Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 284-301

УДК 517.5

В. И. Рукасов, С. О. Чайченко
(Славян. гос. пед. ун-т, Славянск)

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАССАХ $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$

Для верхних граней уклонений операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ в метрике пространств $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$, найдены оценки сверху. Показывается, что полученные неравенства являются точными на некоторых подмножествах функций.

Пусть $\psi(v)$ — непрерывная при всех $v \geq 0$ функция, для которой почти при всех $t \in \mathbb{R}$ существует преобразование

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \, dv, \qquad (1)$$

в котором β — фиксированное действительное число.

Пусть, далее, $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$, — множество функций φ, заданных на действительной оси $\mathbb{R}$ (и не обязательно периодических), имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & p \in [1; \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Тогда через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, следуя А.И. Степанцу [1, с. 168], обозначаем множество функций $f \in \widehat{L}_1$, которые почти при всех $x \in \mathbb{R}$ задаются сверткой

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t)\;dt, \tag{2}$$

где A_0 — некоторая постоянная, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а интеграл понимается как предел интегралов по симметричным расширяющимся промежуткам. Если $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ и при этом $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\widehat{L}_1$, то полагают $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Подмножества непрерывных функций из $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ и $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначают соответственно через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}$ и $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (2) называют (ψ,β)-производной функции $f(\cdot)$ и для неё используют обозначение $\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ используются операторы, предложенные А.И. Степанцом [1, с. 176], вида

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)\;dt, \tag{3}$$

где $\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)$ — преобразование вида (1) произведения $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$, в котором

$$\lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c, \\ \frac{\sigma-v}{\sigma-c}, & c \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем c — некоторое число из промежутка $[0,\sigma)$.

Можно показать (см., например, [1, с. 181]), что если $f \in$ $\in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, где $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ — подмножество периодических функций из класса $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, а $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 0$, и её преобразование $\widehat{\psi}(t)$ суммируемо на $\mathbb{R}$, то для любого $c < \sigma$

$$V_{\sigma,c}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k<\sigma} \lambda_{\sigma,c}(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (5)$$

где a_0, a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$ мы называем операторами Валле Пуссена функции $f(x)$, поскольку из соотношения (5) следует, что в периодическом случае при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ и $c = n-p$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$, эти операторы совпадают с известными суммами Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

где $S_k(f;x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$.

Результаты, относящиеся к приближениям операторами вида (3) классов $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, детально изложены в монографии [1], а также приведены в работах [2, 3].

Здесь излагаются результаты, связанные с оценками норм величин

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) - V_{\sigma,c}(f;x), \qquad f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}, \qquad (6)$$

в пространствах $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$, в случае, когда функции ψ, определяющие класс $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, имеют вид

$$\psi(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0;1], \\ e^{-\alpha v}, & v > 1, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ — произвольное действительное число, $\psi_1(v)$ — некоторая абсолютно непрерывная функция, имеющая на отрезке

$[0;1]$ производную $\psi_1'(v)$ ограниченной вариации, и такая, что $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$ и $\psi_1(1)=e^{-\alpha}$. При этом преобразование (1) суммируемо и, как показано в [1], $V_{\sigma,c}(f;x)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_\sigma$ — целых функций экспоненциального типа, не превышающего σ. В этом случае для множества $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ используется обозначение $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$. Заметим, что в периодическом случае классы $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ совпадают с множествами $L^{q}_{\beta},\ q=e^{-\alpha}$, интегралов Пуассона (см., например, [4, с. 301]).

Поведение уклонений (6) на соответствующих классах периодических функций впервые рассматривалось в работе С.М. Никольского [5], в которой он им для величин верхних граней уклонений сумм Фурье на классах интегралов Пуассона в равномерной метрике установил асимптотические равенства. Впоследствии, остаточные члены этих равенств были уточнены С.Б. Стечкиным [6]. В совместной работе А.И. Степанца и А.С. Сердюка [7] для величин (6) в случае приближения суммами Фурье интегралов Пуассона найдены оценки типа Лебега. А.И. Степанец [8] распространил упомянутые результаты Никольского–Стечкина на классы $C^{q}_{\beta}H_{\omega},\ q=e^{-\alpha},\ \ H_{\omega}=\{f\in\in C:\ \omega(f;\cdot)\le\omega(\cdot)\}$, где $\omega(f;\cdot)$ — модуль непрерывности функции f, $\omega(\cdot)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Поведение величин верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах интегралов Пуассона изучалось в работах [9, 10], где для этих величин в случае, когда одновременно $n\to\infty$ и $n-p\to\infty$ ($p=p(n)$ — параметр метода Валле Пуссена), найдены асимтотические равенства. Для произвольных значений параметра p соответствующие равенства в равномерной и интегральной метриках были найдены А.С. Сердюком [11]. В нашей работе при доказательстве основных утверждений будем придерживаться схемы, предложенной именно в работе [11].

Пусть

$$W^2 = \left\{ v: \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(t)}{(1+|t|)^2}\, dt < \infty \right\}, \quad W^2_\sigma = \{u \in \mathcal{E}_\sigma: \ u \in W^2\},$$

и

$$E_\sigma(\varphi)_{\widehat{p}} = \inf_{u \in W^2_\sigma} \|\varphi(\cdot) - u(\cdot)\|_{\widehat{p}} \tag{7}$$

— величина наилучшего приближения функции φ посредством целых функций экспоненциального типа, не превышающего σ. Пусть, далее,

$$E_\sigma(\mathfrak{N})_{\widehat{p}} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} E_\sigma(\varphi)_{\widehat{p}}.$$

Из общих утверждений работы [1, с. 209], в частности, следует, что

$$E_\sigma(\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p})_{\widehat{p}} \le K e^{-\alpha\sigma}, \tag{8}$$

где $\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p} = \{f: \ f \in \widehat{L}^\alpha_\beta \widehat{L}_p, \ f^\alpha_\beta \in W^2, \ \|f^\alpha_\beta\|_{\hat{p}} \le 1\}$. Соотношение (8) дает оценку сверху величины наилучшего приближения класса $\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p}$ при помощи целых функций экспоненциального типа, не превышающего σ.

В работе [12] нами был рассмотрен случай, когда для параметров σ и c, определяющих операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$, одновременно выполнялись условия $c \to \infty$ и $\sigma - c \to \infty$. Из результатов этой работы в сочетании с соотношением (8), в частности, следует, что в расмотренном случае порядок верхних граней приближений классов $\widehat{L}^\alpha_\beta \widehat{L}_p$ при помощи операторов Валле Пуссена хуже наилучшего. Как следует из результатов, изложенных в работе [12], в случае, когда $0 < K_1 \le \sigma - c \le K_2 < \infty$, где K_1 и K_2 — некоторые абсолютные постоянные, операторы Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^\alpha_\beta \widehat{L}_p$ доставляют приближение порядка $O(e^{-\alpha\sigma})$, $\sigma \to \infty$. Этот факт обуславливает актуальность рассмотрения данного случая.

Основной результат содержится в таком утверждении.

Теорема 1 *Пусть* $f \in \widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in [1;\infty]$. *Тогда, если* $\sigma \to \infty$, *то*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \leq$$

$$\leq \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+\,O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\right)\right]E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}, \tag{9}$$

где $E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}$ *определяется соотношением* (7), *а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по параметрам* α, β, σ, c, p *и* f.

Доказательство. Для произвольной функции $f \in \widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ получаем

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\alpha}_{\beta}(x-t)\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t) = \widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\tau_{\sigma,c}(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\,dv, \tag{11}$$

$$\tau_{\sigma,c}(v) = [1-\lambda_{\sigma,c}(v)]e^{-\alpha v} = \begin{cases} 0, & 0 \leq v < c, \\ \frac{v-c}{\sigma-c}\,e^{-\alpha v}, & c \leq v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \leq v. \end{cases}$$

Для оценки величин $\rho_{\sigma,c}(f;x)$ будем использовать следующее утверждение, которое является следствим теоремы 4.1 из [1, с. 187].

Лемма 1 *Для любых $\sigma > 0$, $0 \le c < \sigma$, $\forall f \in \hat{L}^{\alpha}_{\beta}\hat{L}_p$, $p \in \in [1,\infty]$, и $\forall \beta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} \le E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\hat{p}} \|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1, \tag{12}$$

в котором величина $E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\hat{p}}$ определяется соотношением (7), *а*

$$\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)|\ dt, \tag{13}$$

где $\hat{\tau}_{\sigma,c}(\cdot)$ — функция из (11).

Имеем

$$\pi\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \int\limits_{0}^{\infty} \tau_{\sigma,c}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dv =$$

$$= \int\limits_{c}^{\sigma} \frac{v-c}{\sigma-c}\ e^{-\alpha v}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dv +$$

$$+ \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dv := I^{(1)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t;c) + I^{(2)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t). \tag{14}$$

Интегрируя по частям, находим

$$I^{(1)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t;c) = -\int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dv +$$

$$+ \frac{1}{\sigma-c}\int\limits_{c}^{\sigma}\int\limits_{v}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dx\ dv =$$

$$= -I^{(2)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t) + \frac{1}{\sigma - c}\int\limits_c^\sigma\int\limits_v^\infty e^{-\alpha x}\cos\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dx\;dv. \qquad (15)$$

Сопоставляя соотношения (14) и (15), получаем

$$\pi\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\sigma - c}\int\limits_c^\sigma\int\limits_v^\infty e^{-\alpha x}\cos\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dx\;dv :=$$

$$:= \frac{1}{\sigma - c}\int\limits_c^\sigma P_{\alpha,\beta}(v;t)\;dv. \qquad (16)$$

Дважды интегрируя по частям и выполняя элементарные преобразования, находим

$$P_{\alpha,\beta}(v;t) = \int\limits_v^\infty e^{-\alpha x}\cos\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\alpha^2 + t^2}\left[\alpha\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - t\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\cos\left(vt + \theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \theta(\alpha;t) = \operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\int\limits_c^\sigma e^{-\alpha v}\cos\left(vt + \theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dv.$$

Таким образом, для величины $\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1$ справедливо представление

$$\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi(\sigma-c)\sqrt{\alpha^2+t^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{c}^{\sigma} e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv \right| dt :=$$

$$:= \frac{1}{\pi(\sigma-c)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)|}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\, dt. \qquad (18)$$

Представим функцию $\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)$ в более удобном для дальнейших исследований виде. Имеем

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t) = \int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv -$$

$$- \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv =$$

$$= \int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v} \left[\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \cos\theta(\alpha;t) - \sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \sin\theta(\alpha;t) \right] dv -$$

$$- \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v} \left[\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \cos\theta(\alpha;t) - \sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \sin\theta(\alpha;t) \right] dv =$$

$$= \cos\theta(\alpha;t) \left(\int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) - \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t) \left(\int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v} \sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) - \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v} \sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \cos\theta(\alpha;t)\left(P_{\alpha,\beta}(c;t) - P_{\alpha,\beta}(\sigma;t)\right) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\left(P_{\alpha,\beta-1}(c;t) - P_{\alpha,\beta-1}(\sigma;t)\right). \qquad (19)$$

Применяя теперь формулу (17) к каждой из функций, стоящих в правой части соотношеня (19), находим

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t) = \cos\theta(\alpha;t)\left[\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\left(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\left(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right] -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\left[\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\sin\left(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\sin\left(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\left[\cos\theta(\alpha;t)\cos\left(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \sin\theta(\alpha;t)\sin\left(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right] -$$

$$- \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\left[\cos\theta(\alpha;t)\cos\left(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \sin\theta(\alpha;t)\sin\left(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right].$$

Далее, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(ct+2\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)-$$

$$-\frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(\sigma t+2\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\bigg\{\Big[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos 2\theta(\alpha;t)-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin 2\theta(\alpha;t)\Big]-$$

$$-e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)-$$

$$-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big]\bigg\}=$$

$$=\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\bigg\{\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big[\cos 2\theta(\alpha;t)-$$

$$-e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big]-$$

$$-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big[\sin 2\theta(\alpha;t)-e^{-\alpha(\sigma-c)}\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big]\bigg\}=$$

$$=\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\bigg[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)G_{\alpha,\sigma-c}(t)-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)H_{\alpha,\sigma-c}(t)\bigg],\quad(20)$$

где

$$G_{\alpha,\sigma-c}(t):=\cos 2\theta(\alpha;t)-e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big),\quad(21)$$

$$H_{\alpha,\sigma-c}(t):=\sin 2\theta(\alpha;t)-e^{-\alpha(\sigma-c)}\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big).\quad(22)$$

Далее, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, доказанное в работе [13].

Лемма 2 *Пусть $g(t)$ и $h(t)$ — абсолютно интегрируемые на действительной оси функции с ограниченной вариацией:*

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) < \infty, \qquad \bigvee_{-\infty}^{\infty} h(t) < \infty,$$

σ и γ — произвольные действительные числа. Положим

$$\varphi(t) = g(t)\cos(\sigma t + \gamma) + h(t)\sin(\sigma t + \gamma),$$

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}, \qquad K = \bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) + \bigvee_{-\infty}^{\infty} h(t).$$

Тогда

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\ dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(t)\ dt + O(1)K\sigma^{-1},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по σ.

Положим

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)}\frac{\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}, \tag{23}$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)}\ \frac{e^{-\alpha c}}{\alpha^2 + t^2} G_{\alpha,\sigma-c}(t),$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)}\ \frac{e^{-\alpha c}}{\alpha^2 + t^2} H_{\alpha,\sigma-c}(t), \quad \gamma = \frac{\beta\pi}{2},$$

где $G_{\alpha,\sigma-c}(t)$ и $H_{\alpha,\sigma-c}(t)$ — функции, определяемые соотношениями (21) и (22) соответственно. Очевидно, что функции $g(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют условию леммы 2. Исходя из равенства (20), применим лемму 2. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\ dt = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{G^2_{\alpha,\sigma-c}(t) + H^2_{\alpha,\sigma-c}(t)}}{\alpha^2 + t^2}\ dt + \right.$$

$$+O(1)\left(\bigvee_{-\infty}^{\infty}\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}+\bigvee_{-\infty}^{\infty}\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}\right)\frac{1}{c}\Bigg]. \tag{24}$$

Согласно соотношениям (21) и (22) имеет место равенство

$$\sqrt{G^2_{\alpha,\sigma-c}(t)+H^2_{\alpha,\sigma-c}(t)}=$$

$$=\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}. \tag{25}$$

Подсчитаем вариации функций из остаточного члена формулы (24). Согласно соотношению (17) $\theta(\alpha;t)=\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}$, поэтому

$$\frac{\cos 2\theta(\alpha;t)}{\alpha^2+t^2}=\frac{\alpha^2-t^2}{(\alpha^2+t^2)^2}:=g_\alpha(t), \tag{26}$$

$$\frac{\sin 2\theta(\alpha;t)}{\alpha^2+t^2}=\frac{2\alpha t}{(\alpha^2+t^2)^2}:=h_\alpha(t). \tag{27}$$

Функции $g_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t)$ — абсолютно интегрируемы и имеют ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, поскольку сами они и модули их производных

$$g'_\alpha(t)=2t\frac{t^2-3\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3},\qquad h'_\alpha(t)=2\alpha\frac{3t^2-\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3},$$

в окрестности точки $t=0$ ограничены, а при $t\to\infty$ имеют порядки $O(t^{-3})$ и $O(t^{-4})$ соответственно. При этом для них выполняются соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_\alpha(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha^2-t^2|}{(\alpha^2+t^2)^2}\,dt\le 2\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+t^2)^2}=\frac{\pi}{\alpha}, \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_\alpha(t)|\,dt=4\alpha\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{(\alpha^2+t^2)^2}=\frac{2}{\alpha}, \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g'_\alpha(t)|\, dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left| t\frac{t^2-3\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3} \right| dt \le \frac{4}{\alpha^2}, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h'_\alpha(t)|\, dt = 2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{3t^2-\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3} \right| dt \le \frac{6\pi}{\alpha^2}. \tag{31}$$

Учитывая (26), (27), на основании равенств (21) и (22) получаем

$$\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = g_\alpha(t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big(g_\alpha(t)\cos(\sigma-c)t - h_\alpha(t)\sin(\sigma-c)t\Big), \tag{32}$$

$$\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = h_\alpha(t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big(g_\alpha(t)\sin(\sigma-c)t + h_\alpha(t)\cos(\sigma-c)t\Big). \tag{33}$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (28)–(33), находим

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}\right)' \right| dt = O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right) \tag{34}$$

и

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}\right)' \right| dt = O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right). \tag{35}$$

Таким образом, сопоставляя равенства (24), (25), (34) и (35), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\right)\right]. \tag{36}$$

Утверждение теоремы вытекает из сопоставления соотношений (12), (18), (23) и (36). Теорема доказана.

Отметим, что неравенство (9) является точным на некоторых подмножествах функций. Действительно, пусть

$$\widehat{S}_p = \left\{ f \in \widehat{L}_p : \quad \|f\|_{\widehat{p}} \le 1 \right\}, \qquad \widehat{L}^\alpha_\beta \widehat{S}_p = \widehat{L}^\alpha_{\beta,p},$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\alpha_{\beta,p}; V_{\sigma,c}) = \sup_{f\in \widehat{L}^\alpha_{\beta,p}} \|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}}.$$

Тогда из теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие 1 *Пусть* $p \in [1;\infty]$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $\sigma \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\alpha_{\beta,p}; V_{\sigma,c}) \le$$

$$\le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\right)\right], \tag{37}$$

которое при $p = \infty$ *является равенством. Здесь* $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные по* α, β, p, σ *и* c.

Доказательство. Если $f \in \widehat{L}^\alpha_{\beta,p}$, то $\|f^\alpha_\beta\|_{\widehat{p}} \le 1$. Отсюда следует, что $E_c(f^\alpha_\beta)_{\widehat{p}} \le 1$. Рассматривая верхние грани обеих частей соотношения (9) на множествах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}$, получаем неравенство (37).

Обозначим через $f^*(x)$ функцию, производная которой $f^{\alpha}_{\beta}(x)$ задана равенством

$$f^{\alpha}_{\beta}(x) = \operatorname{sign} \widehat{r}_{\sigma,c}(-x;\beta).$$

Очевидно, что такая функция $f^*(x)$ всегда существует и принадлежит классу $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,\infty}$. Тогда, учитывая соотношение (10), будем иметь

$$\rho_{\sigma,c}(f^*;0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{r}_{\sigma,c}(t;\beta)|\ dt. \tag{38}$$

Из соотношений (18), (23) и (36) вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{r}_{\sigma,c}(t)|\ dt =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c} \left[\frac{4}{\pi^2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - 2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2 + t^2}\ dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\right)\right], \tag{39}$$

Таким образом, сопоставляя (38) и (39), приходим к выводу, что в случае, когда $p = \infty$, соотношение (37) является равенством.

Соотношения (37) означает, что при $0 < K_1 \le \sigma - c \le K_2 < < \infty$, где K_1 и K_2 — некоторые абсолютные постоянные, операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$ на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$ доставляют приближение по порядку совпадающее с величиной наилучшего приближения.

При этом, если $p = \infty$, то соотношение (37) является равенством, которое обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Рассмотрим теперь аппроксимативные свойства операторов Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$ в случае, когда одновременно $c \to \infty$ и $\sigma - c \to \infty$. На основании очевидных соотношений

$$1-e^{-\alpha(\sigma-c)} \leq \sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}} \leq 1+e^{-\alpha(\sigma-c)}$$

получаем при $\sigma - c \to \infty$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}dt =$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} + O(1)\frac{e^{-\alpha(\sigma-c)}}{\alpha}. \tag{40}$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие 2 . *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при $c \to \infty$ и $\sigma - c \to \infty$ выполняется неравенство*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \leq \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{2}{\pi\alpha} + O(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c} + \frac{e^{-\alpha(\sigma-c)}}{\alpha}\right)\right] E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}, \tag{41}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по параметрам α, β, σ, c, p и f.

Соотношение (41) было получено в работе [12].

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

2. *Рукасов В.И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 5. — С. 682–691.
3. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 3. — С. 414–424.
4. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
5. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
6. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
7. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375–395.
8. *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
9. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування : Праці Ін-ту математики НАН України. — 1998. — Т. 20. — С. 228–241.
10. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
11. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
12. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 228–237.
13. *Соколенко І.В.* Наближення $\overline{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 2005. — 114 с.