Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 65-72

УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін–т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА БІОРТОГОНАЛЬНІ ПОЛІНОМИ КОНХАУЗЕРА

За допомогою методу узагальнених моментних зображень отримано явні вирази для біортогональних поліномів Конхаузера.

Ще в XIX сторіччі М. Дідоном [1] та Ж. Деруйтсом [2] було розглянуто питання про біортогоналізацію систем функцій $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{t^{pj}\}_{j=0}^{\infty}$, де p — деяке фіксоване натуральне число, $p \geq 2$, на відрізку Δ дійсної осі (скінченному або нескінченному) відносно деякої позитивної міри $d\mu$, що має моменти всіх порядків на Δ

$$\left| \int\limits_{\Delta} t^k d\mu(t) \right| < \infty.$$

Дж. Конхаузер [3] побудував системи біортогональних поліномів $\{Z_N^{(\nu)}(t;p)\}_{N=0}^{\infty}$ та $\{Y_M^{(\nu)}(t;p)\}_{M=0}^{\infty}$ вигляду

$$Z_N^{(\nu)}(t;p) = \sum_{k=0}^{N} \xi_k^{(N)} t^{pk},\ N \in \mathbb{Z}_+,$$

$$Y_M^{(\nu)}(t;p) = \sum_{j=0}^{M} \eta_j^{(M)} t^{j},\ M \in \mathbb{Z}_+,$$

для яких мають місце співвідношення

$$\int\limits_0^{\infty} Z_N^{(\nu)}(t;p) t^{j+\nu} e^{-t} dt = 0,\ j = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty Y_M^{(\nu)}(t;p)t^{pk+\nu}e^{-t}dt = 0,\ k = \overline{0, M-1},$$

де $\nu > -1$. Пізніше ці поліноми отримали назву біортогональних поліномів Конхаузера і вивчалися цілим рядом дослідників [4, 5, 6].

Явні вирази для поліномів Конхаузера $Z_N^{(\nu)}(t;p)$ при кожному дійсному $p > 1$ можна досить просто отримати, користуючись методом узагальнених моментних зображень [7].

Означення. *Будемо говорити, що для числової послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$, якщо на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ визначена білінійна форма $\langle.,.\rangle$, а також існують послідовності елементів $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{X}$ та $\{y_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{Y}$ такі, що $\forall k, j = \overline{0, \infty}$ виконуються рівності*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle.$$

Теорема. *При кожному дійсному $p > 1$ та $\nu > -1$ узагальнені поліноми*

$$Z_N^{(\nu)}(t;p) = \sum_{k=0}^N \xi_k^{(N)} t^{pk}, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_0^\infty Z_N^{(\nu)}(t;p)t^{j+\nu}e^{-t}dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

можуть бути записані у вигляді

$$Z_N^{(\nu)}(t;p) = c_N \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{(-1)^k t^{pk}}{\Gamma(kp+\nu+1)}, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

де c_N — ненульова стала.

Доведення. Розглянемо при деякому $\nu > -1$ числову послідовність

$$s_k = \Gamma(k+\nu+1) = (\nu+1)_k\Gamma(\nu+1),\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

де

$$(\nu)_k := \begin{cases} \nu(\nu+1)\cdot\ldots\cdot(\nu+k-1), & k = \overline{1,\infty}, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

З інтегрального зображення для гама-функції [8, с.81] випливає, що послідовність (2) є послідовністю степеневих моментів

$$s_k = \int\limits_0^\infty t^{k+\nu}e^{-t}dt,\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, твірна функція послідовності (2)

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k = \sum_{k=0}^\infty \Gamma(k+\nu+1)z^k = \Gamma(\nu+1)_2F_0(1,\nu+1;z)$$

може бути зображена у вигляді інтеграла Стілтьєса на $[0,\infty]$, а тому знаменники її апроксимант Паде $[N-1/N]_f(z)$, $N \in \mathbb{N}$, можуть бути записані у вигляді (див. [9]):

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z), \tag{3}$$

де $\{A_N(t)\}_{N=0}^\infty$ — послідовність алгебраїчних многочленів, ортогональних на $[0,\infty)$ з вагою $e^{-t}t^\nu$. Як відомо (див., наприклад, [10]), такі ортогональні многочлени називаються многочленами Лагерра і можуть бути з точністю до сталого множника записані у вигляді

$$A_N(t) = L_N(t;\nu) = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m}\frac{(\nu+1)_N}{(\nu+1)_m}(-t)^m. \tag{4}$$

З (3) та (4) випливає

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_N}{(\nu+1)_{N-m}} (-1)^{N-m} z^m. \qquad (5)$$

Розглянемо тепер лінійний простір $\mathcal{Y}$ неперервних швидко спадаючих на $[0,+\infty)$ функцій, тобто функцій, що спадають при $t \to \infty$ швидше будь-якого степеня $1/t$, і лінійний простір $\mathcal{X}$ неперервних на $(0,+\infty)$ та інтегровних в околі точки $t=0$ функцій повільного зростання на $[0,+\infty)$, тобто функцій, що зростають при $t \to \infty$ не швидше деякого степеня t. Інакше кажучи,

$$\mathcal{Y} = \Big\{ y \in C[0,+\infty) : \ \forall N > 0 \ \exists C > 0, \ \varepsilon > 0,$$

$$|y(t)| \le \frac{C}{|t+\varepsilon|^N} \quad \forall t \in [0,+\infty) \Big\},$$

$$\mathcal{X} = \{ x \in C[1,+\infty) \cap L[0,1] :$$

$$\exists M > 0, C > 0, \varepsilon > 0, \ |x(t)| \le C|t+\varepsilon|^M, \ \forall t \in [1,+\infty) \}.$$

Означимо при деякому фіксованому дійсному $p > 1$ в просторі $\mathcal{X}$ лінійний оператор за формулою

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \frac{\tau(t-\tau)^{p-2}\varphi(\tau)d\tau}{\Gamma(p-1)},$$

а в просторі $\mathcal{Y}$ — лінійний оператор A^* за формулою

$$(A^*\psi)(t) = t \int_t^\infty \frac{(\tau-t)^{p-2}\psi(\tau)d\tau}{\Gamma(p-1)}.$$

Неважко переконатись, що, якщо означити на добутку просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ білінійну форму

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\infty \varphi(t)\psi(t)dt, \tag{6}$$

то оператор A^* буде спряженим до оператора A відносно цієї форми. Покладемо тепер $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Очевидно, $x_0 \in \mathcal{X}$. Легко підрахувати, що

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)\prod\limits_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)} t^{kp+\nu}.$$

Покладемо тепер $y_0(t) = e^{-t}$. Очевидно, $y_0 \in \mathcal{Y}$. Прості підрахунки дають

$$y_1(t) = te^{-t},$$

$$y_2(t) = t(t+p-1)e^{-t},$$

$$\cdots$$

Неважко встановити, що

$$\deg\{y_j(t)e^t\} \equiv j.$$

Підрахуємо узагальнені моменти:

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle = \langle x_k, y_0 \rangle =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Gamma(\nu+1)\prod\limits_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)} t^{kp+\nu} e^{-t} dt =$$

$$= \Gamma(\nu+1)\prod_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1) =$$

$$= \Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+1+p)\cdot\dots\cdot(\nu+1+(k+1)p) =$$

$$= \Gamma(\nu+1)p^k\left(\frac{\nu+1}{p}\right)\left(\frac{\nu+1}{p}+1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{\nu+1}{p}+k-1\right) =$$

$$= p^k\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k\Gamma(\nu+1). \tag{7}$$

Враховуючи (5), знаменник $\widetilde{Q}_N(z)$ апроксиманти Паде порядку $[N-1/N]$ твірної функції послідовності (7) з точністю до сталого множника можна записати у вигляді

$$\widetilde{Q}_N(z) = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_{N-m}}(-1)^{N-m}(pz)^m. \tag{8}$$

З іншого боку, апроксиманту Паде порядку $[N-1/N]$ вказаної функції можна побудувати з використанням узагальненого моментного зображення (7). Згідно з [11] для цього необхідно біортогоналізувати послідовності $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ відносно білінійної форми (6), а саме: побудувати нетривіальні узагальнені поліноми

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)}x_k(t)$$

такі, що

$$\int_0^\infty X_N(t)y_j(t)dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1}. \tag{9}$$

Враховуючи (1) і (9), бачимо, що

$$X_N(t) = t^\nu Z_N^{(\nu)}(t;p), \tag{10}$$

де $Z_N^{(\nu)}(t;p)$ — біортогональні поліноми Конхаузера. Отже,

$$c_k^{(N)} \frac{\Gamma(\nu+1) \prod\limits_{m=0}^{k-1} (mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)} = \xi_k^{(N)}. \qquad (11)$$

Знаменник $\widetilde{Q}_N(z)$ після цього може бути записаний у вигляді

$$\widetilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k}.$$

Враховуючи (8), маємо

$$c_k^{(N)} = \binom{N}{k} \frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k} (-1)^k p^{N-k}.$$

З (10) та (11) маємо

$$\xi_k^{(N)} = \binom{N}{k} \frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k} (-1)^k p^{N-k} \frac{\Gamma(\nu+1) p^k \left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k}{\Gamma(kp+\nu+1)} =$$

$$= \binom{N}{k} \frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N (-1)^k p^N \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)},$$

звідки і випливає істинність твердження теореми.

1. *Didon M.F.* Sur certain systémes de polynomes associés // Annales Sci. de l'Ecole Normale Sup. — 1869. — 6. — P. 111–125.

2. *Deruyts J.* Sur une class de polynômes conjugés // Memoires Courounés et Memoires de Royal des Sciences des Lettres et Beaux-Art de Belgique. — 1886. — 48 p.

3. *Konhauser J.D.E* Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials // Pacif.J.Math. — 1967. — 21, № 2. — P. 303–304.

4. *Agarwal A.K., Manocha H.L.* A note on Konhauser sets of biorthogonal polynomials // Indag.Math. — 1980. — 42. — P. 113–118.
5. *Rossum H. van.* Formally biorthogonal polynomials// Lect.Notes Math. — 1981. — 888. — P. 341–351.
6. *Srivastava H.M.* On the Konhauser sets of biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials // Pacif.J.Math. — 1971. — 37. — P. 801–804.
7. *Дзядык В.К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. — 1981. — № 6. — P. 8–12.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
9. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961. — 312 с.
10. *Суетин П.Л.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979. — 416 с.
11. *Дзядык В.К., Голуб А.П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. — Киев, 1981. — С. 3–15. — (Препринт/ АН УССР. Ин–т математики; 81.58).