Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 270-283

УДК 517.5

В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая
(Славян. гос. пед. ун–т, Славянск)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Одержано асимптотичні рівності для відхилень прямокутних сум Фур'є на класах $\overline{\psi}$-інтегралів функцій двох змінних.

Классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных введены в работе [1] (см. также [2–5]), там же получен ряд результатов по исследованию аппроксимативных свойств прямоугольных средних рядов Фурье на таких классах. В работах [3, 4] получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов почти везде ограниченных периодических функций. Следуя работе [1], классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^2 — пространство 2-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $T^2 = [-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$ — квадрат со стороной 2π,

$$N^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in N, \ \ i = 1, 2\right\},$$

$$N_*^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in N_* = N \cup \{0\}, \ \ i = 1, 2\right\},$$

$$N_i^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in N, \ \ x_j \in N_*, \ \ i \neq j\right\},$$

$$E^2 = \left\{\vec{x} \in R^2 \mid x_i \in \{0; 1\}, \ \ i = 1, 2\right\}.$$

© **В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая, 2007**

Через $L(T^2)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на квадрате T^2 функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$.

Пусть $f \in L(T^2)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{T^2} f(x_1, x_2)\cos(k_1x_1 - \frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2 - \frac{s_2\pi}{2})dx_1dx_2. \tag{1}$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^2$, $\vec{k} \in N_*^2$, являются коэффициентами Фурье функции $f(\vec{x})$ [1, с. 546].

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^2$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1 - s_1\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2 - s_2\frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

и величины

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1 - (s_1+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2 - s_2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1 - s_1\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2 - (s_2+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

которые являются гармониками, сопряженными с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ соответственно по переменным x_1 и x_2.

Следуя [1, с. 545], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{3}$$

где $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f \in L(T^2)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$; $j = 1,2$, — две четверки систем чисел, $k \in N_*$.

Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия: $\overline{\psi}_i(k) \neq 0, \overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in N_*$, $\psi_{i1}(0) = 1, \Psi_{i1}(0) = 1, \psi_{i2}(0) = 0, \Psi_{i2}(0) = 0, i = 1,2$.

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})] \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной $x_i, i = 1,2$.

Смешанной $\overline{\Psi}$-производной по переменным $x_i, i = 1,2$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}}$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1} \right).$$

Для заданного набора функций $\psi_{ij}, \Psi_{ij}, i = 1,2; j = 1,2$, через $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ обозначим множество непрерывных функций $f \in L(T^2)$, имеющих почти везде ограниченные в смысле плоской меры $\overline{\Psi}$– и $\overline{\psi}_i$–, $i = 1,2$, производные

$$\operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})| \leq 1, \ \ \operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \leq 1, \ \ i = 1,2, \ \ \vec{x} \in T^2. \tag{5}$$

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k), i = 1,2; j = 1,2$, определяющих класс $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа $\beta_i, \beta_i^*, i = 1, 2$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k) \cos \frac{\beta_i \pi}{2}; \quad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k) \sin \frac{\beta_i \pi}{2};$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k) \cos \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \ \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k) \sin \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \ i = 1, 2; j = 1, 2,$$

то (см. [2]) класс $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ является классом (ψ, β)-дифференцируемых функций от двух переменных, которые были введены в работе [5] (см. также [1]). Будем обозначать такие классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$. Если, кроме того, для чисел $r > 0, s > 0, r_1 \geq r, s_1 \geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_i = r_i, \beta_i^* = s_i$, то классы $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [6] (см. также [7, 8]), изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}} = S_{n_1,n_2}(f; \vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$, взятых по классам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$,

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f \in W_{r_1,s_1}^{r,s}} ||f(\cdot) - S_{\vec{n}}(f; \cdot)||_C$$

получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2$,

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec{n}}) = \frac{4 \ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4 \ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1) \left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}} \right).$$

В данной работе изучены вопросы приближения прямоугольными суммами Фурье классов $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ в случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями

$$\psi_i(x) = e^{-\alpha_i x}, \ \ \Psi_i(x) = e^{-\alpha_i^* x}, \ \ \alpha_i > 0, \ \ \alpha_i^* > 0, \ \ i = 1, 2.$$

По аналогии с классами функций одной переменной будем обозначать такие классы $C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$.

На соответствующих классах функций одной переменной $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$были получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений сумм Фурье и сумм Валле Пуссена (см. работы [9, 10]). В частности, С.М. Никольским в работе [10] было получено равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}, \;\; q = e^{-\alpha}.$$

Основным результатом данной работы является получение аналога этого равенства для класса $C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$.

Пусть $\vec{n} \in N^2$ и $G_{\vec{n}} = [0; n_1] \times [0; n_2]$. Обозначим через $\Lambda_i = \left\{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\right\}$, $i = 1, 2$, две бесконечные треугольные матрицы чисел, $\lambda^{(n_i)}_0 = 1, \lambda^{(n_i)}_{k_i} = 0, k_i \geq n_i$, и $\Lambda = \left\{\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}}\right\} = \left\{\lambda^{(n_1)}_{k_1} \cdot \lambda^{(n_2)}_{k_2}\right\}$.

Каждой функции, имеющей ряд Фурье (3), поставим в соответствие многочлен

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})}\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$ являются уклонениями многочленов $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$, $\vec{n} \in N^2$, от функции $f(\vec{x})$.

Введем системы чисел

$$\tau^{(n_i)}_{k_i,j} = \begin{cases} (1-\lambda^{(n_i)}_{k_i})\psi_{ij}(k_i), & 1 \leq k_i \leq n_i,; \\ \psi_{ij}(k_i), & n_i \leq k_i,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, \end{cases} \tag{6}$$

$$T^{(n_i)}_{k_i,j} = \begin{cases} (1-\lambda^{(n_i)}_{k_i})\Psi_{ij}(k_i), & 1 \leq k_i \leq n_i,; \\ \Psi_{ij}(k_i), & n_i \leq k_i,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2. \end{cases} \tag{7}$$

Используя рассуждения работы [3] (см. также [11, с. 51]) можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть системы чисел* $\tau_{k_i,j}^{(n_i)}$, $T_{k_i,j}^{(n_i)}$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k_i,j}^{(n_i)} \cos(k_i t - \frac{(j-1)\pi}{2}) < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} T_{k_i,j}^{(n_i)} \cos(k_i t - \frac{(j-1)\pi}{2}) < \infty. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f \in C_{\infty}^{2\overline{\psi}}$ *в каждой точке* $\vec{x} \in T^2$ *выполняется равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_1}(\vec{x} - t_1\vec{e}_1) \sum_{k_1=0}^{\infty} \big(\tau_{k_1,1}^{(n_1)} \cos k_1 t_1 + \tau_{k_1,2}^{(n_1)} \sin k_1 t_1\big) dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_2}(\vec{x} - t_2\vec{e}_2) \sum_{k_2=0}^{\infty} (\tau_{k_2,1}^{(n_2)} \cos k_2 t_2 + \tau_{k_2,2}^{(n_2)} \sin k_2 t_2) dt_2 -$$

$$- \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x} - t_1\vec{e}_1 - t_2\vec{e}_2) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(T_{k_1,1}^{(n_1)} \cos k_1 t_1 + T_{k_1,2}^{(n_1)} \sin k_1 t_1 \right) \times$$

$$\times \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(T_{k_2,1}^{(n_2)} \cos k_2 t_2 + T_{k_2,2}^{(n_2)} \sin k_2 t_2 \right) dt_1 dt_2. \tag{9}$$

Доказательство. Так как

$$1 - \lambda_{k_1}^{(n_1)} \lambda_{k_2}^{(n_2)} = (1 - \lambda_{k_1}^{(n_1)}) + (1 - \lambda_{k_2}^{(n_2)}) - (1 - \lambda_{k_1}^{(n_1)})(1 - \lambda_{k_2}^{(n_2)}),$$

то

$$S[\delta_{\vec{n}}] =$$

$$= \sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}(1-\lambda_{k_1}^{(n_1)})A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) + \sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}(1-\lambda_{k_2}^{(n_2)})A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) -$$

$$- \sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}(1-\lambda_{k_1}^{(n_1)})(1-\lambda_{k_2}^{(n_2)})A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} S_1 + S_2 - S_3.$$

Далее, воспользуемся приёмами, предложенными в работе [11, с. 52 – 54]. Рассмотрим функции

$$I^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}-t_i\vec{e}_i)\sum_{k_i=0}^{\infty}\big(\tau_{k_i,1}^{(n_i)}\cos k_it_i + \tau_{k_i,2}^{(n_i)}\sin k_it_i\big)dt_i,$$

$$I^{\overline{\Psi}}(f;\vec{x}) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}-t_1\vec{e}_1-t_2\vec{e}_2)\times$$

$$\times \prod_{i=1,2}\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(T_{k_i,1}^{(n_i)}\cos k_it_i + T_{k_i,2}^{(n_i)}\sin k_it_i\right)dt_i.$$

Найдем коэффициенты Фурье этих функций. Учитывая соотношение (8) и равенство (8) из работы [3], имеем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(I^{\overline{\psi}_i}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}-t_i\vec{e}_i)\sum_{k_i=0}^{\infty}\big(\tau_{k_i,1}^{(n_i)}\cos k_it_i + \tau_{k_i,2}^{(n_i)}\sin k_it_i\big)dt_i]\times$$

$$\times\cos(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2})dx_1dx_2 =$$

$$= \tau_{k_i,1}^{(n_i)}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i}) - (-1)^{s_i}\tau_{k_i,2}^{(n_i)}a_{\vec{k}}^{\vec{s}-(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i}) =$$

$$= (1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f),\ \ \vec{k}\in N_i^2,\ \ \vec{s}\in E^2.$$

Следовательно,

$$S_i = S[I^{\overline{\psi}_i}], \;\; i = 1, 2.$$

Учитывая соотношение (10) работы [3], имеем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(I^{\overline{\Psi}}) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^4} f^{\overline{\Psi}}(\vec{x} - t_1\vec{e}_1 - t_2\vec{e}_2)\sum_{k_1=0}^{\infty}\Big(T_{k_1,1}^{(n_1)}\cos k_1t_1 + T_{k_1,2}^{(n_1)}\sin k_1t_1\Big)\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(T_{k_2,1}^{(n_2)}\cos k_2t_2 + T_{k_2,2}^{(n_2)}\sin k_2t_2\right)\times$$

$$\times\cos(k_1x_1 - \frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2 - \frac{s_2\pi}{2})dt_1dt_2dx_1dx_2 =$$

$$= a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\Psi}})T_{k_1,1}^{(n_1)}T_{k_2,1}^{(n_2)} - (-1)^{s_1}T_{k_1,2}^{(n_1)}T_{k_2,1}^{(n_2)}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_1}\vec{e}_1} -$$

$$-(-1)^{s_2}T_{k_1,1}^{(n_1)}T_{k_2,2}^{(n_2)}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_2}\vec{e}_2} +$$

$$+(-1)^{s_1+s_2}T_{k_1,2}^{(n_1)}T_{k_2,2}^{(n_2)}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_1}\vec{e}_1+(-1)^{s_2}\vec{e}_2} =$$

$$= (1 - \lambda_{k_1}^{(n_1)})(1 - \lambda_{k_2}^{(n_2)})a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f), \;\; \vec{k} \in N^2, \;\; \vec{s} \in E^2.$$

Поэтому

$$S_3 = S[I_3^{\overline{\Psi}}].$$

Таким образом, получаем

$$S[I_1^{\overline{\psi}_1} + I_2^{\overline{\psi}_2} - I_3^{\overline{\Psi}}] = S[f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)].$$

Принимая во внимание это равенство, можем утверждать, что для функций $f \in C_{\infty}^{2\overline{\psi}}$ имеет место соотношение (9).

Теорема доказана.

Заметим, что для прямоугольных сумм Фурье и классов $C_{\beta,\infty}^{2\alpha}$

$$\tau_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 0, & 1 \le k_i \le n_i, \\ e^{-\alpha_i k_i}, & n_i \le k_i, i = 1, 2; \end{cases}$$

$$T_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 0, & 1 \le k_i \le n_i, \\ e^{-\alpha_i^* k_i}, & n_i \le k_i, i = 1, 2; \end{cases}$$

$$\tau_{k_i,1}^{(n_i)} = \tau_{k_i}^{(n_i)} \cos \frac{\beta_i \pi}{2}, \tau_{k_i,2}^{(n_i)} = \tau_{k_i}^{(n_i)} \sin \frac{\beta_i \pi}{2},$$

$$T_{k_i,1}^{(n_i)} = T_{k_i}^{(n_i)} \cos \frac{\beta_i^* \pi}{2}, T_{k_i,2}^{(n_i)} = T_{k_i}^{(n_i)} \sin \frac{\beta_i^* \pi}{2}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_i > 0, \alpha_i^* > 0, \beta_i \in R, \beta_i^* \in R, i = 1, 2.$ *Тогда при* $n_i \to \infty, i = 1, 2,$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{2\alpha}; S_{\vec{n}}) = \frac{8e^{-\alpha_1 n_1}}{\pi^2} \mathbf{K}(e^{-\alpha_1}) + \frac{8e^{-\alpha_2 n_2}}{\pi^2} \mathbf{K}(e^{-\alpha_2}) +$$

$$+ O(1)\left(\frac{e^{-\alpha_1 n_1}}{n_1} + \frac{e^{-\alpha_2 n_2}}{n_2} + e^{-(\alpha_1^* n_1 + \alpha_2^* n_2)}\right), \qquad (10)$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— элиптический интеграл I-го рода.

Доказательство. В силу теоремы 1 для $f \in C_{\beta,\infty}^{2\alpha}$ имеет место

$$\rho_{\vec{n}}(f; x) = f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f; \vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_1}^{\alpha_1}(\vec{x} + t_1 \vec{e}_1) \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{-\alpha_1 k_1} \cos(k_1 t_1 + \frac{\beta_1 \pi}{2}) dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_2}^{\alpha_2}(\vec{x} + t_2 \vec{e}_2) \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-\alpha_2 k_2} \cos(k_2 t_2 + \frac{\beta_2 \pi}{2}) dt_1 -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta^*}^{\alpha^*}(\vec{x}+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2)\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{-\alpha_1^* k_1}\cos(k_1t_1+\frac{\beta_1^*\pi}{2})\times$$

$$\times\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-\alpha_2^* k_2}\cos(k_2t_2+\frac{\beta_2^*\pi}{2})dt_1dt_2.$$

Далее, введем обозначения

$$q_i = e^{-\alpha_i},\quad Q_i = e^{-\alpha_i^*}.$$

В работе [11, с. 123] показано, что

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} e^{-\alpha_i k_i}\cos(k_it+\frac{\beta_i\pi}{2}) = q_i^{n_i}\left(\frac{1-q_i\cos t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\cos(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2})-\right.$$

$$\left.-\frac{q_i\sin t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\sin(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2})\right).$$

Поэтому

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) =$$

$$=\frac{q_1^{n_1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_1}^{\alpha_1}(\vec{x}+t_1\vec{e}_1)\, b_{n_1}^{\beta_1}(t)dt_1+\frac{q_2^{n_2}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_2}^{\alpha_2}(\vec{x}+t_2\vec{e}_2)\, b_{n_2}^{\beta_2}(t)dt_2-$$

$$-\frac{Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\beta^*}^{\alpha^*}(\vec{x}+t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2)\, B_{n_1}^{\beta_1^*}(t_1)B_{n_2}^{\beta_2^*}(t_2)dt_1dt_2.\quad (11)$$

где

$$b_{n_i}^{\beta_i}(t) =$$

$$=\left[\cos(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2})-q_i\cos\left((n_i-1)t+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right](1-2q_i\cos t+q_i^2)^{-1},$$

$$B_{n_i}^{\beta_i^*}(t) =$$

$$= \left[\cos(n_i t + \frac{\beta_i^* \pi}{2}) - Q_i \cos\left((n_i - 1)t + \frac{\beta_i^* \pi}{2}\right)\right](1 - 2Q_i \cos t + Q_i^2)^{-1}. \tag{12}$$

Так как для $f \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$ выполняются условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2} |f^{\alpha_1}_{\beta_1}(\vec{x})| \le 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2} |f^{\alpha_2}_{\beta_2}(\vec{x})| \le 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^2} |f^{\alpha^*}_{\beta^*}(\vec{x})| \le 1,$$

то

$$\mathcal{E}(C^{2\alpha}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}} ||\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C \le \frac{q_1^{n_1}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_1}_{n_1}(t)|dt +$$

$$+ \frac{q_2^{n_2}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_2}_{n_2}(t)|dt + O(1) Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta_1^*}_{n_1}(t) B^{\beta_2^*}_{n_2}(t)|dt. \tag{13}$$

Найдем функцию $f_0 \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$, для которой справедливо соотношение

$$\rho_{\vec{n}}(f_0;\vec{0}) = \frac{q_1^{n_1}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_1}_{n_1}(t)|dt + \frac{q_2^{n_2}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_2}_{n_2}(t)|dt +$$

$$+ O(1) \left(\frac{q_1^{n_1}}{n_1} + \frac{q_2^{n_2}}{n_2} + Q_1^{n_1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta_1^*}_{n_1}(t)|dt_1 Q_2^{n_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta_2^*}_{n_2}(t)|dt_2 \right). \tag{14}$$

Имея в виду равенство (11), для всякой $f \in C^{2\alpha}_{\beta,\infty}$ можно записать

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{0}) = \frac{q_1^{n_1}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_1}_{\beta_1}\left(\vec{0} + t_1 \vec{e}_1\right) b^{\beta_1}_{n_1}(t_1)dt_1 +$$

$$+ \frac{q_2^{n_2}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha_2}_{\beta_2}\left(\vec{0} + t_2 \vec{e}_2\right) b^{\beta_2}_{n_2}(t_2)dt_2 +$$

$$+O(1)Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_1}^{\beta_1^*}(t_1)B_{n_2}^{\beta_2^*}(t_2)|dt_1dt_2.$$

В работе [11, с. 124] показано, что функцию $y_i^*(t) = \operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t)$ можно так переопределить на множестве, мера которого меньше Kn_i^{-1}, где K — некоторое фиксированное число, чтобы полученная функция $y_i(t)$ удовлетворяла условиям

$$|y_i(t)| \le 1, \int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t)dt = 0.$$

Далее, построим функции $\varphi_i(t_1;t_2) = y_i(t_i)$, $\vec{t} \in T^2$, и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $(f_i)_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$. Повторяя рассуждения работы [3, с. 265] можно показать, что функция $f_0(\vec{x}) = f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})$ удовлетворяет условию

$$(f_0)_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x}).$$

Поэтому $f_0 \in C_{\beta,\infty}^{2\alpha}$ и на промежутке $[-\pi;\pi]$, кроме множества точек, мера которого меньше Kn_i^{-1}, выполняется условие

$$(f_0)_{\beta_i}^{\alpha_i}(\vec{0} + t_i\vec{e}_i) = \operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i).$$

Следовательно, на основании (11) получаем, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (14).

Сопоставляя (13) и (14), получаем асимптотическую формулу

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{2\alpha}; S_{\vec{n}}) = \frac{q_1^{n_1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_1}^{\beta_1}(t)|dt + \frac{q_2^{n_2}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_2}^{\beta_2}(t)|dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{n_1}+\frac{q_2^{n_2}}{n_2}+Q_1^{n_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_1}^{\beta_1^*}(t)|dt_1Q_2^{n_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_2}^{\beta_2^*}(t)|dt_2\right). \quad (15)$$

В работе [11, с. 125] показано, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i}^{\beta_i}(t)|dt = \frac{8}{\pi}\mathbf{K}(q_i) + O(1)n^{-1},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |B_{n_i}^{\beta_i}(t)|dt = \frac{8}{\pi}\mathbf{K}(Q_i) + O(1)n^{-1} = O(1), \qquad (16)$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— элиптический интеграл I-го рода.

Сопоставляя соотношения (15) и (16), получаем асимптотическую формулу (10). Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условия $\alpha_i = \alpha_i^*$, $i = 1, 2$, соотношение (10) обеспечивает решение задачи Колмогорова–Никольского.

1. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 545–555.
2. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. — Т. 55, № 7. — С. 911–918.
3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, №1. — С. 250–269.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 564–570.

5. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.
6. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.
7. *Степанец А.И.* Приближение некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. — 1973. — Т. 25, № 5. — С. 599–609.
8. *Степанец А.И.* К одной задаче А.Н. Колмогорова в случае функций двух переменных // Укр. мат. журн. — 1972. — Т. 24, № 5. — С. 653–655.
9. *Рукасов В.И. Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – С. 109–110.
10. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
11. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
12. *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 1. — С. 101–136.