Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 376-389

УДК 517.5

**О. В. Федуник** (Волин. держ. ун–т, Луцьк)

# ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

*Одержано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q$ для деяких значень параметрів $p$ та $q$.*

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — простір $2\pi$-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені $p$ на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$||f||_p = ||f||_{L_p(\pi_d)} = \Big( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що функції $f$ належать підпростору

$$L_p^0(\pi_d) = \Big\{ f : \quad f \in L_p(\pi_d), \int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d} \Big\}.$$

За допомогою рівності

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

означимо $l$-ту різницю функції $f$ з кроком $h_j$ за змінною $x_j$.

Для $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ і $h = (h_1, \dots, h_d)$ введемо мішану $l$-ту різницю

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x))).$$

Означимо для $f \in L_p^0(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку $l$

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j, \\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta_h^l f(x)||_p \ .$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0, \ \ t_j > 0, \ \ j = \overline{1,d}; \quad \Omega(t) = 0, \ \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \Big( \prod\limits_{j=1}^{d} m_j \Big)^l \Omega(t), \ \ m_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1,d};$

4) $\Omega(t)$ — неперервна при $t_j \ge 0, \quad j = \overline{1,d}$ .

Нехай $\Omega(t)$ задовольняє також умови $(S)$, $(S_l)$, які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає таке.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову $(S)$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від $\tau_1$ і $\tau_2$ стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову $(S_l)$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від $\tau_1$ і $\tau_2$ стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови $(S)$ і $(S_l)$, якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній $t_j$ при фіксованих $t_i$, $i \neq j$ .

Зазначимо, що функції, які задовольняють сформульовані вище умови 1) — 4), $(S)$ та $(S_l)$ зокрема, можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot ... \cdot t_d^{r_d} \cdot \left(\log \frac{1}{t_1}\right)^{m_1} \cdot ... \cdot \left(\log \frac{1}{t_d}\right)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$ , $j = \overline{1,d}$ , а $m_j$, $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності $d$ простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то будемо позначати $\mu(n) \ll \nu(n)$ або $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

В подальшому в формулюванні отриманих результатів буде наявним порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $M, n \in \mathbb{N}$, яке будемо розуміти таким чином: існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Перейдемо до означення класів функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які були розглянуті в роботі [2].

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє умови 1) – 4), клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається в такий спосіб

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in L^0_p(\pi_d): \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \Big\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left( \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

Нехай $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$. Позначимо

$$\rho(s) = \left\{ \, k : \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d} \right\},$$

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$, $(k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

В [2] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє умови 1) – 4), $(S)$ і $(S_l)$ доведено, що

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} ||\delta_s(f,x)||_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{||\delta_s(f,x)||_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s})=\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_d})$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$.

Для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати представлення, аналогічні (1) і (2) для випадків $p=1$ і $p=\infty$, дещо змінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt+2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1-\frac{k-n}{n}\right)\cos kt.$$

Кожному вектору $s=(s_1,\ldots,s_d), s_j\in\mathbb{N}, j=\overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x)=\prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

і для $f\in L^0_p(\pi_d), 1\le p\le\infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x)=f(x)*A_s(x).$$

Тоді, як встановлено в [3], для кожного $1\le p\le\infty$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\asymp\left\{\sum_{s}\|A_s(f,x)\|_p^{\theta}\ \Omega(2^{-s})^{-\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}},\ 1\le\theta<\infty, \tag{3}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}}\asymp\sup_{s}\frac{\|A_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{4}$$

Зауважимо, що при $\theta=\infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають із розглянутими в [4] класами $H^{\Omega}_p$. У випадку $\Omega(t)=\prod\limits_{j=1}^{d}t_j^{r_j}$ норми функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з нормами функцій із класів $B^{r}_{p,\theta}$ [5].

Зазначимо, що в роботі будуть розглядатись класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку $l$ деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big), \tag{5}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє умови $(S)$ і $(S_l)$. Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (5) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку $l$, а також умови $(S)$ і $(S_l)$, а тому зберігаються наведені вище (1) — (4) зображення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

В даній роботі встановлюються точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$ для деяких значень параметрів $p$ та $q$. Нагадаємо, що поняття лінійного поперечника ввів В.М.Тихомиров [6]. Перейдемо до означення.

Нехай $W$ — множина в банаховому просторі $X$. Тоді лінійний поперечник множини $W$ в просторі $X$ (позначається $\lambda_M(W,X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(W,X) = \inf_{A} \sup_{f\in W} ||f - Af||_X, \tag{6}$$

де точна нижня межа береться по всіх діючих в $X$ лінійних операторах $A$, розмірність області значень яких не перевищує $M$.

Зазначимо, що лінійний поперечник $\lambda_M(W,X)$ пов'язаний із поперечником $d_M(W,X)$, введеним А.М.Колмогоровим [7], нерівністю

$$d_M(W,X) \le \lambda_M(W,X). \tag{7}$$

В даний час є велика кількість робіт, присвячених дослідженню лінійних поперечників тих чи інших класів функцій однієї та багатьох змінних. Тут згадаємо лише роботи Е.М.Галєєва [8, 9], де одержано оцінки величин (6) для класів функцій багатьох змінних $W^r_p$ і $H^r_p$, а також роботи А.С.Романюка [10, 11], в яких встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$. В названих роботах міститься досить детальна бібліографія.

Наведемо твердження, які будемо використовувати далі.

**Теорема A** (Літтлвуда–Пелі, див., наприклад, [12, с. 55]). *Нехай* $p \in (1, \infty)$. *Тоді існують додатні числа* $C_9$, $C_{10}$ *такі, що для кожної функції* $f \in L^0_p(\pi_d)$ *виконується співвідношення*

$$C_9 ||f||_p \le \left\| \Big( \sum_s |\delta_s(f;x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_{10} ||f||_p \ .$$

Покладемо

$$\overline{S}_n = \Big\{ s = (s_1, \ldots, s_d) : (s,1) = n, s_j - \text{парні числа}, j = \overline{1,d} \Big\},$$

$$\rho^+(s) = \Big\{ k = (k_1, \ldots, k_d) : 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \Big\},$$

$\overline{Q}_n = \bigcup\limits_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s)$, $|\overline{Q}_n|$ — кількість елементів множини $\overline{Q}_n$.

Для вектора $m = (m_1, \ldots, m_d)$ ($m_j$ — цілі невід'ємні числа, $j = \overline{1,d}$) через $RT(m)$ позначимо множину дійсних тригонометричних поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{\substack{|k_j| \le m_j, \\ j = \overline{1,d}}} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Далі, через $k^s$ позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}, & s_j \ge 2; \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1,d}, \end{cases}$$

і
$$T(\overline{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in \overline{S}_n} t_s(x) e^{i(k^s, x)}, t_s \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для $g \in T(\overline{Q}_n)$ покладемо
$$\overline{\delta}_s(g, x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}.$$

При таких позначеннях має місце таке твердження.

**Лема** [13]. *Нехай $M \le \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$. Тоді для довільного простору $\Phi \in L_1(\pi_d)$, розмірність якого не перевищує $M$, знайдеться функція $g \in T(\overline{Q}_n)$ така, що*
$$||\overline{\delta}_s(g, x)||_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \ s \in \overline{S}_n,$$
$$||g||_2 \ge C_{11} > 0,$$
*і для будь-якого $\varphi \in \Phi$ виконується умова $(g, \varphi) = 0$.*

Перейдемо до одержаних результатів.

**Теорема.** *Нехай $1 \le q < 2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову $(S)$ з деяким $\alpha > 0$ і умову $(S_l)$. Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*
$$\lambda_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}. \tag{8}$$

***Доведення.*** Оцінка зверху в (8) випливає із відомих результатів. Дійсно, нехай $M$ — задане. Підберемо $n$ із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Для $1 < q < 2 \le p < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$, розглянемо наближення класу $B^\Omega_{p,\theta}$ у метриці $L_q(\pi_d)$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f, x)$, де $Q_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s)$ — "східчастий гіперболічний хрест".

Тоді, використовуючи встановлене в [14] співвідношення

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(x)-S_{Q_n}(f,x)\|_q \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$$

та нерівність

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q) \ll \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(x)-S_{Q_n}(f,x)\|_q, \quad M\asymp 2^n n^{d-1},$$

одержуємо шукану оцінку зверху для $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)$. У випадку $q=1$ або $p=\infty$ проведемо аналогічні до наведених вище міркування, додатково використавши нерівність $||\cdot||_1\le||\cdot||_q$, $1<q<2$ , або включення $B^{\Omega}_{\infty,\theta}\subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $2\le p<\infty$.

Встановимо тепер в (8) оцінку знизу. Для $1<q<2\le p<\infty$, $2\le\theta\le\infty$ ця оцінка, внаслідок нерівності (7), випливає з відомої оцінки колмогоровського поперечника

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)\asymp\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}, \quad M\asymp 2^n n^{d-1},$$

встановленої в [14]. Як зазначалось вище, має місце включення $B^{\Omega}_{\infty,\theta}\subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $2\le p<\infty$, а також нерівність $||\cdot||_1\le||\cdot||_q$, $1<q<2$. Тому, згідно з означенням лінійного поперечника, виконується нерівність $\lambda_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta},L_1)\le\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)$. Таким чином, достатньо відповідним чином оцінити знизу $\lambda_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta},L_1)$.

Отже, нехай $M$ — задане. Підберемо парне $n$ із умови $|\overline{Q}_{n-2}|<4M\le|\overline{Q}_n|$. Розглянемо деякий лінійний оператор $G$, який діє з $L_\infty$ в $L_1$, розмірність області значень якого не перевищує $M$. Тоді $\dim G(T(\overline{Q}_n))\le M$, і оскільки $M\le\frac{|\overline{Q}_n|}{4}$, то розмірність простору $\Psi\subset T(\overline{Q}_n)$ такого, що $G(\Psi)=0$, буде більшою ніж $M$. Крім того, внаслідок сформульованої вище леми, знайдеться функція $g\in\Psi$ така, що

$$||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty\le|\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}},\ s\in\overline{S}_n,$$

і

$$||g||_2 \geq C_{11} > 0.$$

Нехай $2 \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} g(x),\ C_{12} > 0,$$

і оцінимо $||f_1||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Використовуючи представлення (3) норми функції з класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, для $f_1$ маємо

$$||f_1||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{s} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f_1,x)||_{\infty}^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||\overline{\delta}_s(g,x)||_{\infty}^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1}(2^{-n})\left(\sum_{s\in\overline{S}_n} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Із одержаного робимо висновок, що функція $f_1$ із відповідною сталою $C_{12} > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Тепер оцінимо $\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1$. Зазначимо, що оскільки $g \in \Psi$ і $G(\Psi) = 0$, то

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 = ||g||_1. \tag{9}$$

Для того, щоб оцінити знизу $||g||_1$, скористаємось нерівністю [15, т. 1, с. 330]

$$||g||_2 \leq ||g||_1^{\frac{1}{3}} ||g||_4^{\frac{2}{3}},$$

внаслідок якої

$$||g||_1 \geq ||g||_2^3 ||g||_4^{-2}. \tag{10}$$

Оскільки внаслідок леми $||g||_2 \geq C_{11} > 0$, то для одержання шуканої оцінки знизу для $||g||_1$ залишається відповідним чином оцінити знизу $||g||_4^{-2}$. Взявши до уваги те, що $g \in \Psi \subset T(\overline{Q}_n)$, і використовуючи теорему Літтлвуда–Пелі і нерівність Мінковського, будемо мати

$$0 < ||g||_4 \ll \left\| \left( \sum_{s \in \overline{S}_n} |\overline{\delta}_s(g,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_4 \ll$$

$$\ll \left( \sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g,x)\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{s \in \overline{S}_n} ||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \ll |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Звідси $||g||_4^{-1} \geq C_{13}$, а тому, враховуючи (10), отримуємо оцінку

$$||g||_1 \geq C_{14}. \tag{11}$$

Отже, із (9) і (11) випливає

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 \geq C_{14},$$

і, внаслідок вибору функції $f_1$, одержуємо шукану оцінку знизу для випадку $2 \leq \theta < \infty$

$$\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1 = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

При $\theta = \infty$ розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_{15}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} g(x), \quad C_{15} > 0.$$

Використовуючи зображення (4) норми функції з класу $B^{\Omega}_{\infty,\infty}$, для $f_2$ маємо

$$||f_2||_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||A_s(f_2,x)||_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} \sup_{s\in\overline{S}_n} \frac{||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}}\omega^{-1}(2^{-n})|\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} = 1.$$

Отже, приходимо до висновку, що функція $f_2$ із відповідною сталою $C_{15} > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\infty}$. Використовуючи ті ж самі міркування, що і вище, одержуємо оцінку знизу при $\theta = \infty$:

$$\|f_2(x) - Gf_2(x)\|_1 = C_{13}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Теорема доведена.

**Наслідок.** При $\theta = \infty$ із доведеної теореми випливає оцінка

$$\lambda_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

***Зауваження 1.*** Якщо $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1 \le q < 2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta \le \infty$ і $\alpha = r_1 > 0$, то має місце співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1}\Big(\log^{d-1} M\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}},$$

встановлене А.С.Романюком [11].

***Зауваження 2.*** Із доведеної теореми випливає, що при $1 < q < 2 \le p < \infty$ має місце порядкова рівність

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d_M(B^{\Omega}_{p,\theta} L_q), \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

В теоремі знайдено точні за порядком оцінки лінійних поперечників і для випадків, коли $p = \infty$, $1 < q < 2$ і $q = 1$, $2 \leq p \leq \infty$. При таких значеннях пераметрів $p$ та $q$ точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів для $B^{\Omega}_{p,\theta}$ не відомі.

Отримані оцінки лінійних поперечників доповнюють результати робіт [16, 17].


1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956.— Т. 5.— С. 483–522.
2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— Т. 219.— С. 356–377.
3. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006.— Т. 58, № 5.— С. 692–704.
4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math.— 1994.— Т. 20.— С. 35–48.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова.— 1989.— Т. 187.— С. 143–161.
6. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 81–120.
7. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annaherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. — 1936. — V. 37. — C. 107–111.
8. *Галеев Э.М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1987. — № 4. — С. 13–16.
9. *Галеев Э.М.* Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 2. — С. 189–199.

10. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 5. — С. 647–661.

11. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 6. — С. 820–829.

12. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 456 с.

13. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— Т. 189.— С. 138–168.

14. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2004.— Т. 56, № 11.— С. 1557–1568.

15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т 1. — 615 с; Т2. — 537 с.

16. *Федуник О.В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $L_q$ // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін–ту математики НАН України.— 2004. — Т. 1, № 1. — С. 375–388.

17. *Федуник О.В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006. — Т. 58, № 1. — С. 93–104.