Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 352-375

УДК 517.5

М. П. Тіман, О. Б. Шаврова
(Дніпропетр. держ. аграр. ун–т, Дніпропетровськ)

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ТИПУ МАРЦИНКЕВІЧА ДЛЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ПРОСТОРАХ S_m^p ТА L_p^m

В статті розглянуто питання про наближення періодичних функцій багатьох змінних з просторів S_m^p та L_p^m за допомогою лінійних операторів, що відображають так звані оператори типу Марцинкевіча, які вважаються найбільш економними методами підсумовування кратних рядів Фур'є. При цьому встановлено оцінки наближення таких функцій в розглянутих просторах за допомогою найкращих наближень тригонометричними поліномами багатьох змінних.

Нехай $f(x_1, ..., x_m)$ — 2π-періодичні по кожній змінній інтегровні по Лебегу на кубі періодів $[0,\, 2\pi]^m = G^m$ функції, які мають ряд Фур'є вигляду:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} A_{n_1,...,n_m}(x_1, ..., x_m), \tag{1}$$

де

$$A_{n_1,...,n_m}(x_1, ...,x_m)=\mu_{n_1,...,n_m} \sum_{\nu_1=1}^{2} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{2} a_{n_1,...,n_m}^{(\nu_1,...,\nu_m)} \prod_{i=1}^{m} \gamma_{\nu_i}(n_i x_i),$$

$\mu_{n_1,...,n_m} = 2^{-l}$ (l — число індексів n_ν, які дорівнюють нулю),

$$a_{n_1,...,n_m}^{(\nu_1,...,\nu_m)} = \frac{1}{\pi^{(m-l)}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x_1, ..., x_m) \prod_{i=1}^{m} \gamma_{\nu_i}(n_i x_i)\, dx_i,$$

$$\gamma_i(n\,x) = \begin{cases} \cos nx, & i = 1, \\ \sin nx, & i = 2. \end{cases}$$

Крім цього, введемо позначення

$$\rho_{n_1,\dots,n_m} = \sqrt{\mu_{n_1,\dots,n_m} \sum_{\nu_1=1}^{2} \cdots \sum_{\nu_m=1}^{2} \left(a_{n_1,\dots,n_m}^{(\nu_1,\dots,\nu_m)}\right)^2}.$$

Простір S_m^p — це сукупність функцій $f(x_1, ..., x_m)$, для яких при заданому p, $1 \le p < \infty$, ряд $\left\{ \sum\limits_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum\limits_{n_m=0}^{\infty} \rho_{n_1,\dots,n_m}^p \right\}$ збігається. За норму функції $f(x_1, ..., x_m)$ в цьому просторі приймають величину

$$\|f\|_{S_m^p} = \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \rho_{n_1,\dots,n_m}^p \right\}^{1/p}.$$

Слід відмітити, що деякі апроксимативні задачі для просторів S_m^p досліджено О.І.Степанцем (див. [6, 7]).

Для функції багатьох змінних розглядаємо лінійні оператори типу Марцинкевіча. Такі оператори будуються таким чином.

За допомогою довільної трикутної матриці чисел $\{\lambda_\nu(r)\}$ $(\nu = 0, 1, 2, ..., r; \lambda_0(r) = 1; \lambda_\nu(r) = 0$, коли $\nu > r)$ розглядається лінійний оператор вигляду:

$$U(f; x_1, ..., x_m; \lambda_\nu(r)) = \sum_{\nu=0}^{r} (\lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r)) S_{\nu,\dots,\nu}(f; x_1, ..., x_m), \tag{2}$$

де

$$S_{\nu,\dots,\nu}(f; x_1, ..., x_m) = \sum_{n_1=0}^{\nu} ... \sum_{n_m}^{\nu} A_{n_1,\dots,n_m}(x_1, ...x_m)$$

— частинні суми ряду (1) порядку ν, $\nu = 0, 1, 2, ...$, по кожній зі змінних x_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Для випадку нескінченної матриці $\{\lambda_\nu(r)\}$, $\nu = 0, 1, 2, ...$; $\lambda_0(r) = 1$, в якій r приймає значення з деякої множини дійсних чисел, такий оператор має вигляд:

$$U(f; x_1, ..., x_m; \lambda_\nu(r)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r)) S_{\nu,...,\nu}(f; x_1, ..., x_m). \tag{3}$$

Вважаємо, що при кожному r ряд в правій частині (3) збігається.

Оператори вигляду (2) та (3) в просторах L_p^2 для функцій двох змінних вперше розглядались в роботі Marcinkiewicz J. ([2], $m = 2$, $p = \infty$), а далі — в роботах Жижиашвілі Л.В. [1], Taberski R. ([8], $p = m = 2$), Тіман М.П. [9].

Для таких операторів Марцинкевіча в просторах S_m^p мають місце наступні твердження.

Теорема 1. *Якщо* $f \in S_m^p, 1 \le p < \infty$, *то має місце оцінка*

$$R^p(f; \lambda_\nu(r))_{S_m^p} = ||f(x_1, ..., x_m) - U(f; x_1, ..., x_m; \lambda_\nu(r))||_{S_m^p}^p \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{r} \left((1 - \lambda_{\nu+1}(r))^p - (1 - \lambda_\nu(r))^p\right) E_{\nu,...,\nu}^p(f)_{S_m^p} + E_{r,...,r}^p(f)_{S_m^p}, \tag{4}$$

де $E_{\nu,...,\nu}(f)_{S_m^p} = ||f(x_1, ..., x_m) - S_{\nu,...,\nu}(f; x_1, ..., x_m)||_{S_m^p}$ — *повне найкраще наближення порядку* ν *по кожній зі змінних функції* f *тригонометричними поліномами порядку* ν *по кожній зі змінних в метриці простору* S_m^p, а $\{\lambda_\nu(r)\}$, $\nu = 0, 1, 2, ..., r$; $\lambda_0(r) = 1; \lambda_\nu(r) = 0$, коли $\nu > r$, *монотонно спадає.*

Теорема 2. *Якщо $f(x) \in S^p_m$, а $\{\lambda_\nu(r)\}$ — нескінченна матриця чисел, то для лінійних операторів* (3) *справедлива оцінка*

$$R^p(f;\lambda_\nu(r))_{S^p_m} = ||f(x_1,...,x_m) - U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))||^p_{S^p_m} \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(|1-\lambda_{\nu+1}(r)|^p - |1-\lambda_\nu(r)|^p\right) E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m}, \qquad (5)$$

$\{\lambda_\nu(r)\},\ \nu = 0,1,2,...; \lambda_0(r) = 1$, *монотонно спадає.*

З теорем 1 та 2 випливають такі наслідки.

Теорема 3. *Якщо $f \in S^p_m$, $1 \leq p < \infty$, а система чисел $\{\lambda_\nu(r)\}$ така, що $\lambda_\nu(r) = 1 - \frac{\nu^k}{(r+1)^k}$, $\nu = 0,1,2,...,r;\ r = 1,2,...;$ і $\lambda_\nu(r) = 0$ для $\nu \geq r+1$. Тоді*

$$R^p(f;\lambda_\nu(r))_{S^p_m} = ||f(x_1,...,x_m) - U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))||^p_{S^p_m},$$

$$||U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r)) - f(x_1,...,x_m)||^p_{S^p_m} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt[p]{pk}}{(r+1)^{p\,k}} \sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{p\,k-1} E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m}, \qquad (6)$$

де $k \geq 1$ — ціле число, а

$$E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m} = ||f(x_1,...,x_m) - S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m)||^p_{S^p_m}.$$

Теорема 4. *Нехай $\lambda_\nu(r) = \cos\frac{\nu\pi}{2r+1}$, $\nu = 0,1,2,...,r;$ $r = 1,2,...;\ \lambda_\nu(r) = 0,\ \nu > r$. Тоді*

$$R^p(f,\lambda_\nu(r))_{S^p_m} \leq \frac{p\cdot\pi^{2p}}{2^{p-1}\cdot(2r+1)^{2p}} \sum_{\nu=1}^{r+1} \nu^{2p-1} E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m}. \qquad (7)$$

Теорема 5. *Якщо* $f \in S^p_m,\ 1 \le p < \infty$, *а система чисел* $\{\lambda_\nu(r)\}$ *така, що* $\lambda_\nu(r) = r^\nu,\ \nu = 0, 1, 2, ...;\ 0 < r < 1$, *то*

$$||U(f; x_1, ..., x_m; \lambda_\nu(r)) - f(x_1, ..., x_m)||^p_{S^p_m} \le$$

$$\le p(1-r)^p \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \nu^{p-1} E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m}. \qquad (8)$$

Зауважимо, що в усіх твердженнях присутні величини $E^p_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{S^p_m}$, коли $n_1 = n_2 = ... = n_m = \nu$, які характеризують повні найкращі наближення функції $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ порядку $n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, тригонометричними поліномами порядку $\le n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, відповідно по кожній зі змінних $x_i,\ i = 1, 2, ..., m$.

В роботі О.І.Степанця (див. [6]) доведено, що величину $E^p_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{S^p_m}$ здійснюють частинні суми Фур'є $S_{n_1,n_2,...,n_m}(f; x_1, x_2, ..., x_m)$, тобто

$$E_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{S^p_m} = ||f(x_1, ..., x_m) - S_{n_1,n_2,...,n_m}(f; x_1, ..., x_m)||_{S^p_m}.$$

Крім повних найкращих наближень функції $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в просторі S^p_m розглянемо також так звані частинні найкращі наближення цієї функції порядку $n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, відповідно по кожній зі змінних $x_i,\ i = 1, 2, ..., m$, в просторі S^p_m, які мають вигляд:

$$E^{(i)}_{n_i,\infty}(f)_{S^p_m} = \|f(x_1, ..., x_i, ..., x_m) - S_{n_i}(f; x_1, ..., x_i, ..., x_m)\|_{S^p_m},$$

де $S_{n_i}(f; x_1, ..., x_i, ..., x_m)$ — сума Фур'є порядку $n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, функції $f(x_1, ..., x_m)$ лише по змінній $x_i,\ i = 1, 2, ..., m$.

Неважко показати, що із означення норми в просторі S^p_m випливає нерівність

$$E_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{S^p_m} \le \sum_{i=1}^{m} E^{(i)}_{n_i,\infty}(f)_{S^p_m}.$$

Для функції двох змінних в просторі S_2^p ця нерівність має вигляд

$$E_{n_1,n_2}(f)_{S_2^p} \leq E^{(1)}_{n_1,\infty}(f)_{S_2^p} + E^{(2)}_{n_2,\infty}(f)_{S_2^p}.$$

Оскільки за рівністю Парсеваля простори S_2^2 співпадають з просторами L_2^2, ця нерівність є нерівністю, яку вперше вказав С.Н. Бернштейн для просторів L_2^2. З другого боку, при кожному $i = 1, 2, ..., m$ має місце також така нерівність:

$$E^{(i)}_{n_i,\infty}(f)_{S_m^p} \leq E_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{S_m^p}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Доведення теореми **1.** Безпосередньо перевіряється, що для двох довільних послідовностей $\{A_n\}$ та $\{B_n\}$ й цілих $m,\ n,\ m < n$, справедлива відома рівність

$$\sum_{\nu=m}^{n} A_\nu(B_\nu - B_{\nu+1}) = A_m B_m + \sum_{\nu=m+1}^{n} B_\nu(A_\nu - A_{\nu-1}) - A_n B_{n+1}.$$

При $m = 0$ ця рівність має вигляд

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(B_\nu - B_{\nu+1}) = A_0 B_0 + \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu(A_\nu - A_{\nu-1}) - A_n B_{n+1}. \quad (A)$$

Завдяки цій рівності, коли $B_\nu = \lambda_\nu(r)$, $A_\nu = S_{\nu,...,\nu}$ одержуємо, що

$$U(f; x_1, ..., x_m; \lambda_\nu(r)) = \sum_{\nu=0}^{r} (\lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r)) S_{\nu,...,\nu}(f; x_1, ..., x_m) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu(r)(S_{\nu,...,\nu}(f; x_1, ..., x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f; x_1, ..., x_m)).$$

Далі, із означення норми в просторі S_m^p, випливає рівність:

$$||S_{\nu,...,\nu}(f; x_1, ..., x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f; x_1, ..., x_m)||^p_{S_m^p} =$$

$$= E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m} - E^p_{\nu+1,...,\nu+1}(f)_{S^p_m}, \qquad (B)$$

таким чином,

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{S^p_m} = ||\sum_{\nu=1}^{r}(1-\lambda_\nu(r))\times$$

$$\times(S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m))+$$

$$+(f;x_1,...,x_m) - S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_m))||_{S^p_m}.$$

Далі, за допомогою нерівності Мінковського одержуємо, що

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{S^p_m} \le ||\sum_{\nu=1}^{r}(1-\lambda_\nu(r))\times$$

$$\times(S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m))||_{S^p_m}+$$

$$+||f(x_1,...,x_m) - S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_m))||_{S^p_m} = Q_1 + Q_2.$$

Оскільки частинні суми Фур'є в просторі S^p_m здійснюють найкраще наближення функцій$f(x)$ в метриці цього простору, то

$$Q_2 = E_{r,...,r}(f)_{S^p_m}.$$

Дамо оцінку величині Q_1. За допомогою (B) знаходимо, що

$$Q_1^p \le \sum_{\nu=0}^{r}|1-\lambda_\nu(r)|^p(E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m} - E^p_{\nu+1,...,\nu+1}(f)_{S^p_m}).$$

Використовуючи рівність (A), коли $A_\nu = |1-\lambda_\nu(r)|^p$ та $B_\nu = = E^p_{\nu,...,\nu}$, отримуємо, що

$$Q_1^p \le \sum_{\nu=0}^{r}((1-\lambda_{\nu+1}(r))^p - (1-\lambda_\nu(r))^p)\ E^p_{\nu,...,\nu}(f)_{S^p_m}.$$

За допомогою оцінок для Q_1 та Q_2 одержуємо нерівність (4), тобто твердження теореми 1.

Доведення теореми 2. Повторюючи метод доведення теореми 1, скористаємось також рівністю

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(B_\nu - B_{\nu+1}) = A_0B_0 + \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu(A_\nu - A_{\nu-1}) - A_nB_{n+1}.$$

У випадку, коли величина A_n обмежена, а B_{n+1} прямує до нуля, коли $n \to \infty$, замість цієї рівності маємо:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(B_\nu - B_{\nu+1}) = A_0B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(A_\nu - A_{\nu-1}).$$

З цієї рівності для випадку, коли $A_\nu = |1 - \lambda_\nu(r)|^p$, а $B_\nu = E^p_{\nu,\ldots,\nu}$, знаходимо, що

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |1 - \lambda_\nu(r)|^p (E^p_{\nu,\ldots,\nu}(f)_{S^p_m} - E^p_{\nu+1,\ldots,\nu+1}(f)_{S^p_m}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} ((1 - \lambda_{\nu+1}(r))^p - (1 - \lambda_\nu(r))^p)\, E^p_{\nu,\ldots,\nu}(f)_{S^p_m}.$$

За допомогою останньої рівності одержуємо оцінку 5, тобто твердження теореми 2.

Щоб одержати твердження теореми 3, тобто нерівність (6), треба лише скористатись оцінкою

$$(1 - \lambda_{\nu+1}(r))^p - (1 - \lambda_\nu(r))^p \le \frac{kp}{(r+1)^{kp}}(\nu+1)^{kp-1},$$

де $\lambda_\nu(r) = \begin{cases} 1 - \frac{\nu^k}{(r+1)^k}, & \nu = 0, 1, 2, ..., r,\ k \ge 2; \\ 0, & \nu > r. \end{cases}$

Теорема 4 випливає з теореми 1, якщо врахувати таку оцінку

$$(1-\lambda_{\nu+1}(r))^p - (1-\lambda_\nu(r))^p =\leq \frac{p\pi^{2p}}{2^{p-1}(r+1)^p},$$

коли

$$\lambda_\nu(r) = \begin{cases} \cos\frac{\nu\pi}{2r+1}, & \nu = 0, 1, 2, ..., r; \\ 0, & \nu > r. \end{cases}$$

Теорема 5 випливає з теореми 2, якщо використати таку оцінку

$$(1-r^\nu)^p - (1-r^{\nu+1})^p \leq p(1-r)^p r^\nu (\nu+1)^{p-1},$$

де $0 < r < 1,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$

Для одержання останньої оцінки розглянемо функцію $g(x) = x^p$. Нехай тепер $x_1 = 1 - r^\nu$, а $x_2 = 1 - r^{\nu+1}$. Тоді

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (1-r^{\nu+1}) - (1-r^\nu) = r^\nu(1-r),$$

а

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) = x_2^p - x_1^p = p\ (x_1 + \Delta x)^{p-1}\Delta x = \\ = p\ [(1-r^\nu) + \theta\ r^\nu(1-r)]^{p-1} r^\nu (1-r) = \\ = p\ (1-r)^p [1 + r + r^2 + ... + r^{\nu-1} + \theta\ r^\nu]^{p-1} r^\nu, \end{aligned}$$

де $0 < \theta < 1$.

З цієї рівності випливає, що

$$g(x_2) - g(x_1) = \ [(1-r^{\nu+1})^p - (1-r^\nu)]^p \leq p(1-r)^p r^\nu (\nu+1)^{p-1}.$$

Вкажемо один з важливих наслідків з теореми 3.

Наслідок 1. *Нехай функція* $f(x_1, ..., x_m) \in S_m^p$ *, а система чисел* $\{\lambda_\nu(r)\}$ *задовольняє умови теореми* 3. *Тоді, якщо послідовність повних найкращих наближень функції* f *в метриці простору* S_m^p *має такий порядок прямування до нуля*

$$E_{r,...,r}(f)_{S_m^p} = O\left\{\frac{1}{(r+1)^\alpha}\right\}, \quad \alpha > 0,$$

то

$$R^p(f;\lambda_\nu(r))_{S_m^p} = O\begin{cases} \frac{1}{(r+1)^{\alpha p}}, & \alpha < k; \\ \frac{1}{(r+1)^{kp}}(\ln\frac{1}{r+1}), & \alpha = k; \\ \frac{1}{(r+1)^{kp}}, & \alpha > k. \end{cases}$$

Наслідки аналогічного характеру випливають також з відповідних теорем 4 і 5.

Для порівняння оцінок, вказаних вище для просторів S_m^p, з оцінками аналогічного характеру в просторах L_p^m, наводяться відповідні твердження.

Простором L_p^m, як відомо, називають сукупність функцій, які задані на множині $G^m = [0, 2\pi]^m$ і для яких виконується нерівність

$$\int\limits_{G^m} |f(x_1, ..., x_m)|^p \prod_{\nu=1}^{m} dx_\nu < \infty.$$

За норму функції $f \in L_p^m,\ 1 \le p < \infty$, приймають величину

$$\left\|f(x_1, ..., x_m)\right\|_{L_p^m} = \left(\int\limits_{G^m} |f(x_1, ..., x_m)|^p \prod_{\nu=1}^{m} dx_\nu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

За рівністю Парсеваля при $p = 2$, простір L_2^m співпадає з простором S_m^2.

Для просторів L_p^m при довільному p справедливі такі твердження.

Теорема 6. *Нехай* $f(x) \in L_p^m,\ 1 < p < \infty$, *а оператор Марцинкевіча має вигляд*

$$U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r)) = \sum_{\nu=0}^{r}(\lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r))S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu(r)(S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m)),$$

в якому

$$\lambda_\nu(r)=\begin{cases}1-\frac{\nu^k}{(r+1)^k}, & \nu=0,1,2,...,r;\\ 0, & \nu>r.\end{cases}$$

Тоді має місце оцінка

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m}=||f(x_1,...,x_m)-U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))||_{L_p^m}\le$$

$$\le\frac{M(p,k)}{(r+1)^k}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(\nu+1)^{\gamma\,k-1}E^{\gamma}_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\qquad(9)$$

де $\gamma=\min(2,p),M(p,k)$ *— константа, яка не залежить від* r *та* f.

Теорема 7. *Нехай* $\lambda_\nu(r)=\cos\frac{\nu\,\pi}{2r+1}$, $\nu=0,1,2,...,r$; $r=1,2,...$; $\lambda_\nu(r)=0$, $\nu>r$. *Тоді*

$$R(f,\lambda_\nu(r))_{L_p^m}\le\frac{M_p}{(r+1)^2}\left(\sum_{\nu=0}^{r}\nu^{2\gamma-1}E^{\gamma}_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\qquad(10)$$

де γ=$\min(2,p),M_p$*— константа, яка не залежить від* r *та* f.

Теорема 8. *Нехай* $f\in L_p^m$, $1<p<\infty$, *а система чисел* $\{\lambda_\nu(r)\}$ *така, що* $\lambda_\nu(r)=r^\nu$ $\nu=0,1,2,...;$ $0<r<1$. *Тоді*

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m}=||U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))-f(x_1,...,x_m)||_{L_p^m}\le$$

$$\le M_p'(1-r)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu\nu^{\gamma-1}E^{\gamma}_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де γ=$\min(2,p),M_p'$*— константа, яка не залежить від* r *та* f.

Зауважимо, що в усіх твердженнях наявні величини $E^p_{n_1,n_2,...,n_m}(f)_{L_p^m}$,коли $n_1=n_2=...=n_m=\nu$, які характеризують повні найкращі наближення функції $f(x_1,x_2,...,x_m)$

порядку $n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, тригонометричними поліномами порядку $\le n_i,\ i = 1, 2, ..., m$, відповідно по кожній зі змінних $x_i,\ i = 1, 2, ..., m$, в метриці L_p^m.

Для доведення вказаних теорем нам буде потрібна теорема Марцинкевіча про мультиплікатори (див. [4], с. 67) .

Теорема Марцинкевіча. *Нехай задана m-кратна послідовність чисел* $\{\lambda_{k_1,k_2,...,k_m}\}$, *яка задовольняє умови*

$$|\lambda_{k_1,k_2,...,k_m}| \le M, \sum_{\nu_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} ... \sum_{\nu_l=2^{k_l-1}}^{2^{k_l}-1} |\Delta_{\nu_1}...\Delta_{\nu_l}\lambda_{\nu_1,\nu_2,...,\nu_m}| \le M, \tag{11}$$

де $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_l, 1 \le \nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_l \le m$, *— будь-який набір чисел, M — константа, яка не залежить від чисел* $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_l$ *та* $k_1, k_2, ..., k_l$, $\Delta_j\lambda_{\nu_1,...,\nu_j,...,\nu_m} = \lambda_{\nu_1,...,\nu_j,...,\nu_m} - \lambda_{\nu_1,...,\nu_{j+1},...,\nu_m}$. *Нехай функція* $f(x_1, ..., x_m)$ *має ряд Фур'є вигляду* (3). *Тоді ряд*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \lambda_{n_1,n_2,...,n_m} A_{n_1,...,n_m}(x_1, ..., x_m)$$

є рядом Фур'є деякої функції $F(x_1, ..., x_m)$, *яка належить простору* L_p^m, *та справедлива нерівність*

$$||F(x_1, ..., x_m)||_{L_p^m} \le M_p ||f(x_1, ..., x_m)||_{L_p^m}.$$

Доведення теореми 6. Відомо, що частинні суми $S_{\nu,...,\nu}(f)$ ряду Фур'є функції f в метриці L_p^m, $1 < p < \infty$, здійснюють за порядком найкращі наближення функції f тригонометричними поліномами порядку ν по кожній зі змінних, тобто справедлива нерівність

$$||f - S_{\nu,...,\nu}(f))||_{L_p^m} \le C_p E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m}, \quad 1 < p < \infty.$$

Враховуючи останнє, одержуємо, що

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m}=||(f-S_{r,\dots,r}(f))+(S_{r,\dots,r}(f)-U(f;\lambda_\nu(r)))||_{L_p^m}\le$$
$$\le ||f-S_{r,\dots,r}(f)||_{L_p^m}+||S_{r,\dots,r}(f)-U(f;\lambda_\nu(r))||_{L_p^m}\le$$
$$\le R(S_{r,\dots,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m}+C_pE_{r,\dots,r}(f)_{L_p^m}. \qquad (12)$$

Далі скористаємось рівністю для вказаних в теоремі $\lambda_\nu(r)$

$$R(S_{r,\dots,r};x_1,\dots,x_m;\lambda_\nu(r))=$$
$$=S_{r,\dots,r}(f;x_1,\dots,x_m)-U(S_{r,\dots,r};x_1,\dots,x_m;\lambda_\nu(r))=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{r}(1-\lambda_\nu(r))(S_{\nu,\dots,\nu}(f;x_1,\dots,x_m)-S_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f;x_1,\dots,x_m))=$$
$$=\frac{1}{(r+1)^k}\sum_{\nu=1}^{r}\nu^k(S_{\nu,\dots,\nu}-S_{\nu-1,\dots,\nu-1}).$$

З цієї рівності випливає, що

$$R(S_{r,\dots,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m}=\frac{1}{(r+1)^k}\Big\|\sum_{\nu=1}^{r}\nu^k(S_{\nu,\dots,\nu}-S_{\nu-1,\dots,\nu-1})\Big\|_{L_p^m}.$$

Далі, розглянемо систему чисел

$$\left\{\gamma^{(\mu)}_{n_1,\dots,n_m}=\frac{n_\mu^k}{n_1^k+n_2^k+\dots+n_m^k}\right\},\ \mu=1,2,\dots,m.$$

Ця система чисел задовольняє умови теореми Марцинкевіча. Таким чином, вона є системою мультиплікаторів для простору $L_p^m,\ 1<p<\infty$. Оскільки

$$\frac{1}{(r+1)^k}\sum_{\nu=1}^{r}\nu^k(S_{\nu,\dots,\nu}-S_{\nu-1,\dots,\nu-1})=$$

$$= \sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} \gamma^{(\mu)}_{n_1,n_2,...,n_m} (n_1^k + ... + n_m^k) A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m),$$

де $A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m)$ — члени ряду Фур'є функції $f(x_1,...,x_m)$. Тоді за теоремою Марцинкевіча одержуємо нерівність:

$$|| \sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} \gamma^{(\mu)}_{n_1,n_2,...,n_m} (n_1^k + ... + n_m^k) A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m) ||_{L_p^m} \leq$$

$$\leq \frac{C(k,p)}{(r+1)^k} || \sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} (n_1^k + ... + n_m^k) A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m) ||_{L_p^m}, \tag{13}$$

для будь-якого n_μ, $\mu = 1,2,...,m$.

Розглянемо випадок, коли k — парне число. Тоді з точністю до знака

$$\sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} (n_1^k + ... + n_m^k) A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m) =$$

$$= \sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^k}{\partial x_l^k} A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_l,...,x_m)$$

Величину $\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\partial^k}{\partial x_l^k} S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_l,...,x_m)$ будемо позначати через $D^{(k)}(S_{r,...,r};x_1,...,x_m)$.

Далі, враховуючи оцінку Ріса–Нікольського для похідних від тригонометричних поліномів $T_n(x)$ в метриці $L_p^1 = L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ (випадок $p = \infty$ дослідив М.Ріс (див. [5]), а $1 \leq p < \infty$ — С.М.Нікольський (див. [3]))

$$\left\| \frac{d^k}{dx^k} T_n(x) \right\|_{L_p} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^k \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \begin{pmatrix} k \\ \nu \end{pmatrix} T_n(x+(k-2\nu)\frac{\pi}{2n}) \right\|_{L_p}$$

одержуємо, що, коли $1 < p < \infty$,

$$||D^{(k)}(S_{r,...,r}; x_1, ..., x_m)||_{L_p^m} \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{2}\right)^k \sum_{l=1}^{m} ||\, \Delta^k_{(l),\frac{\pi}{2\,r}} S_{r,...,r}(f; x_1, ..., x_l, ..., x_m)||_{L_p^m},$$

де

$$\Delta^k_{(\nu),u} f(x_1, ..., x_m) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{i} f(x_1, ..., x_{\nu-1}, x_i + iu, x_{\nu+1}, ..., x_m).$$

Таким чином, за допомогою цієї оцінки отримуємо, що

$$R(S_{r,...,r}; \lambda_\nu(r))_{L_p^m} \leq$$

$$\leq \frac{C(k,p)}{(r+1)^k} \left(\frac{r}{2}\right)^k \sum_{l=1}^{m} ||\, \Delta^k_{(l),\frac{\pi}{2\,r}} S_{r,...,r}(f; x_1, ..., x_l, ..., x_m)||_{L_p^m}. \quad (14)$$

Далі, завдяки тому, що для просторів L_p^m, коли $1 < p < \infty$,

$$||\, \Delta^k_{(l),\frac{\pi}{2\,r}} S_{r,...,r}(f; x_1, ..., x_l, ..., x_m)||_{L_p^m} \leq,$$

$$\leq M_p ||\Delta^k_{(l),\frac{\pi}{2r}} f(x_1, ..., x_l, ..., x_m)||_{L_p^m} \leq M_p \omega_k^{(l)}(f; \frac{\pi}{2r})_{L_p^m}, \quad (15)$$

де $\omega_k^{(l)}(f; h)_{L_p^m}$ — модуль гладкості по змінній x_l порядку k з кроком h в метриці L_p^m функції $f(x_1, ..., x_l, ..., x_m)$, який визначається рівністю

$$\omega_k^{(l)}(f; h)_{L_p^m} =$$

$$= \sup_{|t_l| \leq h} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x_1, ..., x_{l-1}, x_l + \nu\, t_l, x_{l+1}, ..., x_m).$$

З оцінок (14) та (15) випливає така нерівність

$$R(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m} \le M(k,p)\sum_{l=1}^{m}\omega_k^{(l)}(f;\frac{\pi}{2r})_{L_p^m}.$$

Відомо, що при кожному $l,\ l=1,2,...,m$, має місце оцінка

$$\omega_k^{(l)}(f;h_l)_{L_p^m} \le \omega_k(f;h_1,...,h_m)_{L_p^m},$$

$\omega_k(f;h_1,...,h_m)_{L_p^m}$ — повний модуль гладкості функції $f(x_1,...,x_m)$ в метриці L_p^m, який визначається рівністю

$$\omega_k(f;u_1,...,u_m)_{L_p^m} = \sup_{\substack{|t_i|\le u_i\\ i=1,2,...,m}} ||\Delta^k_{t_1,...,t_m} f(x_1,...,x_m)||_{L_p^m},$$

де

$$\Delta^k_{t_1,...,t_m}(f;x_1,...,x_m)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\begin{pmatrix} k\\ \nu\end{pmatrix} f(x_1+\nu t_1,...,x_m+\nu t_m).$$

За допомогою оцінки М.П.Тімана (див. [10, с. 119]) величини $\omega_k(f;u_1,...,u_m)_{L_p^m}$ функції $f(x_1,...,x_m)$ в метриці L_p^m при $1<p<\infty$ через повні найкращі наближення, яка має вигляд

$$\omega_k\Big(f;\frac{1}{r+1}\Big)_{L_p^m} \le \frac{M(k,p)}{(r+1)^k}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{r}(\nu+1)^{\gamma\, k-1}E^\gamma_{\nu,...,\nu}\Bigg)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m} = \inf\limits_{T_{\nu,...,\nu}} ||f(x_1,...,x_m) - T_{\nu,...,\nu}(x_1,...,x_m)||_{L_p^m}$, а $T_{\nu,...,\nu}(x_1,...,x_m)$ — тригонометричний поліном степеня $\le \nu$ по кожній змінній $x_l,\ l=1,2,...,m$, $\gamma=\min(2,p)$, $M(k,p)$ — константа, яка не залежить від r та f, одержуємо для парного числа k твердження теореми 6.

Щоб довести теорему 6 для натурального числа k (непарного), використаємо таку нерівність:

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m} = ||f(x_1,...,x_m) - U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))||_{L_p^m} \le$$

$$\le M_p \sum_{l=1}^{m} R_l(f;\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}, \tag{16}$$

де

$$U(f;x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r)) = \sum_{\nu=0}^{r} (\lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r))\, S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r} \lambda_\nu(r)(\, S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m) - S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m)),$$

$\{\lambda_\nu(r)\}$, $\nu = 0,1,2,...,r$, $\lambda_0(r) = 1$, $\lambda_\nu(r) = 0$, коли $\nu > r$, — будь-яка спадна послідовність чисел; величини $R_l(f;\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}$ для кожного l, $l = 1,2,...,m$, визначаються за формулами:

$$R_l(f;\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m} =$$

$$= \Big\| \sum_{n_1=1}^{r} ... \sum_{n_m=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} (1 - \lambda_{n_l}(r)) A_{n_1,...,n_l,...,n_m}(x_1,...,x_l,...,x_m) \Big\|_{L_p^m},$$

де $A_{n_1,...,n_l,...,n_m}(x_1,...,x_l,...,x_m)$ — члени ряду Фур'є функції $f(x_1,...,x_m)$.

Для того, щоб одержати (16), розглянемо систему чисел

$$\left\{ \frac{1 - \lambda_\mu(r)}{\sum_{l=1}^{m}(1 - \lambda_{n_l}(r))} \right\}.$$

Ця система чисел задовольняє умови (11) теореми Марцинкевича.

Далі, скориставшись твердженням теореми Марцинкевіча, завдяки співвідношенню

$$\|S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_m)-U(S_{r,...,r};x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))\|_{L_p^m}=$$

$$=||\sum_{\nu=1}^{r}(1-\lambda_\nu(r))(S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m)-S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m))||_{L_p^m},$$

одержуємо нерівність

$$||S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_m)-U(S_{r,...,r};x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r))||_{L_p^m}\leq$$

$$\leq M_p||\sum_{n_1=1}^{r}...\sum_{n_m=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}(1-\lambda_{n_l}(r))A_{n_1,...,n_l,...,n_m}(x_1,...,x_l,...,x_m)||_{L_p^m},$$

яка має вигляд

$$R(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m}\leq M_p\sum_{l=1}^{m}R_l(S_{r,...,r};\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}.$$

За допомогою цієї нерівності та оцінки (12) отримуємо, що

$$R_l(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m}\leq\sum_{l=1}^{m}R_l(S_{r,...,r};\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}+C_pE_{r,...,r}(f)_{L_p^m}.$$

Для випадку функції однієї змінної у випадку, коли $f(x)\in L_p$, $1<p<\infty$, коли $\lambda_\nu(r)=1-\frac{\nu^k}{(r+1)^k}$, маємо відому оцінку

$$\left\|f(x)-\sum_{\nu=0}^{r}\lambda_\nu(r)A_\nu(x)\right\|_{L_p}\leq\frac{M_p}{(r+1)^k}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(\nu+1)^{k\gamma-1}E_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $\gamma=\min(2,p)$.

Застосовуючи цю нерівність по кожній змінній x_l, $l = 1, 2, ..., m$, функції $f(x_1, ..., x_l, ..., x_m)$ для оцінки величин $R_l(S_{r,...,r}; \lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}$, одержуємо, що

$$R_l(S_{r,...,r}; \lambda_{n_l}(r))_{L_p^m} \leq \frac{M_p}{(r+1)^k} \Big(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{k\gamma-1} (E_{\nu,\infty}^{(l)}(f)_{L_p^m})^{\gamma} \Big)^{\frac{1}{\gamma}}$$

і

$$R_l(f; \lambda_\nu(r))_{L_p^m} \leq \frac{M_p}{(r+1)^k} \sum_{l=1}^{m} \Big(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{k\gamma-1} (E_{\nu,\infty}^{(l)}(f)_{L_p^m})^{\gamma} \Big)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Далі, враховуючи те, що при кожному l, $l = 1, 2, ..., m$,

$$E_{\nu,\infty}^{(l)}(f)_{L_p^m} \leq E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m},$$

одержуємо, що при $\gamma = \min(2, p)$

$$R(f; \lambda_\nu(r))_{L_p^m} \leq \frac{m\, M_p}{(r+1)^k} \Big(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{k\gamma-1} E_{\nu,...,\nu}^{\gamma}(f)_{L_p^m} \Big)^{\frac{1}{\gamma}},$$

тобто твердження теореми 3.2.1 повністю доведено.

***Доведення теореми* 7.** Відомо, що частинні суми $S_{\nu,...,\nu}(f)$ ряду Фур'є функції f в метриці L_p^m, $1 < p < \infty$, здійснюють за порядком найкращі наближення функції f тригонометричними поліномами порядку ν по кожній зі змінних, тобто справедлива нерівність

$$||f - S_{\nu,...,\nu}(f))||_{L_p^m} \leq C_p E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m}, \quad 1 < p < \infty.$$

Завдяки цьому одержуємо, що

$$R(f; \lambda_\nu(r))_{L_p^m} = ||(f - S_{r,...,r}(f)) + (S_{r,...,r}(f) - U(f; \lambda_\nu(r)))||_{L_p^m} \leq$$

$$\leq ||f - S_{r,...,r}(f)||_{L_p^m} + ||S_{r,...,r}(f) - U(f; \lambda_\nu(r))||_{L_p^m} \leq$$

$$\leq R(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m} + C_p E_{r,...,r}(f)_{L_p^m}.$$

Далі, для вказаних в теоремі $\lambda_\nu(r)$, застосуємо рівність

$$R(S_{r,...,r};x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r)) =$$

$$= S_{r,...,r}(f;x_1,...,x_m) - U(S_{r,...,r};x_1,...,x_m;\lambda_\nu(r)) =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{r}(1-\lambda_\nu(r))(S_{\nu,...,\nu}(f;x_1,...,x_m)-S_{\nu-1,...,\nu-1}(f;x_1,...,x_m)).$$

Перш за все, з неї випливає, що

$$R(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m}=\Big\|\sum_{\nu=1}^{r}(1-\cos\frac{\nu\pi}{2r+1})(S_{\nu,...,\nu}-S_{\nu-1,...,\nu-1})\Big\|_{L_p^m} =$$

$$=2\Big\|\sum_{\nu=1}^{r}\sin^2\frac{\nu\,\pi}{2(2r+1)}(S_{\nu,...,\nu}-S_{\nu-1,...,\nu-1})\Big\|_{L_p^m}.$$

Далі, розглянемо систему чисел

$$\left\{\gamma^{(\mu)}_{n_1,...,n_m} = \frac{\sin^2\frac{n_\mu\pi}{2(2r+1)}}{\sum_{l=1}^{m}\sin^2\frac{n_l\pi}{2(2r+1)}}\right\},\quad \mu=1,2,...,m.$$

Ця система чисел задовольняє умови теореми Марцинкевіча. Таким чином, вона є системою мультиплікаторів для простору $L_p^m,\ 1<p<\infty$. Оскільки

$$\sum_{\nu=1}^{r}2\sin^2\frac{\nu\,\pi}{2(2r+1)}(S_{\nu,...,\nu}-S_{\nu-1,...,\nu-1}) =$$

$$=\sum_{n_1=1}^{r}\sum_{n_m=1}^{r}\gamma^{(\mu)}_{n_1,...,n_m}\sum_{l=1}^{m}2\sin^2\frac{n_l\pi}{2(2r+1)}A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m) =$$

$$= \sum_{n_1=1}^{r} \sum_{n_m=1}^{r} \gamma^{(\mu)}_{n_1,...,n_m} \sum_{l=1}^{m} \left(1 - \cos\frac{n_l \pi}{2(2r+1)}\right) A_{n_1,...,n_m}(x_1,...,x_m),$$

то

$$R(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m} \le M_p \sum_{l=1}^{r} R_l(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m},$$

і

$$R(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m} \le M_p \sum_{l=1}^{r} R_l(S_{r,...,r};\lambda_\nu(r))_{L_p^m} + E_{r,...,r}(f)_{L_p^m}.$$

Для функції однієї змінної у випадку, коли $f(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, а $\lambda_\nu(r) = \cos\frac{\nu\pi}{2r+1}$ має місце відома оцінка

$$\Big\| f(x) - \sum_{\nu=0}^{r} \lambda_\nu(r) A_\nu(x) \Big\|_{L_p} \le \frac{M_p}{(r+1)^2} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{2\gamma-1} E_\nu^\gamma(f)_{L_p} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $\gamma = \min(2,p)$.

Застосовуючи цю нерівність по кожній змінній x_l, $l = 1,2,...,m$, функції $f(x_1,...,x_l,...,x_m)$ для оцінки величин $R_l(S_{r,...,r};\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m}$, одержуємо, що

$$R_l(S_{r,...,r};\lambda_{n_l}(r))_{L_p^m} \le \frac{M_p}{(r+1)^2} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{2\gamma-1} (E^{(l)}_{\nu,\infty}(f)_{L_p^m})^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

і

$$R_l(f;\lambda_\nu(r))_{L_p^m} \le \frac{M_p}{(r+1)^2} \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{2\gamma-1} (E^{(l)}_{\nu,\infty}(f)_{L_p^m})^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Далі, завдяки тому, що при кожному l, $l = 1,2,...,m$,

$$E^{(l)}_{\nu,\infty}(f)_{L_p^m} \le E_{\nu,...,\nu}(f)_{L_p^m},$$

одержуємо, що при $\gamma = \min(2, p)$ має місце оцінка

$$R(f; \lambda_\nu(r))_{L_p^m} \le \frac{m\, M_p}{(r+1)^2} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (\nu+1)^{2\gamma-1} E_{\nu,\dots,\nu}^{\gamma}(f)_{L_p^m} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

тобто тим самим доведено твердження теореми 7.

Доведення теореми 8**.** Нехай $\lambda_\nu(r) = r^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$; $0 < r < 1$, тоді,

$$f(x_1, \dots, x_m) - U(f; x_1, \dots, x_m; \lambda_\nu(r)) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} (1 - r^\nu)(S_{\nu,\dots,\nu}(f; x_1, \dots, x_m) - S_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f; x_1, \dots, x_m)). \quad (17)$$

Розглянемо систему множників

$$\left\{ \lambda_{n_1,\dots,n_m} = \frac{1 - r^{n_\mu}}{\sum_{l=1}^{m} (1 - r^{n_l})} \right\}.$$

Ця система множників задовольняє умови теореми Марцинкевіча. Тому

$$\Big\| \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} \lambda_{n_1,\dots,n_m} \sum_{l=1}^{m} (1 - r^{n_l}) A_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) \Big\|_{L_p^m} \le$$

$$\le M_p \Big\| \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} (1 - r^{n_l}) A_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) \Big\|_{L_p^m} =$$

$$= M_p \Big\| \sum_{l=1}^{m} \big(f(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) - U_l(f; x_1, \dots, x_l, \dots, x_m; \lambda_{n_l}(r)) \big) \Big\|_{L_p^m}.$$

Оскільки для функції однієї змінної $f(x)$ відома оцінка

$$\Big\| f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu A_\nu(x) \Big\|_{L_p} \le M_p (1 - r) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu (\nu+1)^{\gamma-1} E_\nu^{\gamma}(f)_{L_p} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де $\gamma = \min(2, p)$, і крім того,

$$E^{(l)}_{\nu,\infty}(f)_{L_p^m} \leq E_{\nu,\dots,\nu}(f)_{L_p^m}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

то одержуємо

$$\Big\| \sum_{l=1}^{m} \big(f(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) - U_l(f; x_1, \dots, x_l, \dots, x_m; \lambda_{n_l}(r)) \big) \Big\|_{L_p^m} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{m} \big\| f(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m) - U_l(f; x_1, \dots, x_l, \dots, x_m; \lambda_{n_l}(r)) \big\|_{L_p^m} \leq$$

$$\leq m \cdot M_p'(1-r) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} (\nu+1)^{\gamma-1} E^{\gamma}_{\nu,\dots,\nu}(f)_{L_p^m} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Враховуючи співвідношення (17) та цю оцінку, переконуємось в справедливості теореми 8.

1. *Жижиашвили Л.В.* О суммировании двойных рядов Фурье // Сиб. матем. ж. — 1967. Т. 8, № 3. — С. 548–564.
2. *Marcinkiewicz J.* Sur une méthode remarquable de summation des series doubles de Fourier // Marcinkiewicz J. Collected papers, Warszawa, 1964. — P. 527–538.
3. *Никольский С.М.* Обобщение одного неравенства С.Н.Бернштейна // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 60, № 9. — С. 1507–1510.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
5. *Riesz M.* Eine trigonometrische interpolations formel und einige ungleichungen fur polinome // Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung, Leipzig. — 1914. — V. 23. — P. 354–368.
6. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. — Киев, 2000. — 52 с. — (Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
7. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p. — Киев, 2001. — 85 с. — (Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).

8. *Taberski R.* Abel summability of Double Fourier series // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math, astron. et phys. — 1970. V. 18, № 6. — P. 307–314.
9. *Тиман М.Ф.* Наилучшие приближения периодических функций тригонометрическими полиномами и преобразование типа свертки. — М.:ДАН СССР, 1971. — Т. 198, № 4. — С. 776–779.
10. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Днепропетровск: Полиграфист, 2000. — 320 с.