Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 37-48

УДК 517.5

С. Б.Гембарська, К. М. Жигалло (Волин. держ. ун–т, Луцьк)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИКАХ*

Отримано точне значення верхньої межі відхилення бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H^1 в рівномірній та інтегральній метриках.

Через $L^1_{2\pi}$ і $C_{2\pi} = L^{\infty}_{2\pi}$ будемо позначати класи 2π-періодичних відповідно інтегровних та неперервних функцій з нормами

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \quad \|f\|_{\infty} = \max_{x\in R}|f(x)|.$$

Множину функцій $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, які задовольняють нерівність

$$\|f(x+t) - f(x)\|_p \leq |t|, \tag{1}$$

будемо позначати, як прийнято, через H^1_p і називати класом Гельдера. Якщо ж $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, і виконується нерівність

$$\|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\|_p \leq 2|t|,$$

то множину таких функцій позначають через H^2_p і називають класом квазігладких функцій [1].

Для 2π-періодичної сумовної функції f через $A_2(\rho)$, $0\leq\rho<1$,

---

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

© С. Б.Гембарська, К. М. Жигалло, 2007

будемо позначати (див., наприклад, [2]) бігармонійний інтеграл Пуассона:

$$A_2(\rho) = A_2(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x) P_\rho(t) dt,$$

де $P_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right) \rho^k \cos kt$ — бігармонійне ядро Пуассона. Покладемо $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta > 0$, і надалі бігармонійний інтеграл Пуассона будемо записувати у вигляді

$$A_{2,\delta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x) P_\delta(t) dt,$$

де $P_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt$, як і раніше, — бігармонійне ядро Пуассона.

В даній роботі вивчається поведінка величин

$$\mathcal{E}\left(H_p^\nu; A_{2,\delta}\right)_p = \sup_{f \in H_p^\nu} \left\| A_{2,\delta}(f, x) - f(x) \right\|_p, \tag{2}$$

коли $\delta \to \infty$, $\nu = 1, 2$, $p = 1, \infty$.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(H_p^\nu; \delta)$ така, що при $\delta \to \infty$, $p = 1, \infty$, та $\nu = 1, 2$,

$$\mathcal{E}\left(H_p^\nu; A_{2,\delta}\right)_p = \varphi(\delta) + o\left(\varphi(\delta)\right),$$

то, наслідуючи О.І. Степанця [3, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова—Нікольського для бігармонійного інтеграла Пуассона на класі H_p^ν, $\nu = 1, 2$, $p = 1, \infty$.

С. Канієв [4] для величини $\mathcal{E}\left(H_\infty^2; A_2(\rho)\right)$ при $\rho \to 1 - 0$ встановив таку асимптотичну рівність:

$$\mathcal{E}\left(H^2_\infty; A_2(\rho)\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho). \tag{3}$$

В роботі P.Pych [5] отримано такий результат:

$$\mathcal{E}\left(H^2_\infty; A_2(\rho)\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho}\right), \quad \rho \to 1-0. \tag{4}$$

При наближенні функцій класу H^2_∞ їх бігармонійними інтегралами Пуассона оцінки (3) і (4) дають можливість встановити першу асимптотичну константу (константу Колмогорова — Нікольського) (див. [6]). Пізніше в роботі Л.П. Фалалєєва [7] було отримано повні асимптотичні розклади для верхніх граней відхилення функцій із класу H^1_∞ від їх бігармонійного інтеграла Пуассона за степенями $1-\rho$, $\rho \to 1-0$, що дозволяє виписувати константу Колмогорова — Нікольського як завгодно високого порядку малості. Метою даної роботи є отримання точних значень верхньої межі відхилення бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H^ν_p, $p = 1,\infty$, $\nu = 1,2$, в рівномірній та інтегральній метриках.

Теорема. *При* $\delta \to \infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(H^1_p; A_{2,\delta}\right)_p = \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_\pi^\infty \frac{[t]_{2\pi}}{t^2}dt +$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\delta} - 2\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\right)\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\int\limits_\pi^\infty \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}}dt\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k-2} +$$

$$+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k} + \left(\frac{2}{\pi\delta} - \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\right)(\ln\delta + \ln\pi) +$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\delta}-\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}, \qquad (5)$$

де $p = 1, \infty$*, а символ* $[f(t)]_{2\pi}$ *означає парне* 2π*-періодичне продовження функції* $f(t)$*.*

Доведення. Покажемо спочатку справедливість рівності (5) для випадку $p = \infty$. Оскільки $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_\delta(t)dt = 1$, то

$$A_{2,\delta}(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t+x) - f(x)\right)P_\delta(t)dt.$$

Звідси, в силу (1), отримаємо оцінку:

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty; A_{2,\delta}\right)_\infty \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\,P_\delta(t)dt.$$

Крім того, можемо записати

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty; A_{2,\delta}\right)_\infty = \sup_{f\in H^1_\infty}\|A_{2,\delta}(f,0) - f(0)\|_\infty,$$

і оскільки в класі H^1_∞ існує функція періоду 2π, яка дорівнює $|t|$ на відрізку $[-\pi,\pi]$ і для якої попередня нерівність перетворюється в рівність, то

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty; A_{2,\delta}\right)_\infty = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}tP_\delta(t)dt. \qquad (6)$$

Нехай

$$\Phi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi_\delta(z) \cos zudz$$

— косинус-перетворення Фур'є функції

$$\varphi_\delta(z) = \left(1 + \frac{z}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos zt =$$

$$= e^{-\frac{z}{\delta}} \cos zt + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos zt = \varphi_{\delta_1}(z) + \varphi_{\delta_2}(z).$$

Аналогічно, як у роботі [8], можна показати, що косинус-перетворення Фур'є функції $\varphi_{\delta_1}(z)$ має вигляд:

$$\Phi_{\delta_1}(u) = \frac{\frac{1}{\delta}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t-u)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + (t+u)^2}\right]. \qquad (7)$$

Далі,

$$\Phi_{\delta_2}(u) = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t)dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t)dz \right). \qquad (8)$$

Двічі інтегруючи за частинами, знаходимо

$$F_1 = \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t)dz = \frac{1}{u+t} \left(- \int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \sin z(u+t)dz + \right.$$

$$+\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\sin z(u+t)dz\Bigg) = \frac{1}{u+t}\Bigg(\frac{1}{u+t}\Bigg[e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)|_0^\infty +$$

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz\Bigg] - \frac{1}{\delta}\frac{1}{u+t}\Bigg[ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)|_0^\infty -$$

$$-\int\limits_0^\infty\Bigg(e^{-\frac{z}{\delta}} - \frac{1}{\delta}ze^{-\frac{z}{\delta}}\Bigg)\cos z(u+t)dz\Bigg]\Bigg) = \frac{1}{u+t}\Bigg[-\frac{1}{u+t}+$$

$$+\frac{2}{\delta}\frac{1}{u+t}\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2+\left(\frac{1}{\delta}\right)^2} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\frac{1}{u+t}F_1\Bigg].$$

Звідси отримуємо, що

$$F_1 + \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{u+t}\right)^2 F_1 = -\frac{1}{(u+t)^2} + \frac{2}{\delta}\frac{1}{(u+t)^2}\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+u)^2}$$

або

$$F_1 = \frac{\frac{1}{\delta^2}-(u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u+t)^2\right)^2}. \tag{9}$$

Тоді інтеграл $F_2 = \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u-t)dz$ можна записати у вигляді:

$$F_2 = \int\limits_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u-t)dz = \frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(u-t)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(u-t)^2\right)^2}. \tag{10}$$

Враховуючи співвідношення (8)–(10), можемо записати, що

$$\Phi_{\delta_2}(u)=\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(u+t)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(u+t)^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(u-t)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(u-t)^2\right)^2}\right].$$

Звідси і з (7) випливає, що

$$\Phi_{\delta}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t-u)^2}+\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+u)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(t+u)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+u)^2\right)^2}+\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(t-u)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t-u)^2\right)^2}\right)\right]$$

Застосовуючи формулу підсумовування Пуассона (див., наприклад, [9, c.82]) отримуємо, що

$$P_{\delta}(t)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}\Phi_{\delta}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{\delta}(2\pi k)\right). \tag{11}$$

Враховуючи співвідношення (11), бігармонійний інтеграл Пуассона можемо записати у вигляді

$$A_{2,\delta}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left\{\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t-2\pi k)^2}+\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+2\pi k)^2}+\right.$$

$$+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(t+2\pi k)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t+2\pi k)^2\right)^2}+\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(t-2\pi k)^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+(t-2\pi k)^2\right)^2}\right)\Bigg]\Bigg\}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(t+x)]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}\right)dt, \quad (12)$$

де $[f(t+x)]_{2\pi}$— парне 2π-періодичне продовження функції $f(t+x)$ із $[-\pi,\pi]$ на всю числову вісь.

Повертаючись до рівності (6) із використанням (12), будемо мати:

$$\mathcal{E}\left(H^1_\infty;A_{2,\delta}\right)_\infty=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty[t]_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^\pi\frac{t}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_0^\pi t\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_\pi^\infty\frac{[t]_{2\pi}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_\pi^\infty[t]_{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)^2}dt=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4. \quad (13)$$

Знайдемо розклади інтегралів I_i, $i=\overline{1,4}$, за степенями $\frac{1}{\delta}$.

$$I_1=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^\pi\frac{t}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}dt=\frac{1}{\pi\delta}\int\limits_0^\pi\frac{d\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2\right)}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi\delta}\left(\ln\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+\pi^2\right)-\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right)=$$

$$= \frac{2}{\pi\delta}\left(\ln\delta + \ln\pi\right) + \frac{1}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}.$$

Розглянемо інтеграл I_2:

$$I_2 = \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt =$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt - \int\limits_0^{\pi}\frac{t^3}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt\right) =$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 I_2' - I_2''\right). \tag{14}$$

Далі,

$$I_2' = \int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+\pi^2} - \delta^2\right). \tag{15}$$

Здійснивши заміну змінної $x = \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2$, отримаємо

$$I_2'' = \int\limits_0^{\pi}\frac{t^3}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{\delta^2}}^{\frac{1}{\delta^2}+\pi^2}\frac{x - \frac{1}{\delta^2}}{x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{\delta^2}}^{\frac{1}{\delta^2}+\pi^2}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{\frac{1}{\delta^2}}^{\frac{1}{\delta^2}+\pi^2}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + \pi^2\right) - \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + \pi^2} - \delta^2\right)\right) =$$

$$= \ln\delta + \ln\pi + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+\pi^2} - \delta^2\right)\right). \quad (16)$$

Тоді, використовуючи (15) та (16), рівність (14) запишеться у вигляді:

$$I_2 = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(-\frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + \pi^2} - \delta^2\right) - \ln\delta - \ln\pi - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + \pi^2} - \delta^2\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{\frac{1}{\delta^2} + \pi^2} - \ln\delta - \ln\pi - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\right).$$

Оцінимо інтеграли I_3 та I_4. Очевидно, що

$$I_3 = \frac{2}{\pi\delta}\int_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2}dt = \frac{2}{\pi\delta}\int_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t}\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\delta t}\right)^2}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\delta^{2(k-1)}}\int_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}}dt;$$

$$I_4 = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}[t]_{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - t^2}{\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + t^2\right)^2}dt =$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{\delta^{2k}}\int_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{\delta^{2k-2}}\int_{\pi}^{\infty}\frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}}dt\right).$$

Підставляючи отримані оцінки для інтегралів I_i, $i = \overline{1,4}$ у співвідношення (13), отримуємо (5), де $p = \infty$. Справедливість рівності (5) у випадку $p = 1$ випливає із роботи [10], яка встановлює точні асимптотичні рівності між верхніми межами відхилень функцій з класу H_1^1 від їх бігармонійного інтеграла Пуассона в метриці $\|f\|_1$ і відповідними верхніми межами відхилень функцій з класу H_∞^1 в метриці $\|f\|_\infty$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Оскільки* $\mathcal{E}\left(H_p^1; A_{2,\delta}\right)_p = \mathcal{E}\left(H_p^2; A_{2,\delta}\right)_p$, $p = 1, \infty$ *(див.*[11]*), то величину* $\mathcal{E}\left(H_p^2; A_{2,\delta}\right)_p$ *можна подати у вигляді ряду, записаного в правій частині рівності* (5).

Наслідок 2. *При* $\delta \to \infty$ *мають місце асимптотичні рівності:*

$$\mathcal{E}\left(H_p^2; A_{2,\delta}\right)_p = \mathcal{E}\left(H_p^1; A_{2,\delta}\right)_p = \frac{2}{\pi\delta} + O\left(\frac{\ln\delta}{\delta^2}\right),$$

$$\mathcal{E}\left(H_p^2; A_{2,\delta}\right)_p = \mathcal{E}\left(H_p^1; A_{2,\delta}\right)_p = \frac{2}{\pi\delta} - \frac{4\ln\delta}{\pi\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Співвідношення (5) дає можливість знаходити послідовно константи Колмогорова-Нікольського як завгодно високого порядку малості. Відмітимо, що аналогічну теорему для випадку наближення функцій класу Гельдера H_p^1, $p = \infty$ сингулярними інтегралами Абеля–Пуассона отримано В. О. Баскаковим (див. [8]).

1. *Тиман А.Ф.* О квазигладких функциях// Изв. АН СССР. Математика. — 1951. — Т. 15, №3. — С. 243–254.
2. *Петров В.А.* Бигармонический интеграл Пуассона// Лит.мат. сб. - 1967. — Т. 7, №1. — С. 137–142.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: В 2-х ч.— Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч. I. — 427 с.

4. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 5. — С. 995–998.
5. *Pych P.* 5. On biharmonic function in unit disc// Ann. pol. math. — 1968. — Т. 20, № 3. — P. 203–213.
6. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962. — 127 с.
7. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла. //Теоремы вложения и их приложения: Материалы Всесоюзного симпозиума. — Алма–Ата: Наука КазССР, 1976. — С. 163–167.
8. *Баскаков В.А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля — Пуассона. — Мат. заметки. — 1975. — Т. 17, № 2. — С. 169–180.
9. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 460 с.
10. *Канієв С.* Точна оцінка відхилення в середньому бігармонічних в крузі функцій від їх граничних значень // Доповіді АН УРСР. — 1964. — № 5. — С. 451–454.
11. *Butzer P.L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation, 1. One-dimensional theory. – Basel; New York, 1971. — 553 p.