Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 23-36

УДК 517.5

С. П. Войтенко (Ін–т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОВЕДІНКУ СУМИ ВІДХИЛЕНЬ СУМ ФУР'Є В СИМЕТРИЧНИХ ТОЧКАХ

Одержано асимптотичну формулу для верхніх граней суми відхилень сум Фур'є в симетричних точках в рівномірній метриці на класах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$.

Нехай L — множина сумовних 2π-періодичних функцій, $f \in L$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— частинна сума порядку n цього ряду і $\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x)$.

В роботі розглядаються величини

$$\mathfrak{R}(f;x;n) = \rho_n\left(f; x + \frac{\pi}{2n}\right) + \rho_n\left(f; x - \frac{\pi}{2n}\right) \qquad (1)$$

у випадку, коли функції $f(\cdot)$ вибираємо з класів $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, що введені в роботі [1] таким чином.

Нехай $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо, для даної функції $\varphi \in L$ ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\psi_1(k)A_k(\varphi;x) + \psi_2(k)\ \widetilde{A}_k\ (\varphi;x)\Bigg),$$

в якому A_0 — деяке число і

$$\widetilde{A}_k\ (\varphi;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції f, то f називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції φ і пишуть $f(\cdot) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(\varphi;\cdot)$. При цьому функцію φ називають $\overline{\psi}$-похідною функції f і пишуть $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Множину $\overline{\psi}$-інтегралів всіх функцій $\varphi \in L$ позначають через $L^{\overline{\psi}}$.

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із L, то через $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають множину $\overline{\psi}$-інтегралів всіх функцій із $\mathfrak{N}$; якщо C — підмножина неперервних функцій із L, то покладають $C^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} \cap C$ і $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} \cap C$.

У випадку, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею $S^0_{\mathcal{M}}$ в просторі $\mathcal{M}^0$ 2π -періодичних суттєво обмежених і ортогональних константі функцій:

$$S^0_{\mathcal{M}} = \left\{\varphi \in L : \operatorname*{ess\,sup}_{t}\ |\varphi(t)| \leq 1, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\ dt = 0\right\},$$

множину $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають через $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$.

Будемо вважати, що елементи систем чисел $\psi_i(k)$ є значеннями неперервних невід'ємних функцій $\psi_i(x)$, $x \geq 0$.

Наслідуючи О.І. Степанця [1], через $\mathfrak{M}$ будемо позначати множину всіх неперервних додатних і опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$ таких, що $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$, а також покладати

$$\mathfrak{M}' = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}\ dv < \infty\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: \quad 0 < \frac{v}{\eta(v) - v} \leq K < \infty, \quad v \geq 1\},$$

$$\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}',$$

де

$$\eta(v) = \eta(\psi; v) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(v)\right), \quad v \geq 1,$$

а $\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до функції $\psi(\cdot)$.

Основний результат даної роботи міститься в такому твердженні.

Теорема. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *тоді при* $n \in N$

$$\sup_{f \in C^{\overline{\psi}}_{\infty}} \left\| \rho_n\Big(f; x + \frac{\pi}{2n}\Big) + \rho_n\Big(f; x - \frac{\pi}{2n}\Big) \right\|_C = \frac{4}{\pi} \int\limits_n^{\infty} \frac{\psi_2(v)}{v}\, dv + \gamma_n, \quad (2)$$

де $\|\varphi\|_C = \max\limits_x |\varphi(x)|$,

$$|\gamma_n| < 2\big(\mathrm{Si}\pi + \frac{1}{n} + 2\big)\psi_1(n) + \frac{4}{\pi}\big(2 + (1+\pi)\ln 3\big)\psi_2(n) +$$

$$+8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \big|\psi'_1(n)\big|\, n + 10\frac{2}{3}\, \big|\psi'_2(n)\big|\, n,$$

а $\mathrm{Si}\pi = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то, згідно з теоремою 3.12.1 монографії [2], знайдуться додатні сталі K_1 і K_2 такі, що $\forall t \geq 1$

$$\frac{\psi_1(t)}{t|\psi'_1(t)|} \geq K_1 \quad \text{і} \quad \frac{\psi_2(t)}{t|\psi'_2(t)|} \geq K_2. \quad (3)$$

Враховуючи (3), з теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, *тоді при* $n \in N$

$$\sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \left\| \rho_n\Big(f; x + \frac{\pi}{2n}\Big) + \rho_n\Big(f; x - \frac{\pi}{2n}\Big) \right\|_C = \frac{4}{\pi} \int\limits_n^\infty \frac{\psi_2\,(v)}{v}\, dv + \gamma_n, \quad (4)$$

де

$$|\gamma_n| < 2\big(\mathrm{Si}\pi + \frac{1}{n} + 2 + K_1\big)\psi_1\,(n) + \frac{4}{\pi}\big(2 + (1+\pi)\ln 3 + K_2\big)\psi_2\,(n).$$

Зауваження. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $\alpha_0^{(1)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi_2(t)}{t|\psi_1'(t)|}$ і $\alpha_0^{(2)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\psi_2(t)}{t|\psi_2'(t)|}$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty \frac{\psi_2(v)}{v} dv}{\psi_1(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\frac{\psi_2(t)}{t}}{\psi_1'(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_2(t)}{t|\psi_1'(t)|} = \alpha_0^{(1)}$$

і, аналогічно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty \frac{\psi_2(v)}{v} dv}{\psi_2(t)} = \alpha_0^{(2)}.$$

Таким чином, співвідношення (2) буде асимтотичною рівністю за умов $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)} = \infty$, що, наприклад, має місце для функцій

$$\psi_1(t) = \ln^{-\varepsilon_1}(t+1) \quad \text{і} \quad \psi_2(t) = \ln^{-1-\varepsilon_2}(t+1) \quad \text{при } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0.$$

Доведення теореми. В роботі [3, с.27] показано, що якщо $f \in C^{\overline{\psi}}\mathcal{M}$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то в кожній точці $x \in R$ виконується рівність

$$\rho_n\,(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t) \int\limits_n^\infty \Big(\psi_1\,(v) \cos vt + \psi_2\,(v) \sin vt\Big)\, dvdt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Big(\psi_1\,(n)\cos nt+\psi_2\,(n)\sin nt\Big)\,dt. \qquad (5)$$

Нехай

$$\Delta_n(x-t)=f^{\overline{\psi}}(x-t-\frac{\pi}{2n})+f^{\overline{\psi}}(x-t+\frac{\pi}{2n}),$$

тоді, враховуючи (1) і (5), маємо

$$\Re(f;x;n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_n(x-t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi_1\,(v)\cos vt\,dvdt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_n(x-t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi_2\,(v)\sin vt\,dvdt+\frac{\psi_1\,(n)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(x-t)\cos nt\,dt+$$

$$+\frac{\psi_2\,(n)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(x-t)\sin nt\,dt\stackrel{\mathrm{df}}{=}\mathcal{J}_n(\psi_1;f^{\overline{\psi}};x)_0+$$

$$+\mathcal{J}_n(\psi_2;f^{\overline{\psi}};x)_1+r_n(\psi_1;f^{\overline{\psi}};x)_0+r_n(\psi_2;f^{\overline{\psi}};x)_1. \qquad (6)$$

В рівності (6) два останні доданки дорівнюють нулю. Дійсно,

$$r_n(\psi_1;f^{\overline{\psi}};x)_0=$$

$$=\frac{\psi_1\,(n)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Big(\cos n(t-\frac{\pi}{2n})+\cos n(t+\frac{\pi}{2n})\Big)dt=$$

$$=\frac{\psi_1\,(n)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\,(\sin nt-\sin nt)\,dt=0. \qquad (7)$$

Аналогічно знаходимо, що

$$r_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; x)_1 = 0. \tag{8}$$

Далі для доведення теореми будуть необхідні такі твердження.

Лема 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, *тоді при* $n \in N$

$$\sup_{f^{\overline{\psi}} \in S^0_{\mathcal{M}}} \|\mathcal{J}_n(\psi_1; f^{\overline{\psi}}; x)_0\|_C < 2(\mathrm{Si}\pi + \frac{1}{n} + 2)\psi_1(n) + 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}|\psi_1'(n)|n. \tag{9}$$

Лема 2. *Нехай* $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *тоді при* $n \in N$

$$\sup_{f^{\overline{\psi}} \in S^0_{\mathcal{M}}} \|\mathcal{J}_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; x)_1\|_C = \frac{4}{\pi} \int_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\, dv + \alpha_n, \tag{10}$$

де

$$|\alpha_n| < \frac{4}{\pi}\big(2 + (1+\pi)\ln 3\big)\psi_2(n) + 10\frac{2}{3}|\psi_2'(n)|n. \tag{11}$$

Припустимо, що леми доведено. Тоді, враховуючи (1) і (6)–(8) та леми 1 і 2, одержуємо теорему.

Доведення леми 1. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $f^{\overline{\psi}} \in S^0_{\mathcal{M}}$ і $\mathcal{J}_n(\psi_1; f^{\overline{\psi}}; x)_0$ визначається рівністю (6).

Дотримуючись позначень роботи [2, с. 187], покладемо

$$I_2(t)_0 = \int_n^\infty \psi_1(v) \cos vt\, dv.$$

Далі, інтегруючи частинами, маємо

$$I_2(t)_0 = -\psi_1(n)\frac{\sin nt}{t} - \frac{1}{t}\int_n^\infty \psi_1'(v)\sin vt\, dv \overset{df}{=} I_4(t)_0 - I_3(t)_0. \tag{12}$$

Після цього, враховуючи (12), отримуємо

$$|\mathcal{J}_n(\psi_1; f^{\overline{\psi}}; x)_0| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t) \int\limits_{n}^{\infty} \psi_1(v)\Big(\cos v(t-\frac{\pi}{2n}) + \cos v(t+\frac{\pi}{2n})\Big)\, dvdt\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| I_4\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)_0 + I_4\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)_0\Big|\, dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_3(t)_0|\, dt. \quad (13)$$

Оскільки

$$I_4\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)_0 + I_4\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)_0 =$$

$$= -\psi_1(n)\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{2n}}\sin(nt+\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{t-\frac{\pi}{2n}}\sin(nt-\frac{\pi}{2})\right) =$$

$$= -\psi_1(n)\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{t-\frac{\pi}{2n}}\right)\cos nt,$$

і крім того, як випливає зі співвідношень (1.3.25) з [2] та (4.1.8)–(4.1.11) з [4],

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{t-\frac{\pi}{2n}}\right)\cos nt\right|\, dt < 2\Big(\mathrm{Si}\pi + \frac{1}{n}\Big),$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| I_4\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)_0 + I_4\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)_0\Big|\, dt < 2\psi_1(n)\Big(\mathrm{Si}\pi + \frac{1}{n}\Big). \quad (14)$$

В [2, с. 189–190] показано, що для довільних $\psi \in \mathfrak{M}$ і $a > 0$

$$\int\limits_{-a}^{a} |I_3(t)_0|\, dt \le 2\pi\psi_1(n) + 2a|\psi_1'(n)|n^2, \tag{15}$$

і

$$\int\limits_{a}^{\infty} |I_3(t)_0|\, dt \le \int\limits_{a}^{\infty} \left| \frac{1}{t} \int\limits_{n}^{n+\frac{2\pi}{t}} \psi_1'(v)\, dv \right| dt \le$$

$$\le 2\pi|\psi_1'(n)| \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\pi|\psi_1'(n)|\frac{1}{a}. \tag{16}$$

Звідси випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_3(t)_0|\, dt = \int\limits_{-a}^{a} |I_3(t)_0|\, dt + 2\int\limits_{a}^{\infty} |I_3(t)_0|\, dt \le$$

$$\le 2\pi\psi_1(n) + 2a|\psi_1'(n)|n^2 + 4\pi|\psi_1'(n)|\frac{1}{a}. \tag{17}$$

Права частина нерівності (17) набуває найменшого значення $2\pi\psi_1(n) + 4\sqrt{2\pi}|\psi_1'(n)|n$ в точці $a = \sqrt{2\pi}/n$.

Таким чином зі співвідношень (13), (14) і (17), поклавши $a = \sqrt{2\pi}/n$, отримуємо нерівність (9). Лему 1 доведено.

***Доведення леми* 2.** Нехай $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ і $f^{\overline{\psi}} \in S^0_{\mathcal{M}}$. Покладаючи

$$I_2(t)_1 = \int\limits_{n}^{\infty} \psi_2(v) \sin vt\, dv,$$

запишемо величину $\mathcal{J}_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; x)_1$ в такому вигляді:

$$\mathcal{J}_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; x)_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{|t|\le\frac{\pi}{2n}} + \int\limits_{|t|\ge\frac{\pi}{2n}} \right) \Delta_n(x-t) I_2(t)_1\, dt. \tag{18}$$

Покажемо, що при $t \in (0; \frac{\pi}{2n})$ $\quad I_2(t)_1 > 0$:

$$I_2(t)_1 = \int\limits_n^\infty \psi_2(v) \sin vt\, dv = \frac{1}{t} \int\limits_{nt}^\infty \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{t} \int\limits_{nt}^{\frac{\pi}{2}} \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau + \frac{1}{t} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{t} \int\limits_{nt}^{\frac{\pi}{2}} \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau - \frac{1}{t} \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \cos\tau \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^\infty + \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) \cos\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{t} \int\limits_{nt}^{\frac{\pi}{2}} \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau + \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) \cos\tau\, d\tau.$$

Оскільки при $\tau \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\sin\tau > 0$, то $\frac{1}{t} \int\limits_{nt}^{\frac{\pi}{2}} \psi_2\left(\frac{\tau}{t}\right) \sin\tau\, d\tau > 0$. Якщо $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то $\psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) < 0$ і $\lim\limits_{\tau \to \infty} \psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) = 0$ при $t \in (0; \frac{\pi}{2n})$. Функція $|\psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right)|$ — спадна, тому, застосовуючи теорему Лейбніца про знакозмінні ряди, маємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) \cos\tau\, d\tau = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} \psi_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) \cos\tau\, d\tau > 0.$$

Отже, при $t \in (0; \frac{\pi}{2n})$ справді $I_2(t)_1 > 0$.

Враховуючи цей факт, одержуємо

$$\left| \int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \Delta_n(x-t) I_2(t)_1\, dt \right| \le 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} I_2(t)_1\, dt =$$

$$= 4\int\limits_n^\infty \psi_2\Big(v\Big)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin vt\,dtdv = 4\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2\Big(v\Big)}{v}(1-\cos\frac{\pi}{2n}v)\,dv =$$

$$= 4\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv - 4\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\cos\frac{\pi}{2n}v\,dv. \qquad (19)$$

Функція $\frac{\psi_2(v)}{v}$ додатна на $[n;\infty)$, монотонно спадна і $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{\psi_2(v)}{v}=0$, а тому, застосовуючи теорему Лейбніца про знакозмінні ряди, маємо

$$\left|\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\cos\frac{\pi}{2n}v\,dv\right| = \left|\sum_{k=1}^\infty \int\limits_{(2k-1)n}^{(2k+1)n} \frac{\psi_2(v)}{v}\cos\frac{\pi}{2n}v\,dv\right| <$$

$$< \int\limits_n^{3n} \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv < \frac{\psi_2(n)}{n}\cdot 2n = 2\psi_2(n). \qquad (20)$$

Далі, враховуючи (19) і (20), одержуємо

$$\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \Delta_n(x-t)I_2(t)_1\,dt\right| \le 4\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(v)}{v}\,dv + 8\psi_2(n). \qquad (21)$$

Нарешті, щоб знайти необхідну оцінку другого доданку правої частини рівності (18), перепишемо його у вигляді:

$$\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi}{2n}} \Delta_n(x-t)I_2(t)_1\,dt =$$

$$= 2 \int\limits_{|t| \geq \frac{\pi}{n}} f^{\overline{\psi}}(x-t) \left(I_2(t - \frac{\pi}{2n})_1 + I_2(t + \frac{\pi}{2n})_1 \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} f^{\overline{\psi}}(x-t) I_2 \left(t + \frac{\pi}{2n} \right)_1 dt + \int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{0} f^{\overline{\psi}}(x-t) I_2 \left(t - \frac{\pi}{2n} \right)_1 dt. \quad (22)$$

Оцінимо кожен з інтегралів в правій частині (22) окремо. Нехай

$$I_3(t)_1 = \frac{1}{t} \int\limits_{n}^{\infty} \psi_2'(v) \cos vt \, dv \quad \text{і} \quad I_4(t)_1 = \psi_2(n) \frac{\cos nt}{t},$$

тоді, інтегруючи частинами, маємо

$$I_2(t)_1 = \psi_2(n) \frac{\cos nt}{t} + \frac{1}{t} \int\limits_{n}^{\infty} \psi_2'(v) \cos vt \, dv \stackrel{\mathrm{df}}{=} I_4(t)_1 + I_3(t)_1. \quad (23)$$

З огляду на (23) можемо записати таку оцінку:

$$\left| \int\limits_{|t| \geq \frac{\pi}{n}} f^{\overline{\psi}}(x-t) \left(I_4(t - \frac{\pi}{2n})_1 + I_4(t + \frac{\pi}{2n})_1 \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \psi_2(n) \int\limits_{|t| \geq \frac{\pi}{n}} \left| \frac{\cos(nt - \frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2n}} + \frac{\cos(nt + \frac{\pi}{2})}{t + \frac{\pi}{2n}} \right| dt =$$

$$= \psi_2(n) \int\limits_{|t| \geq \frac{\pi}{n}} \left| \left(\frac{1}{t - \frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{t + \frac{\pi}{2n}} \right) \sin nt \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{n} \psi_2(n) \int\limits_{t \geq \frac{\pi}{n}}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - \frac{\pi^2}{4n^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{n}\psi_2(n)\frac{n}{\pi}\ln\left(\frac{t-\frac{\pi}{2n}}{t+\frac{\pi}{2n}}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{n}}^{\infty} = 2\ln 3\psi_2(n). \qquad (24)$$

Внаслідок нерівності 5.4.50 з [2]:

$$|I_3(t)_1| \leq 2\pi\frac{|\psi_2'(n)|}{t^2} \quad \forall t > 0,$$

маємо

$$\Bigg|\int\limits_{|t|\geq\frac{\pi}{n}} f^{\overline{\psi}}(x-t)\left(I_3(t-\frac{\pi}{2n})_1 + I_3(t+\frac{\pi}{2n})_1\right)dt\Bigg| \leq$$

$$\leq 2\pi|\psi_2'(n)|\int\limits_{|t|\geq\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{(t-\frac{\pi}{2n})^2}+\frac{1}{(t+\frac{\pi}{2n})^2}\right)dt =$$

$$= 4\pi|\psi_2'(n)|\left(\frac{-1}{t-\frac{\pi}{2n}}-\frac{1}{t+\frac{\pi}{2n}}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{n}}^{\infty} = 10\frac{2}{3}\pi|\psi_2'(n)|n. \qquad (25)$$

Для оцінки другого інтеграла рівності (22), скористаємося нерівністю 4.3.35 з [2]:

$$\left|I_2(t+\frac{\pi}{2n})_1\right| \leq \int\limits_{n}^{n+\frac{2\pi}{t+\pi/(2n)}}\psi_2(v)\,dv \quad \forall t > 0.$$

Тоді

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} f^{\overline{\psi}}(x-t)I_2(t+\frac{\pi}{2n})_1\,dt\right| \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\left|I_2(t+\frac{\pi}{2n})_1\right|dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\left|\int\limits_{n}^{n+\frac{2\pi}{t+\pi/(2n)}}\psi_2(v)\,dv\right|dt \leq 2\pi\psi_2(n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{dt}{t+\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= 2\pi\psi_2(n)\ln\Big(t+\frac{\pi}{2n}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{n}} = 2\pi\ln 3\psi_2(n). \tag{26}$$

За допомогою міркувань, подібних до використаних при одержанні (26), отримуємо

$$\Big|\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{0} f^{\overline{\psi}}(x-t)I_2(t-\frac{\pi}{2n})_1\,dt\Big| \le 2\pi\ln 3\psi_2(n). \tag{27}$$

Об'єднуючи співвідношення (22) і (24)–(27), маємо

$$\Big|\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi}{2n}} \Delta_n(x-t)I_2(t)_1\,dt\Big| \le 4(1+\pi)\ln 3\psi_2\,(n)+10\frac{2}{3}\pi\big|\psi_2'\,(n)\big|n. \tag{28}$$

Далі, враховуючи (18), (21) і (28), одержуємо

$$\sup_{f^{\overline{\psi}}\in S^0_{\mathcal{M}}}\|\mathcal{J}_n(\psi_2;f^{\overline{\psi}};x)_1\|_C \le \frac{4}{\pi}\int\limits_n^{\infty}\frac{\psi_2\,(v)}{v}\,dv+\alpha_n, \tag{29}$$

де

$$|\alpha_n| < \frac{4}{\pi}\big(2+(1+\pi)\ln 3\big)\psi_2\,(n)+10\frac{2}{3}\,\big|\psi_2'\,(n)\big|\,n.$$

Знайдемо тепер для величини $\sup\limits_{f^{\overline{\psi}}\in S^0_{\mathcal{M}}}\|\mathcal{J}_n(\psi_2;f^{\overline{\psi}};x)_1\|_C$ необхідну оцінку знизу. Для цього на множині $I_n=\{t: t\in[-\frac{\pi}{n};\frac{\pi}{n}]\}$ означимо функцію $f_n^{\overline{\psi}}(t)$, поклавши

$$f_n^{\overline{\psi}}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} I_2(t-\frac{\pi}{2n})_1, & t\in(\frac{\pi}{2n};\frac{\pi}{n}],\\ 0, & t\in[-\frac{\pi}{2n};\frac{\pi}{2n}],\\ \operatorname{sign} I_2(t+\frac{\pi}{2n})_1, & t\in[-\frac{\pi}{n};\frac{\pi}{2n}),\end{cases}$$

і через $\tilde{f}_n^{\overline{\psi}}(t)$ позначимо функцію з $S^0_{\mathcal{M}}$, яка співпадає з $f_n^{\overline{\psi}}(t)$ на множині I_n. Очевидно, що така функція $\tilde{f}_n^{\overline{\psi}}(t)$ завжди існує. Тоді

$$\sup_{f^{\overline{\psi}}\in S^0_{\mathcal{M}}} \|\mathcal{J}_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; x)_1\|_C \geq |\mathcal{J}_n(\psi_2; f^{\overline{\psi}}; 0)_1| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\tilde{f}_n^{\overline{\psi}}(t+\frac{\pi}{2n}) + \tilde{f}_n^{\overline{\psi}}(t-\frac{\pi}{2n})\Big) \int\limits_n^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\, dvdt\Big| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \Big|\int\limits_n^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\, dv\Big| dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\frac{\pi}{2n}} \Big|\int\limits_n^{\infty} \psi_2(v)\sin vt\, dv\Big| dt \geq$$

$$\geq \frac{4}{\pi}\int\limits_n^{\infty} \frac{\psi_2(v)}{v}\, dv + \alpha_n^*, \tag{30}$$

де, як випливає зі співвідношень (19), (20) і (28),

$$|\alpha_n^*| < \frac{8}{\pi}\psi_2(n) + \frac{4}{\pi}(1+\pi)\ln 3\psi_2(n) + 10\frac{2}{3}\big|\psi_2'(n)\big|n.$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (29) та (30), переконуємося в справедливості леми 2.

1. *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 2 — С. 274–291.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 426 с.
3. *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. // Скорость сходимости рядов Фурье на классах сверток. — Киев, 1996. — С. 3–62. — (Препр./НАНУ. Ин-т математики. 96.11).
4. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. К.: Наукова думка, 1981. — 340 с.