Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 302-317

УДК 517.5

В. В. Савчук, А. Л. Шидліч
(Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЛІНІЙНИМИ МЕТОДАМИ В ПРОСТОРАХ S^p

В просторах S^p функцій багатьох змінних, 2π– періодичних за кожною змінною, вивчаються апроксимативні властивості операторів $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$, що породжують два методи підсумовування по трикутних областях кратних рядів Фур'є. Зокрема, в термінах похибок наближення цими операторами в просторі S^p дається конструктивна характеристика класів функцій, узагальнені похідні яких задовольняють умову Ліпшиця.

1. Позначення та постановка задачі. Нехай d — натуральне число, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_+$, $\mathbb{Z}^d$ – множини всіх впорядкованих наборів $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ відповідно з d дійсних, дійсних невід'ємних та цілих чисел і $\mathbb{T}^d := [0, 2\pi]^d := \underbrace{[0, 2\pi] \times \ldots \times [0, 2\pi]}_{d}$.

Нехай далі $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p < \infty$, – простір функцій f, визначених на $\mathbb{R}^d$, 2π-періодичних за кожною змінною, для яких

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f|^p d\sigma \right)^{1/p} < \infty,$$

де σ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}^d$ і $C = C(\mathbb{T}^d)$ — простір неперервних на $\mathbb{R}^d$ функцій f, 2π-періодичних за кожною змінною, з нормою $\|f\|_C := \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|$.

Покладемо

$$(\mathbf{k},\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{d} k_j x_j$$

і

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

Простір S^p, $1 \le p < \infty$, [1] (Гл. XI) (див. також [2]) – це простір функцій $f \in L_1$, для яких

$$\|f\|_{S^p} := \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Дві функції $f \in L_1$ і $g \in L_1$ вважаються тотожними в просторі S^p, якщо $\|f-g\|_{S^p} = 0$.

Покладемо

$$H_\nu(f)(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1=\nu} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \ |\mathbf{k}|_1 := \sum_{j=1}^{d} |k_j|, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Тоді ряд Фур'є функції $f \in L_1$ можна подати у вигляді

$$S[f](\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(f)(\mathbf{x}).$$

Виходячи з останньої рівності, розглянемо лінійні оператори $S_n^\triangle$, $\sigma_n^\triangle$, $P_{\varrho,s}^\triangle$ і $A_{\varrho,r}^\triangle$, визначені на L_1 відповідно рівностями

$$S_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \ n = 0, 1, \dots,$$

$$\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\triangle(f)(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) H_\nu(f)(\mathbf{x}), \ n \in \mathbb{N},$$

$$P^{\Delta}_{\varrho,s}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{\nu^s} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \quad s > 0, \ \varrho \in [0,1),$$

і

$$A^{\Delta}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{x}) = S^{\Delta}_{r-1}(f)(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \tag{1}$$

де

$$\lambda_{\nu,r} := \lambda_{\nu,r}(\varrho) := \sum_{k=0}^{r-1} \begin{pmatrix} \nu \\ k \end{pmatrix} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(1-\varrho)^k}{k!} \frac{d^k}{d\varrho^k} \varrho^\nu, \quad r \in \mathbb{N}, \ \varrho \in [0,1).$$

Вирази $S^{\Delta}_n(f)(\mathbf{x})$, $\sigma^{\Delta}_n(f)(\mathbf{x})$ і $P^{\Delta}_{\varrho,s}(f)(\mathbf{x})$ називаються відповідно трикутною частинною сумою ряду Фур'є, трикутною сумою Фейєра і узагальненою трикутною сумою Абеля–Пуассона функції f. Вираз $A^{\Delta}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{x})$ назвемо трикутною сумою Тейлора–Абеля–Пуассона функції f.

Зазначимо, що означення оператора $A^{\Delta}_{\varrho,r}$ є коректним тому, що

$$\sum_{k=0}^{r-1} \begin{pmatrix} \nu \\ k \end{pmatrix} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} \le r q^\nu \nu^{r-1}, \ \text{де } q = \max(1-\varrho, \varrho),$$

і отже, для будь-якої функції $f \in L_1$ при $0 < \varrho < 1$ ряд в правій частині (1) мажорується збіжним рядом

$$r \sum_{\nu=r}^{\infty} q^\nu \nu^{r-1} \sum_{|\mathbf{k}|_1 = \nu} |\widehat{f}(\mathbf{k})|.$$

Пояснимо тепер мотиви вибору назви для операторів $A^{\Delta}_{\varrho,r}(f)$.

Нагадаємо, що інтегралом Пуассона функції $f \in L_1$ називається функція $P(f)$, визначена в $[0,1)^d \times \mathbb{R}^d$ рівністю

$$P(f)(\varrho, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) P(\varrho, \mathbf{t}) d\sigma(\mathbf{t}),$$

де

$$P(\varrho, \mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{d} \frac{1-\varrho_j^2}{1-2\varrho_j \cos t_j + \varrho_j^2}, \quad \varrho_j \in [0,1),$$

— кратне ядро Пуассона і $\mathbf{x}+\mathbf{t} := (x_1+t_1, \ldots, x_d+t_d)$.

Надалі домовимось під виразом $P(f)(\varrho, \mathbf{x})$ розуміти інтеграл Пуассона, в якому ϱ — це вектор з однаковими координатами, тобто $\varrho = (\varrho, \ldots, \varrho)$.

Для функції $f \in L_1$, виходячи з розвинення ядра Пуассона в ряд за степенями ϱ, її інтеграл Пуассона $P(f)(\varrho, \mathbf{x})$, при $\varrho \in$ $\in [0,1)$, можемо записати у вигляді

$$P(f)(\varrho, \mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{\nu} H_{\nu}(f)(\mathbf{x}).$$

Сума ряду в правій частині цієї рівності збігається з сумою Абеля–Пуассона ряду $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu}(f)(\mathbf{x})$, або, що те ж саме, з сумою $P^{\Delta}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x})$. При $\mathbf{x} = \mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ суму цього ряду спрощено позначимо $F(\varrho)$ і розглянемо її як функцію змінної ϱ. Зрозуміло, що функція F є аналітичною на піввідрізку $[0,1)$. Тому в околі точки $\varrho \in [0,1)$ для функції F справджується формула Тейлора, за якою

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(\varrho)}{k!} (t-\varrho)^k.$$

За допомогою безпосереднього обчислення переконуємося у тому, що частинна сума цього ряду порядку $r-1$ при $t=1$ збігається з сумою $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{0})$. Зокрема, при $r=1$ дістанемо $F(\varrho)=A^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{0})=P^{\triangle}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{0})$.

Отже, суму $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)(\mathbf{0})$, з одного боку, можна тлумачити як суму Тейлора порядку $r-1$ функції F, а з другого, при $r=1$, — як суму Абеля–Пуассона.

Метою даної роботи є вивчення операторів $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ як лінійних методів наближення функцій в просторах S^p. При цьому основна увага звертається на зв'язок апроксимативних властивостей сум $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ із диференціальними властивостями функції f, а саме, властивостями похідних, означених в такий спосіб.

Нехай $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – кратна числова послідовність, члени якої не всі дорівнюють нулеві і

$$\mathscr{Z}(\psi):=\mathscr{Z}^d(\psi):=\Big\{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d:\psi(\mathbf{k})=0\Big\}.$$

Надалі вважаємо, що множина $\mathscr{Z}(\psi)$ має скінченну кількість елементів.

Якщо для даної функції $f\in L_1$ знайдеться функція $g\in L_1$ така, що

$$S[f](\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{Z}(\psi)}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}+\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\psi(\mathbf{k})\widehat{g}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},\qquad(2)$$

то кажуть, що у функції f існує ψ-похідна g, для якої використовують позначення $g=f^{\psi}$. При цьому, якщо $\mathscr{Z}(\psi)=\varnothing$, то перша сума в (2) покладається рівною нулеві.

Зрозуміло, що ψ-похідна для функцій з простору S^p є єдиною з точністю до суми $\sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{Z}(\psi)}a_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, де $a_{\mathbf{k}}$ — будь-які числа.

Дане означення ψ-похідної пристосоване для потреб досліджень, викладених у цій статті, і за суттю не відрізняється від усталеного поняття ψ-похідної О. І. Степанця [1] (Гл. XI, §2), [2].

В цій роботі розглядаються ψ-похідні функцій з L_1 в таких двох випадках:

$$1) \quad \psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}, \text{ якщо } |\mathbf{k}|_1 = \nu, \ \nu = 0, 1, \ldots, \ r \geq 0;$$

$$2) \quad \psi(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\mathbf{k}|_1 = 0, 1, \ldots, r-1, \\ \dfrac{(\nu - r)!}{\nu!}, & \text{якщо } |\mathbf{k}|_1 = \nu, \ \nu \geq r, \ r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При цьому у першому випадку для ψ-похідної функції f використовуємо позначення $f^{(r)}$, у другому — $f_{[r]}$, а при $r = 0$ покладаємо $f^{(0)} = f_{[0]} = f$.

В термінах інтегралів Пуассона можна дати таке тлумачення похідної $f_{[r]}$. Нехай $\varrho \in [0, 1)$, тоді

$$P(f_{[r]})(\varrho, \mathbf{x}) = \varrho^r \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} P(f)(\varrho, \mathbf{x}), \tag{3}$$

і внаслідок відомої теореми про радіальні граничні значення інтеграла Пуассона (див., наприклад, [3, с. 27]), для майже всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$f_{[r]}(\mathbf{x}) = \lim_{\varrho \to 1-} \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} P(f)(\varrho, \mathbf{x}). \tag{4}$$

Відмітимо також, що $f^{(1)} = f_{[1]}$.

Оператори $P^{\Delta}_{\varrho,s}$ в загальному випадку, як агрегати наближення функцій однієї змінної, мабуть, вперше розглядалися в [4,5]. Оператори $A^{\Delta}_{\varrho,r}$ вперше вивчалися в [6], де в їх термінах дано конструктивну характеристику класів Гарді–Ліпшиця $H^r_p \operatorname{Lip} \alpha$ функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини. В частинному ж випадку, коли $r = s = 1$, оператори $A^{\Delta}_{\varrho,1}$ та $P^{\Delta}_{\varrho,1}$ збігаються між собою і породжують метод Абеля–Пуассона підсумовування кратних рядів

Фур'є по трикутних областях. Задача про наближення сумами Абеля–Пуассона 2π-періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних має багату історію з великою кількістю визначних результатів, огляд яких потребує написання окремої статті. Тут згадаємо лише монографії [7–10], в яких викладено основоположні результати з цієї тематики.

2. Основні результати. У формулюванні основних результатів домовимося про такі позначення. Нехай $\mathbb{Z}^d_+ := \mathbb{R}^d_+ \cap \cap \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}^d_- := \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : k_j < 0, j = 1, \ldots, d\right\}$, $Y := \mathbb{Z}^d_+ \cup \mathbb{Z}^d_-$, і

$$L_{p,Y} := L_{p,Y}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_p : \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0 \ \forall\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus Y \right\}.$$

Для даного $\alpha \in (0,1]$ і простору X, під яким розуміється один з просторів L_p, S^p чи C, покладемо

$$\mathrm{Lip}(\alpha, X) := \left\{ f : f \in X,\ \|f - f_h\|_X = O(1)|h|^\alpha,\ |h| \to 0 \right\},$$

де $f_h(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + h),\ \mathbf{x} + h := (x_1 + h, \ldots, x_d + h),\ h \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p < \infty,\ 0 < \alpha \le 1,\ r \in \mathbb{N}$ *і* $f \in \in L_1(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f - A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha-1}, \quad \varrho \to 1-$;

2) $\left\|P(f_{[r]})(\varrho, \cdot)\right\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha-1}, \quad \varrho \to 1-$;

3) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f_{[r]}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{1-\alpha}, \quad n \to \infty$;

4) $\left\|f_{[r-1]} - \sigma^{\triangle}_n\left(f_{[r-1]}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty$;

5) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f_{[r-1]}\right) - \sigma^{\triangle}_n\left(f_{[r-1]}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty$;

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то кожне з тверджень* 1) – 5) *рівносильне такому:*

6) $f_{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p)$.

Розглянемо тепер апроксимативні властивості сум $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ в просторі S^p.

Покажемо, що

$$\|f - P^{\Delta}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p} \sim \|f^{(s-1)} - P^{\Delta}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|^p_{S^p}, \quad \varrho \to 1- . \qquad (5)$$

Для цього покладемо

$$a_\nu := \|H_\nu(f)\|_{S^p}, \quad \nu = 0, 1, \dots .$$

Тоді

$$\|f - P^{\Delta}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \varrho^{\nu^s}\right)^p a^p_\nu.$$

Оскільки

$$\lim_{\varrho \to 1-} \frac{1 - \varrho^{\nu^s}}{1 - \varrho} = \nu^s, \quad \nu \in \mathbb{N}, \; s \geq 1,$$

то

$$\lim_{\varrho \to 1-} \frac{\|f - P^{\Delta}_{\varrho,s}(f)\|^p_{S^p}}{\|f^{(s-1)} - P^{\Delta}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|^p_{S^p}} = \lim_{\varrho \to 1-} \frac{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a^p_\nu \frac{(1 - \varrho^{\nu^s})^p}{(1 - \varrho)^p}}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a^p_\nu \nu^{p(s-1)} \frac{(1 - \varrho^{\nu})^p}{(1 - \varrho)^p}} =$$

$$= \frac{\|f^{(s)}\|^p_{S^p}}{\|f^{(s)}\|^p_{S^p}} = 1,$$

що й доводить (5).

Легко бачити, що

$$P^{\Delta}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x}) = A^{\Delta}_{\varrho,1}(f)(\mathbf{x}).$$

Тому, застосувавши теорему 1 до функції $f = g^{(s-1)}$ зі значенням параметра $r = 1$ і врахувавши співвідношення (5), одержимо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p < \infty,\ 0 < \alpha \le 1,\ s \ge 1$ *і* $f \in \in L_1(\mathbb{T}^d),\ d \in \mathbb{N}$. *Наступні твердження рівносильні:*

1) $\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha}, \quad \varrho \to 1-;$

2) $\left\|P(f^{(s)})(\varrho,\cdot)\right\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha-1}, \quad \varrho \to 1-;$

3) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{(s)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{1-\alpha}, \quad n \to \infty;$

4) $\left\|f^{(s-1)} - \sigma^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty;$

5) $\left\|S^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right) - \sigma^{\triangle}_n\left(f^{(s-1)}\right)\right\|_{S^p} = O(1)n^{-\alpha}, \quad n \to \infty;$

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то кожне з тверджень* 1) – 5) *рівносильне такому:*

6) $f^{(s-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p)$.

Зауваження 1. При $d = 1$ простір $L_{1,Y}(\mathbb{T}^1)$ збігається з простором $L_1(\mathbb{T}^1)$ і тому твердження 1) – 6) в теоремах 1 та 2 є рівносильними без жодних застережень.

Результати, що містяться в теоремах 1 і 2, примикають до результатів Г.Г. Лоренца [11]. Тут звернемо увагу на деякі факти, які випливають з результатів зазначеної роботи та теорем 1 і 2.

В наступних твердженнях $d = 1$ і тому символ $\triangle$ в записах операторів $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ будемо опускати як непотрібний.

Наслідок 1. *Нехай* $0 < \alpha < 1/2,\ 1 \le p < 2/(2\alpha+1)$ *і* $r \in \mathbb{N}$. *Якщо* f *— функція, для якої* $f_{[r]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, C)$, *то*

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha+1/2-1/p}, \quad \varrho \to 1-. \qquad (6)$$

Якщо ж $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, C)$, *то*

$$\|f - P_{\varrho,r}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha+3/2-1/p}, \quad \varrho \to 1-.$$

Справді, в [11, с. 137] показано, що за умов наслідку 1 $\left\|S_n(f_{[r]})\right\|_{S^p} = O(1)n^{1/p-\alpha-1/2},\ n \in \mathbb{N}$, а згідно з теоремою 1 із останнього випливає співвідношення (6). Аналогічно доводиться твердження для $P_{\varrho,r}(f)$.

Зауваження 2. Із наслідку 1 та теореми 1 бачимо, що при будь-яких $\alpha \in (0, 1/2)$ та $p \in [1, 2/(2\alpha+1))$ виконується включення $\mathrm{Lip}(\alpha, C) \subset \mathrm{Lip}(\alpha + 3/2 - 1/p, S^p)$.

Наслідок 2. *Нехай* $0 < \alpha \le 1$, $1 < p \le 2$, $q = p/(p-1)$ *і* $r \in \mathbb{N}$. *Якщо* f *— функція, для якої* $f_{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, *то*

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{S^q} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha-1}, \quad \varrho \to 1- . \tag{7}$$

Якщо ж $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, *то*

$$\|f - P_{\varrho,r}(f)\|_{S^q} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha}, \quad \varrho \to 1- .$$

Справді, за теоремою Гаусдорфа–Юнга

$$\|g\|_{S^q} \le \|g\|_{L_p} \quad \forall\, g \in L_p.$$

Отже, якщо $f_{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, то $f_{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^q)$. Тому співвідношення (7) справджується згідно з теоремою 1.

Зауваження 3. З результатів роботи [6] випливає, що для кожної функції f такої, що $f_{[r-1]} \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_p)$, де $0 < \alpha < 1$ і $1 < p < \infty$, справджується співвідношення

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{L_p} = O(1)(1-\varrho)^{r+\alpha-1}, \quad \varrho \to 1- .$$

3. Доведення. Вище показано, що теорема 2 випливає з теореми 1. Тому залишається довести істинність останньої.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай, як і раніше,

$$a_\nu := \|H_\nu(f)\|_{S^p}, \quad \nu = 0, 1, \ldots .$$

Тоді

$$\|f\|_{S^p} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \|H_\nu(f)\|_{S^p}^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} = \big((1-\varrho)+\varrho\big)^\nu = 1, \ \nu = 0, 1, \ldots, \quad (8)$$

то

$$\|f - A_{\varrho,r}^{\Delta}(f)\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=r}^{\infty} |1-\lambda_{\nu,r}(\varrho)|^p a_\nu^p =$$

$$= \sum_{\nu=r}^{\infty} \left(\sum_{k=r}^{\nu} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k}\right)^p a_\nu^p \geq$$

$$\geq (1-\varrho)^{rp} \sum_{\nu=r}^{\infty} \binom{\nu}{r}^p \varrho^{(\nu-r)p} a_\nu^p.$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{(r!)^p} \left\| \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} P(f)(\varrho, \cdot) \right\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=r}^{\infty} \binom{\nu}{r}^p a_\nu^p \varrho^{(\nu-r)p}.$$

На підставі цих співвідношень і рівності (3) бачимо, що при $\varrho \to 1-$

$$\big\|P(f_{[r]})(\varrho, \cdot)\big\|_{S^p} \leq r!(1-\varrho)^{-r} \|f - A_{\varrho,r}^{\Delta}(f)\|_{S^p} = O(1)(1-\varrho)^{\alpha-1}.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Для будь-якого $n > r$ і будь-якого $\varrho \in [0, 1)$

$$\frac{1}{(r!)^p} \left\| \frac{\partial^r}{\partial \varrho^r} P(f)(\varrho, \cdot) \right\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=r}^{\infty} \binom{\nu}{r}^p a_\nu^p \varrho^{(\nu-r)p} \geq$$

$$\geq \varrho^{(n-r)p} \sum_{\nu=r}^{n} \binom{\nu}{r}^p a_\nu^p = \varrho^{(n-r)p} \frac{1}{(r!)^p} \left\| S_n^\Delta \left(f_{[r]} \right) \right\|_{S^p}^p .$$

Покладемо $\varrho = 1 - 1/n$. В цьому випадку із попереднього співвідношення з урахуванням умови 2) випливає, що при $n \to \infty$

$$\left\| S_n^\Delta \left(f_{[r]} \right) \right\|_{S^p} \leq O(1) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} n^{1-\alpha} = O(1) n^{1-\alpha}.$$

3) $\Rightarrow$ 4). Покладемо $g = f_{[r-1]}$ і $b_\nu = \|H_\nu(g)\|_{S^p}$. Тоді

$$\left\| g - \sigma_n^\Delta(g) \right\|_{S^p}^p = \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu b_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^p} (\nu b_\nu)^p.$$

З цієї рівності, застосувавши до останньої суми перетворення Абеля $\big($це законно, оскільки $\sum_{k=1}^{\nu} (k b_k)^p = o(1) \nu^p, \ \nu \to \infty\big)$, одержимо співвідношення

$$\left\| g - \sigma_n^\Delta(g) \right\|_{S^p}^p =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu b_\nu)^p - \frac{1}{n^p} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu b_\nu)^p +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\nu-1)^p} - \frac{1}{\nu^p} \right) \sum_{k=1}^{\nu-1} (k b_k)^p \leq$$

$$\leq p \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{p+1}} \left\| S_\nu^\Delta(g_{[1]}) \right\|_{S^p}^p - \frac{1}{(n+1)^{p+1}} \left\| S_n^\Delta(g_{[1]}) \right\|_{S^p}^p =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^{p\alpha+1}} - o(1) \frac{1}{n^{p\alpha}} = O(1) \frac{1}{n^{p\alpha}}, \quad n \to \infty.$$

4) $\Rightarrow$ 5). Нехай так само, як і в попередньому випадку $g = f_{[r-1]}$ і $b_\nu = \|H_\nu(g)\|_{S^p}$. Тоді

$$\left\|S_n^\triangle(g) - \sigma_n^\triangle(g)\right\|_{S^p} = \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu b_\nu)^p \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^p}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu b_\nu)^p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu^p =$$

$$= \left\|g - \sigma_n^\triangle(g)\right\|_{S^p}^p = O(1)n^{-p\alpha},\ n \to \infty.$$

5) $\Rightarrow$ 1). З тотожності (8) випливає, що для будь-якого $\varrho \in [0,1]$

$$\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k} \le 1, \quad \nu \ge r.$$

Внаслідок цього справджується співвідношення

$$\|f - A_{\varrho,r}^\triangle(f)\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=r}^{\infty}\left(\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k}\right)^p a_\nu^p \le \|f\|_{S^p}^p,$$

на основі якого робимо висновок про те, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і всіх $\varrho \in [0,1)$

$$\|f - A_{\varrho,r}^\triangle(f)\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=r}^{n}\left(\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k}\right)^p a_\nu^p + \varepsilon. \tag{9}$$

Покажемо тепер, що для всіх $\nu \ge r$ виконується нерівність

$$\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho)^k\varrho^{\nu-k} \le \binom{\nu}{r}(1-\varrho)^r \quad \forall\ \varrho \in [0,1]. \tag{10}$$

Поклавши $m = \nu - r$ і

$$c_k = \frac{\binom{\nu}{k+r}}{\binom{\nu}{r}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

помічаємо, що нерівність (10) справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{m} c_k (1-\varrho)^k \varrho^{m-k} \le 1 \quad \forall\ \varrho \in [0,1].$$

Щоб переконатися в істинності цієї нерівності досить зауважити, що

$$c_k = \frac{\nu!}{(k+r)!(\nu-k-r)!} \cdot \frac{r!(\nu-r)!}{\nu!} \le \frac{(\nu-r)!}{k!(\nu-r-k)!} = \binom{m}{k}$$

і скористатися формулою бінома (див. (8)).

Отже, продовжуючи далі оцінку (9) з урахуванням (10), одержимо

$$\|f - A^{\Delta}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} \le$$

$$\le (1-\varrho)^{pr} \sum_{\nu=r}^{n} \binom{\nu}{k}^p a^p_\nu + \varepsilon = \frac{(1-\varrho)^{pr}}{(r!)^p} \|S^{\Delta}_n(f_{[r]})\|^p_{S^p} + \varepsilon =$$

$$= \frac{(1-\varrho)^{pr}(n+1)^p}{(r!)^p} \left\|S^{\Delta}_n(f_{[r-1]}) - \sigma^{\Delta}_n(f_{[r-1]})\right\|^p_{S^p} + \varepsilon.$$

Покладемо тепер у цих співвідношеннях $n = n_\varrho = [(1-\varrho)^{-1}]$, де $[\cdot]$ означає цілу частину числа. Тоді при $\varrho \to 1-$

$$\|f - A^{\Delta}_{\varrho,r}(f)\|^p_{S^p} =$$

$$= O(1)(1-\varrho)^{pr} n^p_\varrho \left\|S^{\Delta}_{n_\varrho}(f_{[r-1]}) - \sigma^{\Delta}_{n_\varrho}(f_{[r-1]})\right\|^p_{S^p} + \varepsilon =$$

$$= O(1)(1-\varrho)^{p(r+\alpha-1)} + \varepsilon.$$

Внаслідок довільності ε це співвідношення й доводить імплікацію 4) $\Rightarrow$ 1).

Доведемо тепер другу частину теореми. Для цього покажемо, що справджуються імплікації 6) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 6).

Покладемо $g := f_{[r-1]}$ і $b_\nu := \|H_\nu(g)\|_{S^p}$. Отже, якщо $f_{[r-1]} \in$

$\in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p) \cap L_{1,Y}$, то $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, S^p) \cap L_{1,Y}$ і при $|h| \to 0$

$$2^p \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^p \left|\sin \frac{\nu h}{2}\right|^p = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^p |1 - e^{i\nu h}|^p = \|g - g_h\|_{S^p}^p = O(1)|h|^\alpha.$$

Звідси, поклавши $h_n := \pi/n,\ n \in \mathbb{N}$, з урахуванням нерівності $\nu h_n \leq \pi \sin(\nu h_n/2)$, яка має місце для всіх $\nu = 1, 2, \ldots, n$, отримаємо співвідношення

$$\|S_n^\Delta(g_{[1]})\|_{S^p}^p = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^p b_\nu^p \leq \frac{1}{h_n^p} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu h_n)^p b_\nu^p \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{h_n^p} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^p \left|\sin \frac{\nu h_n}{2}\right|^p \leq \frac{\pi}{h_n^p} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^p \left|\sin \frac{\nu h_n}{2}\right|^p =$$

$$= O(1) h_n^{p(\alpha-1)} = O(1) n^{p(1-\alpha)}, \quad n \to \infty.$$

Отже, імплікацію 6) $\Rightarrow$ 3) теж доведено. Далі з урахуванням доведеної вище рівносильності тверджень 3) та 4) залишається показати, що 4) $\Rightarrow$ 6).

Нехай $f_{[r-1]} \in L_{1,Y}$, тоді, поклавши $n = 1/[h],\ h > 0$, одержимо низку співвідношень

$$\|g - g_h\|_{S^p}^p = 2^p \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^p \left|\sin \frac{\nu h}{2}\right|^p \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu^p \left|2\sin\frac{\nu}{2n}\right|^p + 2^p \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu^p \leq$$

$$\leq \frac{2^p}{n^p} \sum_{\nu=1}^{n-1} (\nu b_\nu)^p + 2^p \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu^p = 2^p \left\|g - \sigma_{n-1}^{\Delta}(g)\right\|_{S^p}^p =$$

$$= O(1)\frac{1}{n^{p\alpha}} = O(1)h^{p\alpha}, \quad n \to \infty.$$

Теорему 1 доведено.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 467 с.
2. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 8. — С. 1121–1147.
3. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. — М. : Мир, 1974. — 160 с.
4. *Бугров С. Я.* Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка// Mathematica(Cluj) — 1968. — Т. 5 (28). — С. 5–25.
5. *Бугров С. Я.* Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов // Труды Мат. ин-та АН СССР. — 1972. — Т. 117. — С. 47–61.
6. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора–Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 58, № 9. — С. 1253–1260.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 538 с.
10. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birhäuser, 1971. — 553 p.
11. *Lorentz G. G.* Fourier–Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Z. — 1948. — V. 51. — P. 135–149.