

УДК 517.5

І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

**НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРАМИ СЕРДЮКА  
НЕПЕРЕРВНИХ  $(\psi, \beta)$ -ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ  
ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ\***

Одержано асимптотичні (при  $\sigma \rightarrow \infty$ ) формули для точних верхніх меж відхилень операторів Сердюка  $U_\sigma(f; \cdot)$  — цілих функцій експоненціального типу не більшого ніж  $\sigma$  — на класах  $\hat{C}_{\beta, \infty}^\psi$  неперервних заданих на дійсній осі функцій в рівномірній метриці.

Нехай  $\hat{L}$  — множина функцій  $\varphi(\cdot)$ , які задані на дійсній осі  $\mathbb{R}$  і мають скінченну норму  $\|\varphi\|_{\hat{L}}$ , де

$$\|\varphi\|_{\hat{L}} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)| dt. \quad (1)$$

Нехай, далі,  $\psi(v)$  — функція, неперервна при всіх  $v \geq 0$ , і  $\beta$  — фіксоване число, для яких майже при всіх  $t \in \mathbb{R}$  існує перетворення

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \quad (2)$$

Тоді, наслідуючи О.І. Степанця [1], через  $\hat{L}_\beta^\psi$  позначаємо множину функцій  $f \in \hat{L}$ , які майже при всіх  $x \in \mathbb{R}$  можуть бути записані у вигляді рівності

---

\*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) \hat{\psi}_\beta(t) dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \quad (3)$$

де  $A_0$  — деяка стала,  $\varphi \in \hat{L}$ , а інтеграл розуміють як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо  $f \in \hat{L}_\beta^\psi$  і при цьому  $\varphi \in \mathfrak{N}$ , де  $\mathfrak{N}$  — деяка підмножина з  $\hat{L}$ , то покладають  $f \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ . Підмножини неперервних функцій з  $\hat{L}_\beta^\psi$  і  $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$  позначають відповідно символами  $\hat{C}_\beta^\psi$  і  $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ . Функцію  $\varphi(\cdot)$  у рівності (3) називають  $(\psi, \beta)$ -похідною функції  $f(\cdot)$  і позначають  $f_\beta^\psi(\cdot)$ .

Апроксимаційні властивості множин  $\hat{L}_\beta^\psi$  вивчалися в багатьох роботах і основні досягнення в цьому напрямі містяться в [2], де, фактично, побудовано теорію наближень функцій із множин  $\hat{L}_\beta^\psi$  в такій же повноті, в якій вона існує в періодичному випадку для множин  $L_\beta^\psi$  (див. [3, 4]), які є підмножинами періодичних функцій з  $\hat{L}_\beta^\psi$ .

Як наближаючі агрегати для функцій  $f \in \hat{L}_\beta^\psi$  будемо використовувати функції  $U_\sigma(f; \cdot)$ ,  $\sigma \geq 0$ , що мають вигляд

$$U_\sigma(f; x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma u_\sigma(t, v) dv dt, \quad (4)$$

де функція  $u_\sigma(t, v) = u_\sigma(\psi, \beta; t, v)$  визначається такою рівністю:

$$u_\sigma(t, v) = \begin{cases} u_\sigma^*(t, v), & v \in [0, \sigma-1], \\ u_\sigma^*(t, v) + \psi(3\sigma)(v-\sigma+1) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}), & v \in (\sigma-1, \sigma), \\ 0, & v \in [\sigma, \infty], \end{cases}$$

а  $u_\sigma^*(t, v) = (\psi(v) - \psi(2\sigma - v)) \cos(vt - \frac{\beta\pi}{2}) - \psi(2\sigma + v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})$   
при  $v \in [0, \sigma]$ .

**Твердження 1.** Нехай  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $\psi(v)$  — функція, абсолютно неперервна при всіх  $v \geq 0$ , причому  $\psi(0) \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0$ , і крім того, при довільному  $a > 0$   $\psi' \in L_2(0, a)$  :

$$\int_{-a}^a |\psi'(x)|^2 dx < \infty,$$

і  $\hat{\psi}_\beta \in L(\mathbb{R})$ . Тоді, якщо  $f_\beta^\psi \in W$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\beta^\psi(x)|}{1+|x|} dx < \infty,$$

або  $f_\beta^\psi \in W^2$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\beta^\psi(x)|^2}{(1+|x|)^2} dx < \infty,$$

то  $U_\sigma(f; \cdot) \in \mathcal{E}_\sigma$ , тобто є цілою функцією експоненціального типу не більшого ніж  $\sigma$  і, більше того,  $U_\sigma(f, \cdot) \in W^2$ .

**Доведення твердження 1** випливає з такого відомого твердження.

**Твердження А** ([5, п. 97]). Нехай

$$g(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(v) e^{ivt} dv,$$

де  $\gamma(v)$  — функція, абсолютно неперервна,  $\gamma(-\sigma) = \gamma(\sigma) = 0$  та  $\gamma'(v) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ , і нехай функція  $h(x)$  задовольняє одну

з таких умов:

- а)  $h \in W$ ,
- б)  $h \in W^2$ .

Тоді згортка

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(x-t)dt,$$

належить до  $\mathcal{E}_\sigma$ , а також до  $W^2$ .

Покладемо

$$\gamma(v) = \lambda_\sigma(v) + i\nu_\sigma(v),$$

де

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} \cos \frac{\beta\pi}{2} (\psi(|v|) - \psi(2\sigma - |v|) - \psi(2\sigma + |v|)), & |v| \leq \sigma - 1, \\ \cos \frac{\beta\pi}{2} (\psi(|v|) - \psi(2\sigma - |v|) - \psi(2\sigma + |v|) + \psi(3\sigma)(|v| - \sigma + 1)), & \sigma - 1 < |v| < \sigma, \\ 0, & |v| \geq \sigma, \end{cases}$$

і

$$\nu_\sigma(v) = \begin{cases} \sin \frac{\beta\pi}{2} (\psi(|v|) - \psi(2\sigma - |v|) + \psi(2\sigma + |v|)), & |v| \leq \sigma - 1, \\ \sin \frac{\beta\pi}{2} (\psi(|v|) - \psi(2\sigma - |v|) + \psi(2\sigma + |v|) - \psi(3\sigma)(|v| - \sigma + 1)), & \sigma - 1 < |v| < \sigma, \\ 0, & |v| \geq \sigma, \end{cases}$$

Як впливає з побудови і умов, накладених на функцію  $\psi(v)$  і дійсне число  $\beta$ , функція  $\gamma(v)$  є абсолютно неперервною,  $\gamma(-\sigma) = \gamma(\sigma) = 0$  і  $\gamma'(v) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ . Далі, скориставшись твердженням А, за умов  $f_\beta^\psi \in W$  або  $f_\beta^\psi \in W^2$ , і враховуючи, що

$$\int_0^\sigma u_\sigma(t, v) dv \equiv \int_{-\sigma}^\sigma \gamma(v) e^{ivt} dv, \quad t \in \mathbb{R},$$

завершуємо доведення твердження 1.

Зазначимо, що у випадку, коли  $f(x) \in 2\pi$ -періодичними функціями з  $\hat{L}_\beta^\psi$  і  $\sigma = n \in \mathbb{N}$ , функції  $U_n(f, \cdot) \in$  тригонометричними поліномами порядку  $\leq n-1$ , апроксимативні властивості яких на класах  $L_\beta^\psi \mathfrak{A}$  досліджено А.С. Сердюком [6]. Саме тому функції  $U_\sigma(\cdot; \cdot)$  будемо називати операторами Сердюка.

При означенні множин  $\hat{L}_\beta^\psi$  функція  $\psi(v)$  і число  $\beta$  підпорядковані умові, щоб перетворення  $\hat{\psi}_\beta(t)$  існувало майже для всіх  $t$ . Вкажемо достатні умови для того, щоб перетворення  $\hat{\psi}_\beta(t)$  було сумовним на дійсній осі.

Наслідуючи О.І. Степанця [2], через  $\mathfrak{A}$  позначимо множину всіх неперервних при  $v \geq 0$  функцій  $\psi$ , які задовольняють умови:

- 1)  $\psi(v) \geq 0$ ,  $\psi(0) = 0$ ;
- 2)  $\psi$  опукла вниз на  $[1; \infty)$  і  $\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = 0$ ;
- 3)  $\psi'(v) := \psi'(v+0) \in$  функцією обмеженої варіації на  $[0; \infty)$  :

$$\bigvee_0^\infty \psi'(v) \leq K < \infty,$$

а також покладемо

$$\mathfrak{A}' \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \psi \in \mathfrak{A} : \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty, \right\},$$

$$\mathfrak{A}_0 \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \psi \in \mathfrak{A} : 0 < \mu(t) \leq K < \infty, \forall t \geq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{A}_C \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \psi \in \mathfrak{A} : 0 < K_1 \leq \mu(t) \leq K_2 < \infty, \forall t \geq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{A}_\infty^+ \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \psi \in \mathfrak{A} : \mu(t) \uparrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty \right\},$$

де

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad \eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1} \left( \frac{1}{2} \psi(t) \right), \quad t \geq 1. \quad (5)$$

Тоді, якщо виконуються такі умови:  $\psi \in \mathfrak{A}$  і  $\beta = 0$  або  $\psi \in \mathfrak{A}'$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ , які скрізь надалі припускаються, то, як випливає з твердження 9.5.1 [2], перетворення  $\hat{\psi}_\beta(t)$  є функцією сумовною на  $\mathbb{R}$ .

Мета даної роботи полягає в знаходженні асимптотичних при  $\sigma \rightarrow \infty$  рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi; U_\sigma) = \sup_{f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \|f(x) - U_\sigma(f; x)\|_C,$$

де  $\|f(x)\|_C = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ ,

$$\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi = \{f \in \hat{C}_\beta^\psi : \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |f_\beta^\psi(t)| \leq 1\}.$$

Мають місце такі твердження.

**Теорема 1.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}_0$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$  має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\hat{C}_{0,\infty}^\psi; U_\sigma) = \frac{4}{\pi^2} \psi(3\sigma) \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma), \quad (6)$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$ .

**Теорема 2.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}_0$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi; U_\sigma) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_{3\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \psi(3\sigma) \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma), \quad (7)$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

Зі співвідношення 5.3.5 [4] випливає, що якщо  $\psi \in \mathfrak{A}_C \subset \mathfrak{A}'_0$ , то

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt \leq K\psi(\sigma) \quad \sigma \geq 1.$$

Враховуючи це, з теореми 2 отримуємо такий наслідок.

**Наслідок 1.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}_C$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$  має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}; U_{\sigma}) = \frac{4}{\pi^2} \psi(3\sigma) \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma), \quad (8)$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

**Теорема 3.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}^{+}$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}; U_{\sigma}) = \frac{4}{\pi} \psi(\sigma) + O(1) (\psi(3\sigma) |\ln(\eta(3\sigma) - 3\sigma)| + \frac{\psi(\sigma)}{\mu(\sigma)}), \quad (9)$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

Нехай функція  $\psi(v)$ , що задає клас  $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$ , має вигляд

$$\psi(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0, 1]; \\ e^{-\alpha v}, & v \geq 1, \end{cases} \quad (10)$$

де  $\alpha$  — довільне число,  $\alpha > 0$ ,  $\psi_1(v)$  — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну  $\psi'_1(v)$  обмеженої варіації на  $[0, 1]$  і така, що  $\psi_1(0) \sin(\beta\pi/2) = 0$  і  $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$ .

Множину  $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$ , що визначається функцією  $\psi(v)$ , означеною рівністю (10), надалі позначатимемо символом  $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\alpha}$ .

Слід відмітити, що множину  $2\pi$ -періодичних функцій  $f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}$  називають множиною інтегралів Пуассона (див., наприклад, [4, с.302]) функцій  $\varphi$ ,  $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq 1$ , і позначають

$C_{\beta, \infty}^q$ ,  $q = e^{-\alpha}$ . Множини  $C_{\beta, \infty}^q$  досліджувались в багатьох роботах і останні результати цих досліджень містяться в книзі [4, с. 301–369] (див. також наведену там бібліографію).

З теореми 3, враховуючи, що для функції  $\psi(v)$ , означеної рівністю (10),  $\eta(t) = t - \frac{\ln 2}{\alpha}$  при  $t \geq 1$ , впливає такий наслідок.

**Наслідок 2.** Нехай  $\alpha > 0$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ , тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$  має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\alpha; U_\sigma) = e^{-\alpha\sigma} \left( \frac{4}{\pi} + \frac{O(1)}{\alpha\sigma} \right),$$

де  $O(1)$  — величини, рівномірно обмежені по параметрах  $\alpha, \beta$  і  $\sigma$ .

**Зауваження. 1.** Теореми 1–3 в періодичному випадку доведено в [6]. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень операторів Фур'є на класах  $\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi$  отримано в [1; 2 (гл. IX); 7; 8].

**2.** З результатів роботи [9] і наслідку 2 випливає, що при  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\alpha; U_\sigma) \sim E_\sigma(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\alpha),$$

де

$$E_\sigma(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\alpha) = \inf_{g \in \mathcal{E}_\sigma} \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \|f(x) - g(x)\|_C,$$

а запис  $f(x) \sim \varphi(x)$  означає, що  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$ , коли  $x$  прямує до заданої границі.

**Доведення теорем 1 і 2** ґрунтується на такій лемі.

**Лема.** Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}$  і  $\beta = 0$  або  $\psi \in \mathfrak{A}'$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \geq 1$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi; U_\sigma) = \mathcal{E}(\widehat{C}_{-\beta,\infty}^{\psi_\sigma}; F_\sigma) + O(1)\psi(\sigma),$$

де

$$\psi_\sigma(t) = \begin{cases} \psi((2\sigma + 1)t), & 0 \leq t \leq 1, \\ \psi(t + 2\sigma), & t \geq 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi; F_\sigma) = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \|f(x) - F_\sigma(f; x)\|_C,$$

$F_\sigma(f; x)$  — оператори Фур'є порядку  $\sigma$ , введені в [1]:

$$F_\sigma(f; x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(v) \lambda_\sigma(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv dt,$$

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq \sigma - 1, \\ 1 - (v - \sigma + 1)\psi(\sigma)/\psi(v), & \sigma - 1 < v < \sigma, \\ 0, & v \geq \sigma, \end{cases}$$

$O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

**Доведення.** Якщо  $\psi \in \mathfrak{A}$  і  $\beta = 0$  або  $\psi \in \mathfrak{A}'$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ , то, як уже зазначалось, функція  $\hat{\psi}_\beta(t)$  сумовна на  $\mathbb{R}$ . Тому, враховуючи, що

$$\begin{aligned} & \int_0^\sigma (\psi(2\sigma - v) \cos(vt - \frac{\beta\pi}{2}) + \psi(2\sigma + v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})) dv = \\ & = 2 \cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}) \int_0^\infty \psi(v + \sigma) \cos vt dv - \int_\sigma^\infty \psi(v) \cos(vt - \frac{\beta\pi}{2}) dv - \\ & \quad - \int_\sigma^\infty \psi(v + 2\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv, \end{aligned}$$

з рівностей (3)–(4), при  $f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$  в кожній точці  $x$  отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) - U_\sigma(f; x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\sigma-1}^{\sigma} \psi(3\sigma)(v-\sigma+1) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_\sigma^\infty \psi(v + 2\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right) dt + r_\sigma(f; x), \quad (12) \end{aligned}$$

де

$$r_\sigma(f; x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}) \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt \, dv \, dt. \quad (13)$$

Якщо  $f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ , то  $\|f_\beta^\psi\| \leq 1$ , і тому з рівності (13) отримуємо

$$r_\sigma = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi} \|r_\sigma(f; x)\|_C \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt \, dv \right| dt. \quad (14)$$

Оскільки  $\psi \in \mathfrak{A}$ , то функція  $\psi'(\sigma+v)$  від'ємна й зростаюча при  $v \geq 0, \sigma \geq 1$ , крім того  $\lim_{v \rightarrow \infty} \psi'(\sigma+v) = 0$ , тому, інтегруючи частинами при  $t \neq 0$ , маємо

$$\int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt \, dv = -\frac{1}{t} \int_0^{\infty} \psi'(v+\sigma) \sin vt \, dv > 0.$$

Далі, змінюючи порядок інтегрування і враховуючи, що при  $v \neq 0$   $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin vt}{t} dt = \pi$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt \, dv \right| dt &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} \psi'(v+\sigma) \sin vt \, dv \, dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi'(v+\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin vt}{t} dt \, dv = 2\psi(\sigma). \end{aligned} \quad (15)$$

Далі, розглядаючи, точну верхню межу по функціям  $f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$  в рівності (12) та враховуючи співвідношення (13)–(15),

одержуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}; U_{\sigma}) = \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}(x-t) \left( \frac{1}{\pi} \int_{\sigma-1}^{\sigma} \psi(3\sigma)(v-\sigma+1) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \psi(v+2\sigma) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}) dv \right) dt \right\|_C + O(1)\psi(\sigma). \quad (16) \end{aligned}$$

Помічаючи, тепер, що перший доданок в правій частині останньої рівності є точною верхньою межею відхилень операторів Фур'є  $F_{\sigma}(g; \cdot)$  від функцій  $g$  з класу  $\widehat{C}_{-\beta, \infty}^{\psi_{\sigma}}$  в рівномірній метриці, тобто дорівнює величині  $\mathcal{E}(\widehat{C}_{-\beta, \infty}^{\psi_{\sigma}}; F_{\sigma})$ , де функція  $\psi_{\sigma}(v)$  визначається рівністю (11), завершуємо доведення леми.

Для завершення доведення теорем 1 і 2 скористаємось такими твердженнями.

**Теорема А** ([2], теорема 9.12.3). *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}_0$ , тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$  виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{0, \infty}^{\psi}; F_{\sigma}) = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma),$$

де  $O(1)$  — величина рівномірно обмежена відносно  $\sigma$ .

**Теорема Б** ([7], теорема 1). *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}'_0$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}; F_{\sigma}) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln \sigma + O(1)\psi(\sigma),$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

Як впливає з побудови, функція  $\psi_{\sigma}(v)$ , яка визначається рівністю (11), належить до множин  $\mathfrak{A}_0$  або  $\mathfrak{A}'_0$ , якщо функція

$\psi(v)$  належить до множин  $\mathfrak{A}_0$  або  $\mathfrak{A}'_0$ , відповідно. Тому, об'єднуючи лему 1 і теореми А і Б, поклавши в них  $\psi(v) = \psi_\sigma(v)$ , отримуємо співвідношення (6) і (7). Теореми 1 і 2 доведено.

**Доведення теореми 3.** Нехай  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді, якщо  $f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$ , то в кожній точці  $x$  виконується рівність (12). Розглядаючи в цій рівності точну верхню межу по функціям  $f$  з класу  $\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi$  і проводячи міркування аналогічні тим, що проводилися при отриманні співвідношення (16), отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi; U_\sigma) = \mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi) + O(1)\mathcal{E}(\widehat{C}_{-\beta, \infty}^{\psi_\sigma}; F_\sigma), \quad (17)$$

де

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi) = \frac{2}{\pi} \sup_{f \in \widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt dv dt \right\|_C. \quad (18)$$

Покладемо  $\widetilde{f}_\beta^\psi(-t) = \text{sign} \cos(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})$ , тоді з рівності (18), випливає

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}_{\beta, \infty}^\psi) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt dv dt. \quad (19)$$

Для знаходження правої частини рівності (19) скористаємося таким твердженням.

**Твердження Б** ([8], лема). *Нехай  $g(t)$  і  $h(t)$  — абсолютно інтегровні на дійсній осі функції з обмеженою варіацією:*

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} g < \infty, \quad \bigvee_{-\infty}^{\infty} h < \infty,$$

$\sigma$  і  $\alpha$  — довільні дійсні числа. Покладемо

$$\varphi(t) = g(t) \cos(\sigma t + \alpha) + h(t) \sin(\sigma t + \alpha),$$

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}, \quad K = \bigvee_{-\infty}^{\infty} g + \bigvee_{-\infty}^{\infty} h.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt + O(1)K\sigma^{-1},$$

де  $O(1)$  — величини, рівномірно обмежені по  $\sigma$ .

Покладемо

$$g(t) = \int_0^{\infty} \psi(v + \sigma) \cos vt \, dv, \quad h(t) \equiv 0 \quad \text{і} \quad \alpha = -\frac{\beta\pi}{2},$$

і покажемо, що функція  $g(t)$  задовольняє всі умови твердження Б. Дійсно, вона, як уже зазначалось, абсолютно інтегровна. Знайдемо її варіацію. Оскільки функція  $g(t)$  парна, то

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) = 2 \int_0^{\infty} |g'(t)| dt = 2 \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} v \psi(v + \sigma) \sin vtdv \right| dt.$$

Розіб'ємо інтеграл, що стоїть в правій частині останньої рівності, на дві частини:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} v \psi(v + \sigma) \sin vtdv \right| dt &= \int_0^{(\eta(\sigma) - \sigma)^{-1}} \left| \int_0^{\infty} v \psi(v + \sigma) \sin vtdv \right| dt + \\ &+ \int_{(\eta(\sigma) - \sigma)^{-1}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} v \psi(v + \sigma) \sin vtdv \right| dt \stackrel{\text{df}}{=} V_{\sigma}^{(1)}(\psi) + V_{\sigma}^{(2)}(\psi), \end{aligned} \quad (20)$$

де функція  $\eta(t)$  визначається рівністю (5). Бачимо, що

$$V_{\sigma}^{(1)}(\psi) \leq \frac{1}{(\eta(\sigma) - \sigma)} \int_0^{\infty} v \psi(v + \sigma) dv. \quad (21)$$

Якщо  $\psi \in \mathfrak{A}_\infty^+$ , то, як випливає із зауваження 3.13.1 з [4],  $\psi(t) \leq 2(\eta(t) - t)|\psi'(t)|$ ,  $t \geq 1$ . Тому, враховуючи останнє, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v\psi(v + \sigma)dv &\leq 2 \int_0^\infty v(v + \sigma) \frac{(\eta(v + \sigma) - v - \sigma)}{v + \sigma} |\psi'(v + \sigma)|dv \leq \\ &\leq 2 \frac{(\eta(\sigma) - \sigma)}{\sigma} \int_0^\infty v(v + \sigma) |\psi'(v + \sigma)|dv. \end{aligned} \quad (22)$$

Інтегруючи частинами і враховуючи те, що при  $\psi \in \mathfrak{A}_\infty^+$   $v^2\psi(v + \sigma)|_{v=\infty} = 0$ , отримуємо

$$\int_0^\infty v(v + \sigma) |\psi'(v + \sigma)|dv = 2 \int_0^\infty v\psi(v + \sigma)dv + \sigma \int_0^\infty \psi(v + \sigma)dv. \quad (23)$$

Об'єднуючи співвідношення (22),(23) і таку нерівність (див. співвідношення (108) з [6] або (19) з [10]):

$$\int_0^\infty \psi(v + \sigma)dv \leq \frac{2}{1 - \frac{2}{\mu(\sigma)}} \psi(\sigma)(\eta(\sigma) - \sigma), \quad \sigma \geq 1, \quad \mu(\sigma) > 2,$$

для всіх  $\sigma \geq 1$  таких, що  $\mu(\sigma) > 4$ , одержуємо

$$\int_0^\infty v\psi(v + \sigma)dv \leq \frac{4}{(1 - \frac{2}{\mu(\sigma)})(1 - \frac{4}{\mu(\sigma)})} \psi(\sigma)(\eta(\sigma) - \sigma)^2. \quad (24)$$

Підставляючи оцінку (24) у нерівність (21), маємо

$$V_\sigma^{(1)}(\psi) = O(1)\psi(\sigma)(\eta(\sigma) - \sigma). \quad (25)$$

Отримаємо тепер необхідну оцінку для величини  $V_\sigma^{(2)}(\psi)$ . Двічі інтегруючи частинами і враховуючи, що якщо  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ , то  $v\psi(\infty) = v\psi'(\infty) = 0$ , отримуємо

$$\int_0^\infty v\psi(v+\sigma) \sin vtdv = -\frac{1}{t^2} \int_0^\infty \sin vtd(\psi(v+\sigma) + v\psi'(v+\sigma)). \quad (26)$$

Оскільки  $|\sin vt| \leq 1$ , то

$$\left| \int_0^\infty \sin vtd(\psi(v+\sigma) + v\psi'(v+\sigma)) \right| \leq \bigvee_0^\infty \psi(v+\sigma) + \bigvee_0^\infty v\psi'(v+\sigma). \quad (27)$$

Далі, враховуючи, що

$$\bigvee_0^\infty \psi(v+\sigma) = \psi(\sigma)$$

і

$$\begin{aligned} \bigvee_0^\infty v\psi'(v+\sigma) &= \int_0^\infty |\psi'(v+\sigma) + v\psi''(v+\sigma)|dv \leq \\ &\leq \int_0^\infty |\psi'(v+\sigma)|dv + \int_0^\infty |v\psi''(v+\sigma)|dv = \psi(\sigma) + \int_0^\infty vd|\psi'(v+\sigma)| = \\ &= \psi(\sigma) + \int_0^\infty |\psi'(v+\sigma)|dv = 2\psi(\sigma), \end{aligned}$$

зі співвідношень (20), (26) і (27), одержуємо

$$V_\sigma^{(2)}(\psi) \leq 3\psi(\sigma) \int_{(\eta(\sigma)-\sigma)^{-1}}^\infty \frac{1}{t^2} dt = O(1)\psi(\sigma)(\eta(\sigma) - \sigma). \quad (28)$$

Далі, зі співвідношень (20), (25) і (28) випливає

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) = O(1)\psi(\sigma)(\eta(\sigma) - \sigma). \quad (29)$$

Користуючись твердженням Б, з рівності (19) отримуємо

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \psi(v + \sigma) \cos vt \, dv \right| dt + O(1)\psi(\sigma) \frac{\eta(\sigma) - \sigma}{\sigma}.$$

Тепер, враховуючи рівність (15) і означення функції  $\mu(t)$  (див. рівність (5)), з останнього співвідношення при  $\sigma \rightarrow \infty$  одержуємо

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}) = \frac{4}{\pi} \psi(\sigma) + O(1) \frac{\psi(\sigma)}{\mu(\sigma)}. \quad (30)$$

Оцінимо тепер другий доданок в правій частині співвідношення (17). Для цього скористаємося твердженням, яке випливає з теореми 9.12.2 [2].

**Теорема В.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{A}_{\infty}^{+}$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $\sigma \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\psi}; F_{\sigma}) = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) |\ln(\eta(\sigma) - \sigma)| + O(1)\psi(\sigma),$$

де  $O(1)$  — величина, рівномірно обмежена відносно  $\sigma$  і  $\beta$ .

За теоремою В, при  $\sigma \rightarrow \infty$  отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{C}_{-\beta, \infty}^{\psi_{\sigma}}; F_{\sigma}) = \frac{4}{\pi^2} \psi(3\sigma) |\ln(\eta(3\sigma) - 3\sigma)| + O(1)\psi(3\sigma). \quad (31)$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (17), (30) і (31), одержуємо рівність (9). Теорему 3 доведено.

1. *Степанец А.И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303, №1. — С. 50–53.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
3. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
4. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 537 с.
6. *Сердюк А.С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 296–338.
7. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є  $\bar{\psi}$ -інтегралів функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 7. — С. 960–965.
8. *Степанець О.І., Соколенко І.В.* Наближення інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — Т. 1, № 1. — С. 361–375.
9. *Бушанский А.В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. — Киев: Ин-т математики. — 1978. — С. 29–37.
10. *Сердюк А.С.* Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 4. — С. 495–505.