Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 49-64

УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, В. О. Гнатюк, У. В. Гудима
(Кам'янець-Поділ. держ. ун-т)

ПИТАННЯ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

В статті розглянуто деякі теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації неперервного компактнозначного відображення.

1. **Постановка задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації неперервного компактнозначного відображення.** Нехай S— метричний компакт, s — його елементи, $C(S)$ —лінійний над полем дійсних чисел нормований простір неперервних на S дійснозначних функцій g з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S} |g(s)|$, $K(R)$— сукупність непорожніх компактів простору R :

$K(R) = \{K : \ K \subset R, \ K \ -\text{компакт}, K \neq \emptyset\}$,

$C(S, K(R))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в R таких, що для кожного $s\in S$ $a(s) = K_s \in K(R)$ і, крім того, неперервних за Хаусдорфом на $K(R)$, $a \in C(S, K(R))$,

$$C^+_{|\cdot|}(S) = \{g : \ g \in C(S), \ |g(s)| > 0, \ s \in S\},$$

$$C^+(S) = \{g : \ g \in C(S), g(s) > 0, \ s \in S\},$$

$$U \subset C(S), V \subset C^+_{|\cdot|}(S), \frac{U}{V} = \left\{\frac{u}{v} : \ u \in U, \ v \in V\right\}.$$

Задачею найкращої рівномірної раціональної апроксимації відображення a множиною $\frac{U}{V}$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \inf_{\substack{u\in U,\\ \upsilon\in V}} \sup_{s\in S} \sup_{y\in a(s)} \left|\frac{u(s)}{\upsilon(s)} - y\right|. \tag{1}$$

Якщо існують $u^* \in U, \upsilon^* \in V$ такі, що

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \sup_{s\in S} \sup_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right|,$$

то елемент $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Зрозуміло, що задачу відшукання величини (1) можна записати в еквівалентній формі:

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \inf_{\substack{u\in U,\\ \upsilon\in V}} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u(s)}{\upsilon(s)} - y\right|. \tag{2}$$

Це випливає з неперервності функції $F_z = |z - y|$, $z \in R$, по y на R , компактнозначності відображення a, властивостей неперервної на компакті дійснозначної функції та твердження 1.1 [1, с. 1603].

Оскільки задача відшукання величини (1) подається у вигляді (2), то означення екстремального елемента для цієї величини можна сформулювати таким чином: якщо існують $u^* \in U, \upsilon^* \in V$ такі, що

$$\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)} - y\right|,$$

то $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ будемо називати екстремальним елементом для величини (2).

У статті розглянуто деякі теореми існування екстремального елемента для величини (2) .

Слід зазначити, що питанням найкращої рівномірної апроксимації неперервних багатозначних відображень, в тому числі питанням існування екстремального елемента для цих задач, останнім часом приділяється належна увага. Так, зокрема, в роботі [2] розглянуто питання про існування в множині багатозначних поліномів фіксованого порядку екстремального елемента для задачі найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення сегмента $[0,1]$ у множину опуклих компактів простору R^l. В роботі [3] доведено теореми існування екстремального елемента для задачі найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення компакту сталими відображеннями, в [4] — теорему існування екстремального елемента для задачі апроксимації неперервного на сегменті $[0,1]$ сегментнозначного відображення множиною алгебраїчних поліномів n -го степеня.

В роботі [1] розглянуто деякі загальні теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення локально компактними множинами однозначних неперервних відображень.

Основна складність дослідження питання про існування екстремального елемента для величини (2) полягає в тому, що апроксимуюча множина $\frac{U}{V}$ в задачі відшукання цієї величини не є, взагалі кажучи, локально компактною множиною навіть за умови, що такими є множини U та V.

Встановлені у статті теореми про існування екстремального елемента для величини (2) є узагальненням для задачі відшукання цієї величини теореми про існування елемента найкращого наближення неперервної на сегменті функції раціональними поліномами, наведені, зокрема, у праці [6, с. 156-160].

2. Теореми існування екстремального елемента для величини (2).

Твердження 1. *Якщо* $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *— екстремальна послідовність для величини (2), то існує число* $\lambda > 0$ *таке, що*

$$|u_m(s)| \le \lambda |\upsilon_m(s)|$$

для всіх $m = 1, 2, ...,$ $s \in S$.

Доведення. Нехай $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ — екстремальна послідовність для величини (2), тобто $u_m \in U$, $\upsilon_m \in V$, $m = 1, 2, ...,$ та

$$\lim_{m\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left| \frac{u_m(s)}{\upsilon_m(s)} - y \right| = \alpha_a^* \left(\frac{U}{V} \right). \tag{3}$$

Для всіх $m = 1, 2, ...$ і $s \in S$ маємо, що

$$\left| \frac{u_m(s)}{\upsilon_m(s)} \right| \le \max_{y\in a(s)} \left| \frac{u_m(s)}{\upsilon_m(s)} - y \right| + \max_{y\in a(s)} |y| \le$$

$$\le \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left| \frac{u_m(s)}{\upsilon_m(s)} - y \right| + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} |y|.$$

Звідси, з огляду на (3), робимо висновок, що існує додатне число λ таке, що $\left|\frac{u_m(s)}{\upsilon_m(s)}\right| \le \lambda$ для всіх $m = 1, 2, ...,$ $s \in S$.

Звідки $|u_m(s)| \le \lambda |\upsilon_m(s)|$ для всіх $m = 1, 2, ...$ та $s \in S$.

Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\upsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ *збіжні до* u^* *та* υ^* *відповідно послідовності елементів простору* $C(S)$*, причому* $\upsilon_m \in C_{|\cdot|}^{+}(S)$, $m = 1, 2, \ldots$, $\upsilon^* \in C_{|\cdot|}^{+}(S)$.

Тоді послідовність $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *збігається до* $\frac{u^*}{\upsilon^*}$.

Доведення. Оскільки $\upsilon^* \in C_{|\cdot|}^{+}(S)$, то $\min\limits_{s\in S} |\upsilon^*(s)| = \delta_1 > 0$. Нехай $\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1$. Маємо для всіх $m = 1, 2, ...$ (див., наприклад, [6, с. 306]), що

$$\left|\min_{s\in S}|v_m(s)| - \min_{s\in S}|v^*(s)|\right| \le \max_{s\in S}|v_m(s) - v^*(s)| = \|v_m - v^*\|.$$

Внаслідок цього та рівності $\lim\limits_{m\to\infty} v_m = v^*$ існує таке натуральне число m_0, що для всіх $m > m_0$ виконується нерівність

$$\min_{s\in S}|v_m(s)| \ge \delta_2.$$

Для всіх $m > m_0$ та $s \in S$, беручи до уваги цю нерівність, отримуємо

$$\left|\frac{u_m(s)}{v_m(s)} - \frac{u^*(s)}{v^*(s)}\right| = \left|\frac{u_m(s)\,v^*(s) - u^*(s)\,v_m(s)}{v_m(s)\,v^*(s)}\right| =$$

$$= \frac{|u_m(s)\,v^*(s) - u^*(s)\,v_m(s)|}{|v_m(s)|\,|v^*(s)|} =$$

$$= \frac{|(u_m(s) - u^*(s))\,v^*(s) + u^*(s)\,(v^*(s) - v_m(s))|}{|v_m(s)|\,|v^*(s)|} \le$$

$$\le \frac{\|u_m - u^*\|\,\|v^*\| + \|u^*\|\,\|v^* - v_m\|}{\delta_2^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} u_m = u^*$, $\lim\limits_{m\to\infty} v_m = v^*$, то звідси випливає, що

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_m}{v_m} = \frac{u^*}{v^*}.$$

Твердження доведено.

Для $v \in C(S)$, $v \ne 0$, через S_v будемо позначати таку множину: $S_v = \{s:\ s \in S,\ v(s) \ne 0\}$.

Теорема 1. *Якщо для деякої екстремальної послідовності* $\left\{\frac{u_m}{v_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *для величини* (2) *існує підпослідовність* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$

послідовності натуральних чисел така, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} = u^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \upsilon_{m_k} = \upsilon^*$, $\upsilon^* \neq 0$, *множина* S_{υ^*} *щільна в* S *і, крім того, існують* $\hat{u} \in U$, $\hat{\upsilon} \in V$ *такі, що*

$$\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)} = \frac{u^*\,(s)}{\upsilon^*\,(s)}, s \in S_{\upsilon^*}, \tag{4}$$

то $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ *буде екстремальним елементом для величини* (2).

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Доведемо, що $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ буде екстремальним елементом для величини (2). Для $s \in S_{\upsilon^*}$, $k = 1, 2, ...$ маємо (див., наприклад, [6, с. 306])

$$\left|\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u_{m_k}\,(s)}{\upsilon_{m_k}\,(s)} - y\right| - \max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*\,(s)}{\upsilon^*\,(s)} - y\right|\right| \leq$$

$$\leqslant \left|\frac{u_{m_k}\,(s)}{\upsilon_{m_k}\,(s)} - \frac{u^*\,(s)}{\upsilon^*\,(s)}\right|.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} = u^*, \lim\limits_{k\to\infty} \upsilon_{m_k} = \upsilon^*$, то, враховуючи останню нерівність та умову (4), робимо висновок, що для всіх $s \in S_{\upsilon^*}$

$$\lim_{k\to\infty}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u_{m_k}\,(s)}{\upsilon_{m_k}\,(s)} - y\right| = \max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)} - y\right|.$$

Звідси, з урахуванням рівності (3) , одержуємо

$$\max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)} - y\right| \leqslant \alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right), s \in S_{\upsilon^*}. \tag{5}$$

Нехай тепер $s \in S \backslash S_{\upsilon^*}$ і послідовність $\{t_l^s\}_{l=1}^{\infty}$, $t_l^s \in S_{\upsilon^*}$, $l = 1, 2, ...$, така, що

$$\lim_{l\to\infty} t_l^s = s.$$

На підставі того, що для кожного $g \in C(S)$ функція $\Phi_a^g(s) = \max\limits_{y \in a(s)} |g(s) - y|$, $s \in S$, є неперервною по s на S (див. [1, с. 1603]), враховуючи (5), робимо висновок, що

$$\lim_{l \to \infty} \max_{y \in a\left(t_l^s\right)} \left| \frac{\hat{u}\left(t_l^s\right)}{\hat{v}\left(t_l^s\right)} - y \right| =$$

$$= \max_{y \in a(s)} \left| \frac{\hat{u}(s)}{\hat{v}(s)} - y \right| \leqslant \alpha_a^* \left(\frac{U}{V} \right), \quad s \in S \backslash S_{v^*}. \tag{6}$$

Далі, з (5) та (6) випливає, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left| \frac{\hat{u}(s)}{\hat{v}(s)} - y \right| \leqslant \alpha_a^* \left(\frac{U}{V} \right).$$

Оскільки $\hat{u} \in U$, $\hat{v} \in V$, то це означає, що $\frac{\hat{u}}{\hat{v}}$ буде екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо в задачі відшукання величини* (2) *для деякої екстремальної послідовності* $\left\{ \frac{u_m}{v_m} \right\}_{m=1}^{\infty}$ *для цієї величини існує підпослідовність* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *послідовності натуральних чисел така, що* $\lim\limits_{k \to \infty} u_{m_k} = u^* \in U$, $\lim\limits_{k \to \infty} v_{m_k} = v^* \in V$, *то* $\frac{u^*}{v^*}$ *буде екстремальним елементом для величини* (2).

Справедливість наслідку випливає з теореми 1, якщо в цій теоремі покласти $\hat{u} = u^*, \hat{v} = v^*$.

Наслідок 2. *Нехай в задачі відшукання величини* (2) U*— локально компактна, а* V *—відносно компактна множини простору* $C(S)$.

Якщо для довільних елементів $u^* \in \overline{U}$, $v^* \in \overline{V}$ *таких, що* $|u^*(s)| \leqslant \lambda |v^*(s)|$ *для всіх* $s \in S$ *і деякого* $\lambda > 0$, $v^* \neq 0$, *множина* S_{v^*} *щільна в* S *і, крім того, існують* $\hat{u} \in U$, $\hat{v} \in V$, *для яких*

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{u^*(s)}{v^*(s)}, s \in S_{v^*}, \tag{7}$$

то екстремальний елемент для величини (2) *існує.*

Доведення. Нехай $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ — екстремальна послідовність для величини (2). Згідно з твердженням 1 існує додатне число λ таке, що $|u_m(s)| \leqslant \lambda |\upsilon_m(s)|$ для всіх $m = 1, 2, \dots$, $s \in S$.

Оскільки V — відносно компактна множина простору $C(S)$, то існує додатне число δ таке, що$\|\upsilon\| \leqslant \delta$ для всіх $\upsilon \in V$. Тому, враховуючи попередню нерівність, приходимо до висновку, що $\|u_m\| \leqslant \lambda\delta$, $m = 1, 2, \dots$.

Внаслідок локальної компактності множини U, відносної компактності множини V з послідовностей $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\upsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжні до $u^* \in \overline{U}$, $\upsilon^* \in \overline{V}$ відповідно підпослідовності $\{u_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\upsilon_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (див., наприклад, [6, с. 21], [7, с. 48]).

Оскільки $|u_{m_k}(s)| \leqslant \lambda |\upsilon_{m_k}(s)|$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, і $s \in S$, то $|u^*(s)| \leqslant \lambda |\upsilon^*(s)|$ для всіх $s \in S$.

Згідно з умовою наслідку $\upsilon^* \neq 0$, множина S_{υ^*} щільна в S і, крім того, існують $\hat{u} \in U$, $\hat{\upsilon} \in V$, які задовольняють умову (7).

Згідно з теоремою 1 $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ є екстремальним елементом для величини (2).

Наслідок доведено.

Наслідок 3. *Якщо U — замкнена локально компактна множина простору $C(S)$, а V — компакт простору $C(S)$, то екстремальний елемент для величини* (2) *існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 2.

Наслідок 4. *Нехай U — скінченновимірний підпростір простору $C(S)$, а V — компакт простору $C(S)$. Тоді екстремальний елемент для величини* (2) *існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 3, оскільки скінченновимірний підпростір є локально компактною та замкненою множиною (див., наприклад, [6, с. 21]).

Наслідок 5. *Нехай U та P — скінченновимірні підпростори простору $C(S)$, V є обмеженою замкненою множиною підпростору P. Тоді екстремальний елемент для величини* (2) *існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 4, оскільки обмежена замкнена множина скінченновимірного підпростору є компактом.

Теорема 2. *Якщо в задачі відшукання величини* (2) *для деякої екстремальної послідовності $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ для цієї величини існує підпослідовність $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності натуральних чисел така, що послідовності $\left\{\frac{\upsilon_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{u_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ мають при $k\to\infty$ границі, рівні відповідно υ^*, u^*, причому множина S_{υ^*} щільна в S, та крім того, існують $\hat{u}\in U$, $\hat{\upsilon}\in V$, для яких*

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\upsilon}(s)}=\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)},\quad s\in S_{\upsilon^*},\tag{8}$$

то $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ буде екстремальним елементом для величини (2).

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Доведемо, що $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ буде екстремальним елементом для величини (2). Для $s\in S_{\upsilon^*}$, $k=1,2,...$ маємо (див., наприклад, [6, с. 306])

$$\left|\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u_{m_k}(s)}{\upsilon_{m_k}(s)}-y\right|-\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{u_{m_k}(s)}{\upsilon_{m_k}(s)}-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\right|=\left|\frac{u_{m_k}(s)\cdot\|\upsilon_{m_k}\|^{-1}}{\upsilon_{m_k}(s)\cdot\|\upsilon_{m_k}\|^{-1}}-\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}\right|.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}=u^*$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\upsilon_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}=\upsilon^*$, то з останньої рівності та умови (8) теореми робимо висновок, що для всіх $s\in S_{\upsilon^*}$

$$\lim_{k\to\infty}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u_{m_k}(s)}{\upsilon_{m_k}(s)}-y\right|=\max_{y\in a(s)}\left|\frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}-y\right|=\max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\upsilon}(s)}-y\right|.$$

Звідси, враховуючи (3), одержуємо, що

$$\max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)}-y\right|\leqslant\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right),s\in S_{\upsilon^*}. \tag{9}$$

Нехай тепер $s\in S\backslash S_{\upsilon^*}$ і послідовність $\{t_l^s\}_{l=1}^{\infty}$, $t_l^s\in S_{\upsilon^*}, l=$ $=1,2,...$, така, що $\lim\limits_{l\to\infty}t_l^s=s$.

На підставі того, що для будь-якого $g\in C\,(S)$ функція $\Phi_a^g\,(s)=\max\limits_{y\in a(s)}|g\,(s)-y|$, $s\in S$, є неперервною по s на S (див. [1, с. 1603]) можемо, використовуючи (9), прийти до висновку, що

$$\lim_{l\to\infty}\max_{y\in a\left(t_l^s\right)}\left|\frac{\hat{u}\,(t_l^s)}{\hat{\upsilon}\,\left(t_l^s\right)}-y\right|=$$

$$=\max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)}-y\right|\leqslant\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right),s\in S\backslash S_{\upsilon^*}. \tag{10}$$

Далі, з (9), (10) випливає, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left|\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{\upsilon}\,(s)}-y\right|\leqslant\alpha_a^*\left(\frac{U}{V}\right).$$

Оскільки $\hat{u}\in U$, $\hat{\upsilon}\in V$, то це означає, що $\frac{\hat{u}}{\hat{\upsilon}}$ буде екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Наслідок 6. *Якщо для деякої екстремальної послідовності* $\left\{\frac{u_m}{\upsilon_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *для величини* (2) *існує підпослідовність* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *послідовності натуральних чисел така, що* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\upsilon_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}=\upsilon^*\in V$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_{m_k}}{\|\upsilon_{m_k}\|}=u^*\in U$, *то* $\frac{u^*}{\upsilon^*}$ *буде екстремальним елементом для величини* (2).

Справедливість наслідку випливає з теореми 2, якщо в цій теоремі вважати $\hat{u}=u^*$, $\hat{\upsilon}=\upsilon^*$.

Наслідок 7. *Якщо в задачі відшукання величини* (2) U*— замкнений локально компактний конус (в тому числі скінченновимірний підпростір) простору* $C\,(S)$ *та для деякої екстремальної послідовності* $\left\{\frac{u_m}{v_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *для цієї величини існує часткова границя послідовності* $\left\{\frac{v_m}{\|v_m\|}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *, яка належить* V*, то екстремальний елемент для величини* (2) *існує.*

Доведення. Нехай v^*— часткова границя послідовності $\left\{\frac{v_m}{\|v_m\|}\right\}_{m=1}^{\infty}$, про яку йде мова в наслідку, і $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{v_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}=v^*\in V$.

Згідно з твердженням 1 існує число $\lambda>0$ таке, що

$$|u_{m_k}\,(s)|\leqslant\lambda\,|v_{m_k}\,(s)|\,,k=1,2,...,s\in S.$$

Звідси випливає, що $\left\|\frac{u_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}\right\|\leqslant\lambda$ для всіх $k=1,2,....$

Оскільки $\frac{u_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}\in U$ (U конус) та U- є замкненою локально компактною множиною, то з послідовності $\left\{\frac{u_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна виділити підпослідовність $\left\{\frac{u_{m_{k_l}}}{\left\|v_{m_{k_l}}\right\|}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до $u^*\in U$. Враховуючи, що $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{v_{m_{k_l}}}{\left\|v_{m_{k_l}}\right\|}=v^*\in V$, використовуючи наслідок 6, можна зробити висновок, що $\frac{u^*}{v^*}$ є екстремальним елементом для величини (2).

Наслідок доведено.

Наслідок 8. *Нехай* U *та* V *— локально компактні конуси простору* $C\,(S)$*. Тоді, якщо для довільних елементів* $u^*\in\bar{U}$, $v^*\in\bar{V}, v^*\neq0$, *таких, що* $|u^*\,(s)|\leqslant\lambda\,|v^*\,(s)|$ *для всіх* $s\in S$ *і деякого* $\lambda>0$, *множина* S_{v^*} *щільна в* S, *та крім того, існують* $\hat{u}\in U$, $\hat{v}\in V$ *такі, що*

$$\frac{\hat{u}\,(s)}{\hat{v}\,(s)}=\frac{u^*\,(s)}{v^*\,(s)},\quad s\in S_{v^*}, \tag{11}$$

то екстремальний елемент для величини (2) *існує.*

Доведення. Нехай $\left\{\frac{u_m}{v_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ — екстремальна послідовність для величини (2). Відповідно до твердження 1 існує число $\lambda > 0$ таке, що

$$|u_m(s)| \leqslant \lambda |v_m(s)|, m = 1, 2, ..., \quad s \in S. \qquad (12)$$

Оскільки $\left\|\frac{v_m}{\|v_m\|}\right\| = 1$, $\frac{v_m}{\|v_m\|} \in V$ (V — конус), $m = 1, 2, ...,$ і V є локально компактною множиною, то існує збіжна до v^* підпослідовність $\left\{\frac{v_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\frac{v_m}{\|v_m\|}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Зрозуміло, що $v^* \in \overline{V}$, $\|v^*\| = 1$.

З нерівності (12) випливає, що $\left\|\frac{u_m}{\|v_m\|}\right\| \leqslant \lambda$ для всіх $m = 1, 2, ...$ Оскільки $\frac{u_m}{\|v_m\|} \in U$ (U - конус), $m = 1, 2, ...,$ і U є локально компактною множиною, то існує збіжна до u^* підпослідовність послідовності $\left\{\frac{u_{m_k}}{\|v_{m_k}\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{m_k}}{\|v_{m_k}\|} = u^*$.

Зрозуміло, що $u^* \in \overline{U}$ та відповідно до (12) $|u^*(s)| \leq \leqslant \lambda |v^*(s)|$, $s \in S$. Згідно з умовою наслідку S_{v^*} щільна в S. З урахуванням цього, співвідношення (11) та теореми 2, робимо висновок, що $\frac{\hat{u}}{\hat{v}}$ буде екстремальним елементом для величини (2).

Наслідок доведено.

Наслідок 9. *Нехай U та P — скінченновимірні підпростори простору $C(S)$, V — конус, який включається у множину $P \cap C^+_{|\cdot|}(S)$.*

Тоді, якщо для довільних елементів $u^* \in U$, $v^* \in \overline{V}$, $v^* \neq 0$, таких, що $|u^*(s)| \leqslant \lambda |v^*(s)|$ для всіх $s \in S$ і деякого $\lambda > 0$, множина S_{v^*} щільна в S, та крім того, існують $\hat{u} \in U$, $\hat{v} \in V$ такі, що має місце співвідношення (11), *то екстремальний* *елемент для величини* (2) *існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 8, якщо врахувати, що U та V є локально компактними конусами простору $C(S)$ та $\overline{U} = U$.

3. Задача відшукання величини (2) у дійсній області. Розглянемо окремий випадок задачі (2), коли $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, де a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$, — дійсні числа, для яких $a_i < b_i$, $i = \overline{1, n}$, $b_i < a_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$,

$$U = \left\{ u: \ u(s) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j s^j, \ \ s \in S, \ \ \alpha_j \in R, \ \ j = \overline{0, r} \right\},$$

$$P = \left\{ \upsilon: \ \upsilon(s) = \sum_{k=0}^{l} \beta_k s^k, \ \ s \in S, \ \beta_k \in R, \ \ k = \overline{0, l} \right\},$$

$V \subset P \cap C^{+}_{|\cdot|}(S)$.

Задачу відшукання величини (2) у цьому випадку будемо називати задачею відшукання величини (2) у дійсній області.

Теорема 3. *Нехай в задачі відшукання величини* (2) *у дійсній області* $V = P \cap C^{+}_{|\cdot|}(S)$. *Тоді екстремальний елемент для цієї величини існує.*

Доведення. Переконаємось, що у цьому випадку виконуються умови наслідку 9. Дійсно U та P є скінченнновимірними підпросторами простору $C(S)$, $V = P \cap C^{+}_{|\cdot|}(S)$ і V— конус.

Нехай $u^* \in U$, $\upsilon^* \in \overline{V}$, $\upsilon^* \neq 0$. Оскільки $\overline{V} \subset P$, то u^*, υ^* — многочлени, степені яких не перевищують r та l відповідно, причому υ^* є ненульовим многочленом. Тоді він має не більше ніж l дійсних коренів. Тому множина S_{υ^*} щільна в S. Припустимо, що $|u^*(s)| \leqslant \lambda |\upsilon^*(s)|$ для всіх $s \in S$ і деякого $\lambda > 0$. Зрозуміло, що многочлен $\upsilon^*(s)$ можна записати у вигляді

$$\upsilon^*(s) = (s - s_1)^{k_1} \ldots (s - s_\nu)^{k_\nu} \, \hat{\upsilon}(s),$$

де $s_1, ..., s_\nu$ — дійсні корені υ^* кратності відповідно $k_1, ..., k_\nu$, що належать S, а $\hat{\upsilon} \in V$. Внаслідок нерівності $|u^*(s)| \leqslant \lambda |\upsilon^*(s)|$ для всіх $s \in S$ матимемо, що

$$|u^*(s)| \leqslant \lambda |s - s_1|^{k_1} ... |s - s_\upsilon|^{k_\upsilon} |\hat{\upsilon}(s)|, \quad s \in S. \tag{13}$$

Зрозуміло, що тоді s_1 є коренем многочлена u^*. Тому $u^*(s) = (s - s_1) u_1^*(s)$, $s \in S$, де $u_1^* \in U$. З урахуванням цього та нерівності (13) робимо висновок, що

$$|u_1^*(s)| \leqslant \lambda |s - s_1|^{k_1 - 1} |s - s_2|^{k_2} ... |s - s_\upsilon|^{k_\nu} |\hat{\upsilon}(s)|$$

для всіх $s \in S$. Тоді s_1 є коренем многочлена u_1^*. Тому $u_1^*(s) = (s - s_1) u_2^*(s)$, а $u^*(s) = (s - s_1)^2 u_2^*(s), s \in S$, де $u_2^* \in U$. Аналогічно отримуємо, що

$$u^*(s) = (s - s_1)^{k_1} u_{k_1}^*(s), \quad s \in S, u_{k_1}^* \in U,$$

і

$$\left|u_{k_1}^*(s)\right| \leqslant \lambda |s - s_2|^{k_2} ... |s - s_\nu|^{k_\nu} |\hat{\upsilon}(s)|, \quad s \in S.$$

Проводячи подібні міркування щодо многочлена $u_{k_1}^*$ та кореня s_2 тощо, будемо мати

$$u^*(s) = (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} ... (s - s_\nu)^{k_\nu} \hat{u}(s), \quad s \in S,$$

причому $\hat{u} \in U$.

Для $\hat{u} \in U$, $\hat{\upsilon} \in V$ маємо, що для всіх $s \in S_{\upsilon^*}$

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\upsilon}(s)} = \frac{(s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} ... (s - s_\nu)^{k_\nu} \hat{u}(s)}{(s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} ... (s - s_\nu)^{k_\nu} \hat{\upsilon}(s)} = \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}.$$

Згідно з наслідком 9 екстремальний елемент для величини (2) в цьому випадку існує.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай в задачі відшукання величини* (2) *в дійсній області* $S = [a, b]$, $V = P \cap C^+ (S)$. *Тоді екстремальний елемент для цієї величини існує.*

Доведення. Переконаємось, що у цьому випадку виконуються умови наслідку 9. Дійсно U та P є скінченнновимірними підпросторами простору $C (S)$, $V = P \cap C^+ (S) \subset P \cap C^+_{|\cdot|} (S)$, V— конус. Нехай $u^* \in U$, $\upsilon^* \in \overline{V}$, $\upsilon^* \neq 0$. Оскільки $\overline{V} \subset P$, то u^*, υ^* — многочлени, степені яких не перевищують r та l відповідно, причому $\upsilon^* (s) \geqslant 0$, $s \in [a, b]$, υ^* є ненульовим многочленом. Тоді він має не більше ніж l дійсних коренів. Тому множина S_{υ^*} щільна в $S = [a, b]$.

Припустимо, що $|u^* (s)| \leqslant \lambda |\upsilon^* (s)| = \lambda \upsilon^* (s)$ для всіх $s \in S = [a, b]$ і деякого $\lambda > 0$. Зрозуміло, що многочлен $\upsilon^* (s)$ можна подати у вигляді

$$\upsilon^* (s) = (s - s_1)^{k_1} ... (s - s_\nu)^{k_\nu} \, \hat{\upsilon} (s) , \quad s \in S,$$

де $s_1, ..., s_\nu$ — всі дійсні корені многочленна υ^* кратності відповідно $k_1, ..., k_\nu$, що належать $[a, b]$, $\hat{\upsilon} \in P$, причому $\hat{\upsilon}$ зберігає знак на $[a, b]$.

Дійсно, якби многочлен $\hat{\upsilon}$ в різних точках $\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2 \in [a, b]$ набував значення з різними знаками, то існувала б точка $\tilde{s}_0 \in [a, b]$ така, що $\hat{\upsilon}$ ($\tilde{s}_0$) $= 0$. Це означає, що $\tilde{s}_0$ є дійсним коренем $\hat{\upsilon}$, відмінним від коренів $s_1, ..., s_\nu$, якщо $\tilde{s}_0 \neq s_i$, $i = \overline{1, \nu}$, або ж при $\tilde{s}_0 = s_{i_0}$, $i_0 \in \{1, 2, ..., \nu\}$, s_{i_0} є коренем кратності $k_{i_0} + 1$ многочлена υ^*, що суперечить нашому припущенню.

Припустимо, що $\hat{\upsilon} (s) > 0$ для всіх $s \in [a, b]$. Тоді, як і при доведенні теореми 3, переконуємось, що

$$u^* (s) = (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} ... (s - s_\nu)^{k_\nu} \, \hat{u} (s) , \quad s \in S,$$

причому $\hat{u} \in U$.

Для $\hat{u} \in U$, $\hat{\upsilon} \in V$ маємо, що для всіх $s \in S_{\upsilon^*}$

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\upsilon}(s)} = \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}.$$

Згідно з наслідком 9 екстремальний елемент для величини (2) в цьому випадку існує. Якщо ж $\hat{\upsilon}(s) < 0$ для всіх $s \in [a, b]$, то $(-\hat{\upsilon})(s) > 0$ для всіх $s \in [a, b]$. Тому $(-\hat{\upsilon}) \in V$. Зрозуміло, що $(-\hat{u}) \in U$. Для $(-\hat{u}) \in U$, $(-\hat{\upsilon}) \in V$ маємо, що для всіх $s \in S_{\upsilon^*}$

$$\frac{(-\hat{u})(s)}{(-\hat{\upsilon})(s)} = \frac{\hat{u}(s)}{\hat{\upsilon}(s)} = \frac{(s-s_1)^{k_1}(s-s_2)^{k_2}...(s-s_\nu)^{k_\nu}\hat{u}(s)}{(s-s_1)^{k_1}(s-s_2)^{k_2}...(s-s_\nu)^{k_\nu}\hat{\upsilon}(s)} = \frac{u^*(s)}{\upsilon^*(s)}.$$

Згідно з наслідком 9 екстремальний елемент для величини (2) існує і в цьому випадку. Теорему доведено.

1. *Гудима У.В.* Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1601–1619.

2. *Никольский М.С.*Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений // Докл. АН СССР. — 1989. — 308, № 5. — С. 1047-1050.

3. *Никольский М.С.* Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями // Вестник Московского ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.

4. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд–во Сарат. ун-та, 2000. — № 2. — С. 13–15.

5. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближения. Чебышевские приближения и их приложения. — М.: Наука, 1978. — 235 с.

6. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

7. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982. — 271 с.