Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 335-351

УДК 517.5

$\boxed{\text{О. І. Степанець}}$, **А. Л. Шидліч**
(Ін–т математики НАН України, Київ)

# ПРО ОДНУ ЕКСТРЕМАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СКІНЧЕННИХ СУМ*

*В циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників (див., наприклад, [1–19]) вивчаються апроксимаційні властивості введених ним просторів $S^p_\varphi$. При цьому задачі, пов'язані зі знаходженням точних значень $n$-членних наближень $q$-еліпсоїдів в цих просторах, зводяться до певних екстремальних задач для рядів з членами, що є добутками елементів двох послідовностей, одна з яких є фіксованою і строго додатною, а друга варіюється на певній множині. В даній роботі доповнюються ці результати для випадку, коли нескінченні ряди замінюються скінченними сумами.*

**Вступ.** Нехай $\mathcal{M}$ — множина всіх послідовностей $m = \{m_k\}_{k=1}^\infty$ невід'ємних чисел, $m_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, таких, що $|m| \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^\infty m_k \leq 1$.

Нехай, далі, $r$ — деяке додатне число і $\mathcal{A}_r$ — множина всіх незростаючих послідовностей $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ додатних чисел, $\alpha_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, а у випадку, коли $r \in (0,1)$, додатково вимагається, щоб $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty$.

Нехай також $\gamma_n = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ — довільний набір із $n$ різних натуральних чисел. Покладемо для будь-яких $m \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{A}_r$ і $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n(\alpha, r, m) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^\infty \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k m_k^r \qquad (1)$$

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/083).

і

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha, r) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_n(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_n(\alpha, r, m). \qquad (2)$$

З означення множин $\mathcal{M}$ і $\mathcal{A}_r$ випливає, що ряд у правій частині співвідношення (1) збігається, і тому величини $\mathcal{E}_n(\alpha, r, m)$ і $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ мають зміст.

В циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників (див., наприклад, [1–19]) вивчаються апроксимаційні властивості введених ним просторів $S^p_\varphi$. При цьому задачі, пов'язані зі знаходженням точних значень найкращих $n$-членних наближень $q$-еліпсоїдів в цих просторах, базуються на таких твердженнях.

**Теорема A.** *Нехай $\alpha \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 1$, і $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ — величина, яка визначається рівністю* (2)*. Тоді для будь-якого натурального $n$ існує число $s^* > n$ таке, що*

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = (s^* - n)\Bigg(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\Bigg)^{-r}.$$

*Число $s^*$ визначається рівністю*

$$\sup_{s>n}(s - n)\Bigg(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\Bigg)^{-r} = (s^* - n)\Bigg(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\Bigg)^{-r}.$$

*При цьому точну верхню межу у правій частині співвідношення* (2) *реалізує послідовність $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^\infty$ з $\mathcal{M}$, у якої*

$$m_k^* = \begin{cases} \Bigg(\alpha_k^{\frac{1}{r}} \sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}}\Bigg)^{-1} & k \in [1, s^*], \\ 0, & k > s^*. \end{cases}$$

**Теорема B.** *Нехай $\alpha \in \mathcal{A}_r$, $r \in (0, 1)$, і $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ — величина, яка визначається рівністю* (2)*. Тоді при кожному $n \in \mathbb{N}$*

*справедлива рівність*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha, r) = \left( (s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left( \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r},$$

*в якій* $s^* = s^*(n, \alpha, r)$ *— найбільше натуральне число,* $s^* > n$, *яке задовольняє умову*

$$s - n \le \alpha_s^{\frac{1}{r}} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \quad \text{для всіх } s \in (n, s^*].$$

*Таке число* $s^*$ *завжди існує. Точну верхню межу в правій частині співвідношення* (2) *реалізує послідовність* $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ *з* $\mathcal{M}$, *у якої*

$$m_k^* = \begin{cases} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} (s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left( \sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{r-1}} \mathcal{E}_n^{\frac{1}{r-1}} & k \in [1, s^*], \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \mathcal{E}_n^{\frac{1}{r-1}}, & k > s^*. \end{cases}$$

Твердження цих теорем було доведено в роботах [2] і [4]. Пізніше в роботі [20] було запропоновано нові доведення згаданих теорем, які є значно коротшими та прозорішими. В цих теоремах істотно використовувався той факт, що числа $\alpha_k$, які входять до означення функціоналу (1), при всіх $k \in \mathbb{N}$ були строго додатними. Проте в ряді важливих випадків виникає потреба в розгляді функціоналів вигляду (1), коли замість нескінченного ряду розглядаються скінченні суми, що можна трактувати як той випадок, коли, починаючи з деякого значення $n_0 = d$, всі числа $\alpha_k$ є нулями. Саме ці випадки і розглядаються в даній роботі.

Отже, нехай $r$ — деяке додатне число і $\mathcal{A}_r'$ — множина всіх незростаючих послідовностей $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ невід'ємних чисел,

$\alpha_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, а у випадку, коли $r \in$ $\in (0,1)$, додатково вимагається, щоб $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty$.

Для довільної послідовності $\alpha \in \mathcal{A}'_r \setminus \mathcal{A}_r$ позначимо через $d_\alpha$ найменше натуральне число таке, що $\alpha_k = 0$ при всіх $k > d_\alpha$. Якщо ж $\alpha \in \mathcal{A}_r$, то покладемо $d_\alpha = \infty$.

**Теорема 1.** *Нехай $\alpha \in \mathcal{A}'_r$, $r \geq 1$, і $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ — величина, яка визначається рівністю* (2). *Тоді для будь-якого натурального $n$, $n < d_\alpha$, існує число $s^* \in (n, d_\alpha]$ таке, що*

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}. \tag{3}$$

*Число $s^*$ визначається рівністю*

$$\sup_{s\in[1,\,d_\alpha]} (s - n)\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}. \tag{4}$$

*При цьому точна верхня межа в правій частині співвідношення* (2) *реалізується послідовністю $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ з множини $\mathcal{M}$, у якої*

$$m_k^* = \begin{cases} \left(\alpha_k^{\frac{1}{r}} \sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}}\right)^{-1} & k \in [1, s^*], \\ 0, & k > s^*. \end{cases} \tag{5}$$

**Теорема 2.** *Нехай $\alpha \in \mathcal{A}'_r$, $r \in (0,1)$, і $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ — величина, яка визначається рівністю* (2). *Тоді при кожному $n \in \mathbb{N}$, $n < d_\alpha$, справедлива рівність*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha, r) = \left((s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{d_\alpha} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r},$$

*в якій* $s^* = s^*(n, \alpha, r)$ — *найбільше натуральне число,* $s^* \in \in (n, d_\alpha]$*, яке задовольняє умову*

$$s - n \le \alpha_s^{\frac{1}{r}} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \quad \text{для всіх } s \in (n, s^*]. \tag{6}$$

*Таке число* $s^*$ *завжди існує. Точну верхню межу в правій частині співвідношення* (2) *реалізує послідовність* $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ *з* $\mathcal{M}$*, у якої*

$$m_k^* = \begin{cases} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} (s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left( \sum\limits_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{r-1}} \mathcal{E}_n^{\frac{1}{r-1}} & k \in [1, s^*], \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \mathcal{E}_n^{\frac{1}{r-1}}, & k > s^*. \end{cases} \tag{7}$$

**1. Доведення теореми 1.** У випадку, коли дана послідовність $\alpha \in \mathcal{A}_r$ є строго додатною, тобто коли $d_\alpha = \infty$, твердження теорем 1 та 2 випливають із теорем A і B. Якщо ж $d_\alpha < \infty$, то доведення цих теорем здебільшого повторюють доведення теорем A і B, запропоновані в роботі [20], проте і мають свої особливості. Спочатку встановимо таке твердження.

**Твердження 1.** *Нехай* $\alpha \in \mathcal{A}'_r$*,* $r > 0$*, і* $\mathcal{M}'$ — *множина всіх послідовностей* $m$ *з множини* $\mathcal{M}$*, для яких числа* $\alpha_k m_k^r$ *не зростають. Тоді справедлива рівність*

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = \sup_{m \in \mathcal{M}'_d} \mathcal{E}_n(m).$$

***Доведення.*** Для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}$ знайдеться послідовність $m' \in \mathcal{M}'$ така, що $\mathcal{E}_n(m') \ge \mathcal{E}_n(m)$ і $|m'| \le |m|$. Дійсно, розглянемо послідовність чисел $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, у якої при всіх $k > d_\alpha$ $m'_k = 0$, якщо ж $k \in [1, d_\alpha]$, то $m'_k = \left( \frac{\overline{\alpha_k m_k^r}}{\alpha_k} \right)^{\frac{1}{r}}$, де $\overline{\alpha_k m_k^r}$ — перестановка системи чисел $\alpha_k m_k^r$, $k = 1, 2, \ldots$, за незростанням. Тоді очевидно, що $\mathcal{E}_n(m') = \mathcal{E}_n(m)$. Крім того, за теоремою 368 з [21]

$$|m'| = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \left( \frac{\overline{\alpha_k m_k^r}}{\alpha_k} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \sum_{k=1}^{d_\alpha} m_k = |m|.$$

Тобто, послідовність $m'$ належить множині $\mathcal{M}'$ і твердження 1 доведено.

Згідно з означенням множини $\mathcal{M}'$ для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}'$

$$\sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m_k^r,$$

а тому

$$\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=n+1}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \nu_k \alpha_k m_k^r, \tag{8}$$

де

$$\nu_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 0, & k \in [1, n], \\ 1, & k \in (n, d_\alpha]. \end{cases}$$

Таким чином, при відшуканні величин $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ достатньо обмежитися послідовностями $m \in \mathcal{M}'$, для яких числа $\alpha_k m_k^r$ дорівнюють одне одному при всіх $k \in [1, n+1]$. Множину всіх таких послідовностей позначимо через $\mathcal{M}''$. Тоді для довільної послідовності $m \in \mathcal{M}''$

$$\alpha_1 m_1^r = \alpha_2 m_2^r = \ldots = \alpha_{n+1} m_{n+1}^r = c,$$

де $c$ — деяке невід'ємне число. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n+1} m_k = c^{\frac{1}{r}} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}},$$

і тому справджується рівність

$$c = \alpha_k m_k^r = \left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}, \quad k \in [1, n+1]. \tag{9}$$

Далі, якщо $n+1 = d_\alpha$, то на підставі (8) та (9) для будь-якої послідовності $m \in \mathcal{M}''$ маємо

$$\mathcal{E}_n(m) = ((n+1)-n)\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} =$$

$$= |m|^r (d_\alpha - n)\left(\sum_{k=1}^{d_\alpha} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}.$$

Звідси, враховуючи те, що для довільної послідовності $m \in \mathcal{M}''$ $|m| \le 1$, отримуємо

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = \sup_{m \in \mathcal{M}''} \mathcal{E}_n(m) \le (d_\alpha - n)\left(\sum_{k=1}^{d_\alpha} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}.$$

Зрозуміло, що при цьому число $s^*$, яке визначається рівністю (4), дорівнює $d_\alpha$, і для доведення даної теореми в такому випадку досить помітити, що послідовність $m^*$, яка задається співвідношенням (5), належить множині $\mathcal{M}''$, і що

$$\mathcal{E}_n(m^*) = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}. \tag{10}$$

Якщо ж $n+1 < d_\alpha$, то на підставі (8) та (9)

$$\mathcal{E}_n(m) = ((n+1)-n)\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} + \sum_{k=n+2}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r. \tag{11}$$

Для знаходження оцінки зверху величини $\mathcal{E}_n(m)$ застосуємо прийом, який використовувався в [20]. Ідея цього прийому полягає в тому, щоб в результаті отримати оцінку величини $\mathcal{E}_n(m)$, яка б не містила суму вигляду $\sum\limits_{k=i}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r$, $i = n+2, \ldots, d_\alpha$. Покладемо

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n+1} m_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n+2} m_k, \quad a_1 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}, \qquad (12)$$

$$a_2 = \alpha_{n+2}, \quad b = (n+1) - n$$

і на відрізку $[0, c]$ розглянемо функцію $f(x) = a_1 b x^r + a_2(c - x)^r$. Дана функція на $[0, c]$ має єдину критичну точку $x_* = c a_2^{\frac{1}{r-1}} \left((a_1 b)^{\frac{1}{r-1}} + a_2^{\frac{1}{r-1}}\right)^{-1}$, яка є її точкою мінімуму.

Звідси випливає, що $f(x)$ на будь-якому відрізку $[x_0, c] \subset [0, c]$ досягає свого найбільшого значення на одному із його кінців. Тому, покладаючи $x_0 = a_2^{\frac{1}{r}} c (a_1^{\frac{1}{r}} + a_2^{\frac{1}{r}})^{-1}$, будемо мати

$$f(x) \le \max\{f(x_0), f(c)\} \quad \forall x \in [x_0, c]. \qquad (13)$$

Бачимо, що $[x_0, c] = \{x \in [0, c] \ : \ a_1 x^r \ge a_2 (c - x)^r\}$, тому, помітивши, що в силу означення множини $\mathcal{M}''$

$$a_1 x_1^r = \left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} = \alpha_{n+1} m_{n+1}^r \ge$$
$$\ge \alpha_{n+2} m_{n+2}^r = a_2 (c - x_1)^r,$$

робимо висновок, що $x_1 \in [x_0, c]$. Звідси, враховуючи позначення із (12), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n+2} \nu_k \alpha_k m_k^r = f(x_1) \le \max\{f(x_0), f(c)\} =$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{n+2} m_k \right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\}, \tag{14}$$

де $\xi_s = (s-n)\left( \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}$, $s = n+1, n+2, \ldots, d_\alpha$.

Далі, якщо $n+2 = d_\alpha$, то на підставі (11) і (14) маємо

$$\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \nu_k \alpha_k m_k^r = f(x_1) \leq \left( \sum_{k=1}^{d_\alpha} m_k \right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\}.$$

Звідси аналогічно до випадку, коли $n+1 = d_\alpha$, отримуємо необхідну оцінку величини $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$:

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) \leq \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\} = (s^* - n)\left( \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r},$$

де число $s^*$ визначається рівністю (4), і для завершення доведення теореми 1 за таких умов досить помітити, що послідовність $m^*$, яка задається співвідношенням (5), належить множині $\mathcal{M}''$ і для неї справджується рівність (10).

Якщо ж $n+2 < d_\alpha$, то внаслідок (11) і (14)

$$\mathcal{E}_n(m) \leq \left( \sum_{k=1}^{n+2} m_k \right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\} + \sum_{k=n+3}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r. \tag{15}$$

Далі, покладемо

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n+2} m_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n+3} m_k, \quad a_1 = \left( \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r},$$
$$a_2 = \alpha_{n+3}, \quad b = l - n, \tag{16}$$

де $l$ — натуральне число, для якого $\xi_l = \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\}$. З того, що $m \in \mathcal{M}''$ випливає, що

$$a_1 x_1^r \geq \left(\sum_{k=1}^{n+2} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} \geq \alpha_{n+3} m_{n+3}^r = a_2(c - x_1)^r,$$

тобто точка $x_1$ знову-таки належить відрізку $[x_0, c]$. Звідси, внаслідок (14), (16) і (13), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n+3} \nu_k \alpha_k m_k^r \leq \left(\sum_{k=1}^{n+2} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}\} + \alpha_{n+3} m_{n+3}^r = f(x_1) \leq$$

$$\leq \max\{f(x_0), f(c)\} = \left(\sum_{k=1}^{n+3} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\}. \quad (17)$$

Далі, аналогічно, якщо $n + 3 = d_\alpha$, то на підставі (15) і (17)

$$\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \nu_k \alpha_k m_k^r = f(x_1) \leq \left(\sum_{k=1}^{d_\alpha} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\}.$$

Тому справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) \leq \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\} = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r},$$

де число $s^*$ визначається рівністю (4). Оскільки послідовність $m^*$ вигляду (5) належить множині $\mathcal{M}''$ і для неї справджується рівність (10), то справедлива і рівність (3).

Якщо ж $n + 2 < d_\alpha$, то із (15) і (17) випливає

$$\mathcal{E}_n(m) \leq \left(\sum_{k=1}^{n+3} m_k\right)^r \max\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\} + \sum_{k=n+4}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r,$$

Проводячи аналогічні міркування далі, на $(d_\alpha - n - 1)$-ому кроці встановимо, що для довільної послідовності $m \in \mathcal{M}''$

$$\mathcal{E}_n(m) \le |m|^r \max_{s\in[n+1,d_\alpha]} \xi_s \le \max_{s\in[1,d_\alpha]} (s-n)\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r} =$$

$$= (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}.$$

і для завершення доведення теореми зазначимо, що послідовність $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^d$ вигляду (5) належить множині $\mathcal{M}''$, і що

$$\mathcal{E}_n(m^*) = (s^* - n)\left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}.$$

**2. Доведення теореми 2.** Як і при доведенні теореми 1 спочатку переконуємось, що для відшукання величини $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$ і в цьому випадку достатньо обмежитися множиною $\mathcal{M}''$ всіх послідовностей $m$ з множини $\mathcal{M}$, для яких числа $\alpha_k m_k^r$ не зростають і рівні між собою при всіх $k = 1, 2, \ldots, n+1$. При цьому, якщо $n + 1 = d_\alpha$, то, міркуючи так само, приходимо до висновку, що

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = (d_\alpha - n)\left(\sum_{k=1}^{d_\alpha} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}.$$

Якщо ж $n + 1 < d_\alpha$, то встановимо таке твердження.

**Твердження 2.** *Нехай* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *— множина всіх послідовностей* $m$ *з множини* $\mathcal{M}''$, *для яких числа* $\alpha_k {m_k}^r$ *рівні між собою при всіх* $k \in [1, s^*]$, *де* $s^* = s^*(n, \alpha, r)$. *Тоді справедлива рівність*

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) = \sup_{m\in\widetilde{\mathcal{M}}} \mathcal{E}_n(m). \tag{18}$$

***Доведення.*** Як і при доведенні твердження 1, покажемо, що для кожної послідовності $m \in \mathcal{M}''$ знайдеться послідовність $m'' \in \widetilde{\mathcal{M}}$ така, що $|m''| \le |m|$ і

$$\mathcal{E}_n(m'') \ge \mathcal{E}_n(m). \tag{19}$$

З цією метою розглянемо послідовність $m''$ таку, що при $k \in \in [1, s^*]$ значення $m''_k$ визначаються співвідношенням

$$\alpha_k (m''_k)^r = \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r},$$

а при $k > s^* - m''_k = m_k$. Оскільки

$$\sum_{k=1}^{s^*} m''_k = \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{s^*} m_k,$$

то

$$|m''| = |m|. \tag{20}$$

Для доведення нерівності (19) достатньо показати, що

$$\sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \alpha_k m_k^r \le \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \left(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\right)^r \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{-r}. \tag{21}$$

Покажемо, що насправді виконується більш сильна нерівність

$$\sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \alpha_k m_k^r \le \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \left(\sum_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{s^*} \alpha_j^{\frac{r-1}{r}} m_j^r, \tag{22}$$

з якої (21) можна отримати шляхом застосуванням нерівності Гельдера.

Покладемо

$$M_k = \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \left( \nu_k \alpha_k^{\frac{1}{r}} - (s^* - n) \left( \sum_{i=1}^{s^*} \alpha_i^{-\frac{1}{r}} \right)^{-1} \right).$$

Очевидно, що внаслідок (6) $M_k \le 0$ при $k \in [1, n]$, і $M_k \ge 0$ при $k \in [n+1, s^*]$. Крім того,

$$\sum_{k=1}^{s^*} M_k = 0,$$

Тому різницю $R$ між правою і лівою частинами (22) можна подати у вигляді:

$$R = \sum_{k=1}^{s^*} (\alpha_k m_k^r - c) M_k,$$

де $c$ — довільне дійсне число.

Враховуючи те, що величини $\alpha_k m_k^r$ монотонно спадають, візьмемо в ролі $c$ число $c^* = \alpha_{n+1} m_{n+1}^r$. В такому випадку величини $(\alpha_k m_k^r - c^*) M_k$ будуть недодатними при всіх $k \in [1, s^*]$. Звідси випливає, що $R \le 0$.

Таким чином, співвідношення (22), а разом з ним і нерівності (21) і (19) доведено. Об'єднуючи співвідношення (19) та (20), отримуємо необхідну рівність (18).

З означення множини $\widetilde{\mathcal{M}}$ випливає, що для кожної послідовності $m \in \widetilde{\mathcal{M}}$ при всіх $k \in [1, s^*]$

$$\alpha_k m_k^r = \left( \sum_{k=1}^{s^*} m_k \right)^r \left( \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \alpha_k m_k = (s^* - n) \left( \sum_{k=1}^{s^*} m_k \right)^r \left( \sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}} \right)^{-r}.$$

Далі можливі два випадки: коли $s^* = d_\alpha$ і коли $s^* < d_\alpha$.

В першому випадку для будь-якої послідовності $m \in \widetilde{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{E}_n(m) = \sum_{k=1}^{d_\alpha} \nu_k \alpha_k m_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s^*} \nu_k \alpha_k m_k = (s^* - n)\bigg(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\bigg)^r \bigg(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\bigg)^{-r},$$

а оскільки $\sum_{k=1}^{s^*} m_k \le |m| \le 1$, то приходимо до висновку, що

$$\mathcal{E}_n(\alpha, r) \le (s^* - n)\bigg(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\bigg)^{-r}.$$

Для завершення доведення теореми 2 за таких припущень досить помітити, що послідовність $m^*$, яка задається рівністю (7) і має в такому випадку вигляд

$$m_k^* = \begin{cases} \bigg(\alpha_k^{\frac{1}{r}} \sum\limits_{i=1}^{d_\alpha} \alpha_i^{-\frac{1}{r}}\bigg)^{-1} & k \in [1, d_\alpha], \\ 0, & k > d_\alpha, \end{cases}$$

належить множині $\widetilde{\mathcal{M}}$ і для неї справджується рівність

$$\mathcal{E}_n(m^*) = (d_\alpha - n)\bigg(\sum_{k=1}^{d_\alpha} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\bigg)^{-r}.$$

Якщо ж $s^* < d_\alpha$, то

$$\mathcal{E}_n(m) = (s^* - n)\bigg(\sum_{k=1}^{s^*} m_k\bigg)^r \bigg(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\bigg)^{-r} + \sum_{k=s^*+1}^{d_\alpha} \alpha_k m_k^r. \quad (23)$$

Застосовуючи до виразу в правій частині (23) нерівність Гельдера, будемо мати

$$\mathcal{E}_n(m) \leq \left(\sum_{k=1}^{d_\alpha} m_k\right)^r \left((s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{d_\alpha} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}.$$

Звідси, внаслідок того, що $\sum_{k=1}^{d_\alpha} m_k \leq |m| \leq 1$, отримуємо потрібну оцінку зверху величини $\mathcal{E}_n(\alpha, r)$.

Розглянемо тепер послідовність $m^*$, яка визначається співвідношенням (7), і покажемо, що $m^* \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Дійсно, враховуючи (7), при кожному $k \in [1, s^*]$ будемо мати

$$\alpha_k (m_k^*)^r = (s^* - n)^{\frac{r}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} \mathcal{E}_n^{\frac{r}{r-1}}, \tag{24}$$

а при $k > s^*$ —

$$\alpha_k (m_k^*)^r = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \mathcal{E}_n^{\frac{r}{r-1}}. \tag{25}$$

Тобто, величини $\alpha_k (m_k^*)^r$ при $k \in [1, s^*]$ рівні між собою, а при $k > s^*$ — не зростають. Тому достатньо показати, що

$$\alpha_{s^*} (m_{s^*}^*)^r \geq \alpha_{s^*+1} (m_{s^*+1}^*)^r \tag{26}$$

або ж

$$(s^* - n)^{\frac{r}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} \geq \alpha_{s^*+1}^{\frac{1}{1-r}}.$$

Остання нерівність випливає із означення числа $s^*$. Таким чином, послідовність $m^*$ належить множині $\widetilde{\mathcal{M}}$. Крім того, внаслідок (24)–(26) має місце рівність

$$\mathcal{E}_n(m^*) = \left((s^* - n)^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=1}^{s^*} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \sum_{k=s^*+1}^{d_\alpha} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r},$$

яка і завершує доведення теореми.


1. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 3. — С. 392–416.

2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001.— Т. 53, № 8. — С. 1121–1146.

3. *Войцехівський В.Р.* Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору $S^p$ сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Праці Ін–ту математики НАН України. — 2002. — Т. 35. — С. 33–46.

4. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін–ту математики НАН Украины. — 2002. — Т. 40, ч II. — С. 333–368.

5. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p$ // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С.208 — 226.

6. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве $S^p$ // Укр. мат. журн. — 2002.— Т. 54, № 1. — С. 106–124.

7. *Вакарчук С.Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах $S^p$ $(1 \leq p < \infty)$// Воронеж. зим. мат. школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 26 января-2 февраля, 2003 г.). — Воронеж: Воронеж.ун-т, 2003. — С.47 - 48.

8. *Войцеховський В.Р.* Поперечники деяких класів з простору $S^p$ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання : Праці Ін–ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 17–26.

9. *Рукасов В.И.* Наилучшие $n$-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.

10. *Сердюк А.С.* Поперечники в просторі $S^p$ класів функцій, що означаються модулями неперервності їх $\psi$-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання : Праці Ін–ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 229–248.

11. *Степанец А.И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 10. — С. 1392–1423.

12. *Степанец А.И., Рукасов В.И.* Пространства $S^p$ с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 54, № 2. — С. 264–277.

13. *Степанец А.И., Рукасов В.И.* Наилучшие "сплошные" $n$-членные приближения в пространствах $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 663–670.

14. *Степанец А.И., Шидлич А.Л.* Наилучшие $n$-членные приближения $\Lambda$-методами в пространствах $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 8. — С. 1107–1126.

15. *Шидліч А.Л.* Найкращі $n$-членні наближення $\Lambda$-методами в просторах $S^p_\varphi$ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання : Праці Ін–ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 283–306.

16. *Вакарчук С.Б.* Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах $S^p$, $1 \le p < \infty$ // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 5. — С. 595–605.

17. *Степанец А.И.* Наилучшие приближения $q$-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 10. — С. 1378–1383.

18. *Шидліч А.Л.* Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 133–138.

19. *Степанец А.И.* Наилучшие $n$-членные приближения с ограничениями // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 533–553.

20. *Степанець О.І., Шидліч А.Л.* Про одну екстремальну задачу для додатних рядів // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1677–1683.

21. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.