\upsilon^*(s^*); -\upsilon_1(s^*)u^*(s^*), ..., -\upsilon_l(s^*)u^*(s^*)).$$

Це означає, що $(a_1^*, ..., a_r^*; b_1^*, ..., b_l^*) \in L\left(\frac{u^*}{\upsilon^*}\right)$.

Тому $L\left(\frac{u^*}{\upsilon^*}\right)$ є замкненою множиною. Оскільки ця множина обмежена, то вона є компактною множиною в просторі R^{r+l}.

Твердження доведено.

Позначимо через T оператор, заданий на $(u^*, \upsilon^*) + E_1 \times E_2$, і який кожному елементу $(u, \upsilon) \in (u^*, \upsilon^*) + E_1 \times E_2$ ставить у відповідність вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_r; \beta_1, ..., \beta_l) \in R^{r+l}$ такий, що

$$(u, \upsilon) = (u^*, \upsilon^*) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u_i, 0) + \sum_{k=1}^{l} \beta_k (0, \upsilon_k) =$$

$$= \left(u^* + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, \upsilon^* + \sum_{k=1}^{l} \beta_k \upsilon_k\right).$$

Твердження 3. *Множина $T(U \times V)$ є опуклою множиною в просторі R^{r+l}.*

Теорема 1. *Нехай $(u^*, \upsilon^*) \in U \times V$. Для того, щоб елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $(u, \upsilon) \in U \times V$ існували такі елементи $s \in S$, $y \in a(s)$, що*

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right)\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right|,$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right)\left(\frac{u(s)}{\upsilon(s)} - \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\right) \geqslant 0.$$

Доведення необхідності аналогічне доведенню теорем 3.3, 3.5 праці [2].

Для доведення достатності можуть бути використані такі ж міркування, що і при доведенні теореми 3.6 із [2].

Далі, через $\langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle$ будемо позначати скалярний добуток векторів $(a,b) = (a_1,...,a_r;b_1,...,b_l)$ та $(\alpha,\beta) = (\alpha_1,...,\alpha_r;\beta_1,...,\beta_l)$ простору R^{r+l} :

$$\langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i + \sum_{k=1}^{l} b_k\beta_k.$$

Теорема 2. *Для того, щоб елемент* $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*,v^*) \in U \times V$, *був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і достатньо, щоб існував вектор* $(a^*,b^*) \in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ *такий , що*

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \langle (a^*,b^*),(\alpha,\beta)\rangle \geqslant 0, \tag{4}$$

де $coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ *— опукла оболонка компакта* $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$.

Доведення.*Необхідність.* Кожній парі $((a,b),(\alpha,\beta)) \in \in R^{r+l} \times R^{r+l}$ поставимо у відповідність дійсне число $\langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle = \langle a,\alpha\rangle + \langle b,\beta\rangle$.

Функція $((a,b),(\alpha,\beta)) \to \langle a,\alpha\rangle + \langle b,\beta\rangle$ є опуклою по (α,β) при кожному фіксованому (a,b), угнутою по (a,b) при кожному фіксованому (α,β), неперервною по (a,b) при кожному фіксованому (α,β). Оскільки $T(U\times V)$ є опуклою множиною простору R^{r+l} (див. твердження 3), а згідно з твердженням 2 $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ є компактом цього простору, і отже, $coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ є його опуклим компактом (див., наприклад, [10, с. 20]), то на підставі теореми Фань Цзі про мінімакс (див., наприклад, [11, с. 34]) будемо мати, що

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \max_{(a,b)\in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)} \langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle =$$

$$= \max_{(a,b)\in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)} \inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle . \qquad (5)$$

Нехай (a^*, b^*) є елементом, на якому реалізується максимум у правій частині рівності (5).

Тоді

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \langle (a^*,b^*),(\alpha,\beta)\rangle =$$

$$= \inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \max_{(a,b)\in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)} \langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle .$$

Згідно з теоремою 1 для кожного $(\alpha;\beta) = (\alpha_1, ..., \alpha_r; \beta_1, ..., \beta_l) \in T(U \times V)$ існують такі $s \in S^{(u^*,v^*)}$, $y \in a_s^{(u^*,v^*)}$, що для $u = u^* + \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \in U, v = v^* + \sum\limits_{k=1}^{l} \beta_k v_k \in V$ матимемо

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right)\left(\frac{u(s)}{v(s)} - \frac{u^*(s)}{v^*(s)}\right) \geqslant 0.$$

Звідки

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right)(u(s)v^*(s) - v(s)u^*(s)) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right)\left(\left(u^*(s) + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s)\right)v^*(s) - \right.$$

$$\left. -u^*(s)\left(v^*(s) + \sum_{k=1}^{l}\beta_k v_k(s)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s)v^*(s) + \sum_{k=1}^{l}\beta_k(-u^*(s)v_k(s))\right) \geq 0.$$

Оскільки вектор

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right) \cdot$$

$$\cdot \left(u_1(s)\, v^*(s), ..., u_r(s)\, v^*(s); -v_1(s)\, u^*(s), ..., -v_l(s)\, u^*(s)\right)$$

належить $coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$, то звідси робимо висновок, що

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \max_{(a,b)\in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)} \langle (a,b), (\alpha,\beta)\rangle =$$

$$= \inf_{(\alpha,\beta)\in T(U\times V)} \langle (a^*,b^*), (\alpha,\beta)\rangle \geqslant 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує вектор $(a^*, b^*) \in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ такий, що має місце співвідношення (4) і $(u, v) \in U \times V$. Маємо , що

$$(u,v) = (u^*,v^*) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u_i, 0) + \sum_{k=1}^{l} \beta_k (0, v_k) =$$

$$= \left(u^* + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, v^* + \sum_{k=1}^{l} \beta_k v_k\right),$$

де $(\alpha;\beta) = (\alpha_1, ..., \alpha_r; \beta_1, ..., \beta_l) \in T(U \times V)$.

Оскільки $(a^*, b^*) \in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$, то згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [12, с. 76]) існують точки $s_\nu \in S^{(u^*,v^*)}$, $y_\nu \in a_{s_\nu}^{(u^*,v^*)}$, числа ρ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \tau \leqslant r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, такі, що

$$(a^*,b^*) = \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu (a^\nu, b^\nu),$$

де

$$(a^\nu, b^\nu) = \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) \cdot$$

$$\cdot(u_1(s_\nu)\upsilon^*(s_\nu),...,u_r(s_\nu)\upsilon^*(s_\nu);-\upsilon_1(s_\nu)u^*(s_\nu),...,-\upsilon_l(s_\nu)u^*(s_\nu)).$$

Тому

$$\langle(a^*,b^*),(\alpha,\beta)\rangle=\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu\langle(a^\nu,b^\nu),(\alpha,\beta)\rangle\geqslant 0.$$

Звідси випливає, що існує індекс $\nu\in\{1,...,\tau\}$, для якого $\langle(a^\nu,b^\nu),(\alpha,\beta)\rangle\geqslant 0$. Це означає , що

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\times$$

$$\times\left(\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s_\nu)\right)\upsilon^*(s_\nu)-\left(\sum_{k=1}^{l}\beta_k\upsilon_k(s_\nu)\right)u^*(s_\nu)\right)=$$

$$=\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\left(u^*(s_\nu)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s_\nu)\right)\upsilon^*(s_\nu)-\right.$$

$$\left.-\left(\upsilon^*(s_\nu)+\sum_{k=1}^{l}\beta_k\upsilon_k(s_\nu)\right)u^*(s_\nu)\right)=$$

$$=\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)(u(s_\nu)\upsilon^*(s_\nu)-\upsilon(s_\nu)u^*(s_\nu))\geqslant 0.$$

Тому

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\frac{u(s_\nu)}{\upsilon(s_\nu)}-\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}\right)\geqslant 0.$$

Згідно з теоремою 1 $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 3. *Для того, щоб елемент* $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, *був екстремальним елементом для величини* (1), *необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, *числа* $\rho_\nu \geqslant 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant \tau \leqslant r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, *такі, що*

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) =$$

$$= \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right|, \quad \nu = \overline{1,\tau}, \tag{6}$$

$$\min_{(u,v)\in U\times V} \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)(u(s_\nu)v^*(s_\nu) - v(s_\nu)u^*(s_\nu)) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)(u^*(s_\nu)v^*(s_\nu) - v^*(s_\nu)u^*(s_\nu)) = 0. \tag{7}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 2 існує вектор $(a^*, b^*) \in coL\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$, для якого має місце співвідношення (4). Відповідно до теореми Каратеодорі (див., наприклад, [12, с. 76]) існують $(a^\nu, b^\nu) \in L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$, числа $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \nu \leqslant \tau \leqslant r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, такі, що

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu (a^\nu, b^\nu) = (a^*, b^*). \tag{8}$$

За означенням множини $L\left(\frac{u^*}{v^*}\right)$ для кожного $\nu \in \{1, ..., \tau\}$ існують $s_\nu \in S^{(u^*,v^*)}$, $y_\nu \in a_{s_\nu}^{(u^*,v^*)}$ такі, що

$$(a^\nu, b^\nu) = \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)(u_1(s_\nu)v^*(s_\nu), ..., u_r(s_\nu)v^*(s_\nu));$$

$$-\upsilon_1(s_\nu)u^*(s_\nu),...,-\upsilon_l(s_\nu)u^*(s_\nu)),\nu=\overline{1,\tau}. \quad (9)$$

Враховуючи співвідношення $s_\nu \in S^{(u^*,\upsilon^*)}$, $y_\nu \in a_{s_\nu}^{(u^*,\upsilon^*)}$, робимо висновок, що мають місце рівності (6).

З нерівності (4) з урахуванням (8), (9) для кожного

$$(u,\upsilon)=\left(u^*+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i,\upsilon^*+\sum_{k=1}^{l}\beta_k\upsilon_k\right)\in U\times V$$

отримуємо

$$0\leqslant\langle(a^*,b^*),(\alpha,\beta)\rangle=\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu\langle(a^\nu,b^\nu),(\alpha,\beta)\rangle=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu\mathrm{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\times$$

$$\times\left(\upsilon^*(s_\nu)\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s_\nu)-u^*(s_\nu)\sum_{k=1}^{l}\beta_k\upsilon_k(s_\nu)\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu\mathrm{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\upsilon^*(s_\nu)\left(u^*(s_\nu)+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i(s_\nu)\right)-\right.$$

$$\left.-u^*(s_\nu)\left(\upsilon^*(s_\nu)+\sum_{k=1}^{l}\beta_k\upsilon_k(s_\nu)\right)\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu\mathrm{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{\upsilon^*(s_\nu)}-y_\nu\right)(\upsilon^*(s_\nu)u(s_\nu)-u^*(s_\nu)\upsilon(s_\nu)).$$

Звідки й випливає рівність (7).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\frac{u^*}{\upsilon^*}$, $(u^*,\upsilon^*)\in U\times V$, існують точки $s_\nu\in S$, $y_\nu\in a(s_\nu)$, числа $\rho_\nu\geqslant 0$, $1\leqslant\nu\leqslant\tau\leqslant$

$\leq r+l+1$, такі, що мають місце рівності (6), (7). Переконаємось, що $\frac{u^*}{v^*}$ є екстремальним елементом для величини (1). З (7) для будь-яких $\frac{u}{v}$, $(u,v)\in U\times V$, отримаємо, що

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(v^*(s_\nu)u(s_\nu)-u^*(s_\nu)v(s_\nu)\right)\geqslant 0.$$

Звідки випливає, що для $\frac{u}{v}$, $(u,v)\in U\times V$, існує індекс $\nu\in\{1,...,\tau\}$ для якого

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(v^*(s_\nu)u(s_\nu)-u^*(s_\nu)v(s_\nu)\right)\geqslant 0.$$

Тому

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\frac{u(s_\nu)}{v(s_\nu)}-\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}\right)\geqslant 0.$$

Звідки та з (6) маємо

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)}-y\right|=$$

$$=\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\leqslant$$

$$\leqslant\ \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)}-y_\nu\right)\left(\frac{u(s_\nu)}{v(s_\nu)}-y_\nu\right)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u(s)}{v(s)}-y\right|.$$

Звідси й випливає, що $\frac{u^*}{v^*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай в задачі відшукання величини* (1) U *— лінійний многовид вимірності* r *простору* $C(S)$, V *—опукла*

множина вимірності l цього простору. Для того, щоб елемент $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, був екстремальним елементом для величини (1) *в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, числа $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, такі, що*

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) =$$

$$= \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right|, \nu = \overline{1,\tau}, \tag{10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) v^*(s_\nu)\, u(s_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) v^*(s_\nu)\, u^*(s_\nu), u \in U, \tag{11}$$

$$\max_{v\in V} \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v(s_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v^*(s_\nu). \tag{12}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 3 існують точки $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, числа $\rho_\nu \geqslant 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant \tau \leqslant$ $\leq r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, такі, що мають місце рівності (6), (7). З (7) випливає, що для всіх

$$(u, v) = \left(u^* + u', v\right) \in U \times V, u' \in U - u^*,$$

справджується нерівність

$$0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) \times$$

$$\times \left(v^*(s_\nu)\left(u^*(s_\nu) + u'(s_\nu)\right) - u^*(s_\nu)\, v(s_\nu)\right).$$

Оскільки в цьому співвідношенні u' є довільним елементом лінійного простору $U - u^*$, то маємо, що

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) v^*(s_\nu)\, u(s_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) v^*(s_\nu)\, u^*(s_\nu), u \in U,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v(s_\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v^*(s_\nu).$$

Звідси й випливає справедливість співвідношень (11), (12). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, існують точки $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, числа $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r+l+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, такі, що мають місце співвідношення (10)–(12).

З (11), (12) випливає, що для будь-яких $(u, v) \in U \times V$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v(s_\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u(s_\nu)\, v^*(s_\nu).$$

Тому має місце співвідношення (7). Згідно з теоремою 3 $\frac{u^*}{v^*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай в задачі відшукання величини* (1) U *— лінійний підпростір вимірності* r *простору* $C(S)$, V *— опукла множина вимірності* l *цього простору. Для того, щоб елемент* $\frac{u^*}{v^*}$, $(u^*, v^*) \in U \times V$, *був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, *числа* $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r + l + 1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, *такі, що*

$$\operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right)\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right|,$$

$$\nu = \overline{1,\tau},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) v^*(s_\nu)\, u(s_\nu) = 0, u \in U,$$

$$\max_{v\in V} \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}\left(\frac{u^*(s_\nu)}{v^*(s_\nu)} - y_\nu\right) u^*(s_\nu)\, v(s_\nu) = 0.$$

Справедливість наслідку випливає з теореми 4.

Нехай в задачі відшукання величини (1) U є опуклою множиною вимірності r простору $C(S)$, а $V = \{v : \ v(s) = 1, \ s \in S\}$ — одноелементна множина.

Тоді задача відшукання величини (1) набере вигляду

$$\alpha_a^*(U) = \inf_{u\in U} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} |u(s) - y|. \tag{13}$$

Наслідок 2. *Для того, щоб елемент* $u^* \in U$ *був екстремальним елементом для величини* (13), *необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, *числа* $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, *такі, що*

$$\operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu)(u^*(s_\nu) - y_\nu) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} |u^*(s) - y|, \nu = \overline{1,\tau},$$

$$\min_{u\in U} \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu) u(s_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu) u^*(s_\nu).$$

Справедливість наслідку випливає з теореми 3.

Наслідок 3. *Нехай в задачі відшукання величини* (13) U — *лінійний многовид вимірності* r *простору* $C(S)$. *Для того, щоб елемент* $u^* \in U$ *був екстремальним елементом для величини* (13) *в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, *числа* $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, *такі, що*

$$\operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu)(u^*(s_\nu) - y_\nu) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} |u^*(s) - y|, \nu = \overline{1,\tau},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu) u(s_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu) u^*(s_\nu),$$

$u \in U$.

Справедливість наслідку випливає з теореми 4.

Наслідок 4. *Нехай в задачі відшукання величини* (13) U *є лінійним підпростором вимірності* r *простору* $C(S)$. *Для того, щоб елемент* $u^* \in U$ *був екстремальним елементом для*

величини (13) *в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_\nu \in S$, $y_\nu \in a(s_\nu)$, *числа* $\rho_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,\tau}$, $1 \leqslant \tau \leqslant r+1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu = 1$, *такі, що*

$$\operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu)(u^*(s_\nu) - y_\nu) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} |u^*(s) - y|, \nu = \overline{1,\tau},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \rho_\nu \operatorname{sign}(u^*(s_\nu) - y_\nu)\, u(s_\nu) = 0, u \in U.$$

Справедливість наслідку випливає з наслідку 3.

1. *Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 115–130.
2. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1601–1619.
3. *Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень // Доп. НАН України. — 2005. — № 6. — С.19–23.
4. *Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В.* Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення // Вісник Київ. нац. ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — № 3. — С. 239–244.
5. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором // Вісник Київ. нац. ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — № 3. — С.262–267.
6. *Гудима У.В., Гнатюк Ю.В., Гнатюк В.О.* Про єдиність екстремального елемента та чебишовський альтернанс для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні

питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України, Київ. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 106–116.

7. *Гудима У.В., Гнатюк Ю.В.* Умови екстремальності елемента для величини найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 93–105.
8. *Гудима У.В.* Співвідношення двоїстості для найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України, Київ. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 93–105.
9. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближения. Чебышевские приближения и их приложения. — М.: Наука, 1978. — 235 с.
10. *Лейтхвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.— 335 с.
11. *Фань Цзи.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры. Сборник статей/ Под ред. Воробьева Н.Н.—М.: Физматгиз, 1963. — С. 31–39.
12. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975. — 496 с.