

УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

**ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ
КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА**

Найдены точные по порядку оценки приближения классов сверток суммируемых функций с многомерным ядром Пуассона при помощи тригонометрических полиномов со спектром в многогранных областях.

1. Обозначения, определения и формулировка основных результатов. Пусть \mathbb{R}^d — d -мерное евклидово пространство, \mathbb{Z}^d — целочисленная решетка в \mathbb{R}^d , $\mathbb{Z}_+^d = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_j \geq 0, j = \overline{1, d}\}$, $\mathbb{Z}_0^d = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{j=1}^d k_j \neq 0\}$, $\mathbb{N}^d = \{k = (k_1, \dots, k_d) : k_j = 1, 2, \dots, j = \overline{1, d}\}$ (при $d = 1$ пишем соответственно \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_+ , \mathbb{Z}_0 и \mathbb{N}); $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = (x_1, \dots, x_d), x_j \in [-\pi, \pi), j = \overline{1, d}\}$ — d -мерный куб; если $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$, то $|\Omega|$ обозначает количество точек конечного множества Ω ; $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство измеримых 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{при } 1 \leq p < \infty$$

и

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, \quad \text{при } p = \infty.$$

Определим оператор $I_K: L_1(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_1(\mathbb{T}^d)$ посредством равенства

$$I_K\varphi(x) = \varphi * K = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(y)K(x-y)dy$$

— оператор свертки с ядром $K \in L_1(\mathbb{T}^d)$, определенный на множестве $L_1(\mathbb{T}^d)$. Пусть

$$W(K) = \{f : f(x) = I_K\varphi(x), x \in \mathbb{T}^d, \|\varphi\|_p \leq 1\}. \quad (1)$$

Положим

(i) $W_{p,\beta}^r =: W(K)$, если

$$K(t) =: B_r(t; \beta) = 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2})$$

— многомерное ядро Бернулли;

(ii) $A_{p,\beta}^{r,\alpha} =: W(K)$, если

$$K(t) =: P_{p,\beta}^{r,\alpha}(t) = 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d e^{-\alpha_j k_j^{r_j}} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2}),$$

$\alpha_j > 0, r_j > 0, \beta_j \in \mathbb{R}$.

В случае, когда $r_j = 1$ при всех $j = \overline{1, d}$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_d =: \alpha > 0$, полагая $e^{-\alpha} = \varrho$ ($0 < \varrho < 1$), класс $A_{p,\beta}^{r,\alpha}$ обозначаем через $A_{p,\beta}^\varrho$ и если, кроме того, $\beta_j = 0, j = \overline{1, d}$, — то через A_p^ϱ . Именно классы A_p^ϱ рассматриваются в настоящей работе, хотя, как будет видно из доказательств утверждений по приближению классов A_p^ϱ , полученные результаты остаются справедливыми и для классов $A_{p,\beta}^\varrho$ при любых $\beta \in \mathbb{R}^d$.

Соответствующее классам A_p^ϱ ядро в представлении (1)

$$P(\varrho; t) := 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j \quad (2)$$

— есть многомерное ядро Пуассона.

Отметим, что множество A_p^g при любом $1 \leq p \leq \infty$ состоит из непрерывных на \mathbb{T}^d функций, подчиненных условию $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d}$.

Для произвольного ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(\Omega)$ обозначим пространство тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k \in \Omega} c_k e^{i(k;x)}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (k;x) := k_1 x_1 + \dots + k_d x_d.$$

Пусть, далее,

$$E_{\Omega}(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{t \in T(\Omega)} \|f - t\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$$

— величина наилучшего приближения класса функций F в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ при помощи тригонометрических полиномов из $T(\Omega)$.

Для функции $h \in L_1(\mathbb{T}^d)$ через $S[h]$ обозначим её ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{i(k;x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$

$$S[h](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(h) e^{i(k;x)}, \quad c_k(h) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} h(t) e^{-i(k;t)} dt$$

и

$$S_{\Omega}(h; x) = \sum_{k \in \Omega} c_k(h) e^{i(k;x)}$$

— частная сумма Фурье функции h по множеству гармоник $\{e^{i(k;x)}\}_{k \in \Omega}$ (Ω -сумма Фурье).

В частности, если

$$\Delta(l, d) = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d : |k|_1 := \sum_{j=1}^d |k_j| \leq l\},$$

то для произвольного $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{\Delta(N,d)}(h; x) &= \sum_{k \in \Delta(N,d)} c_k(h) e^{i(k;x)} = \\ &=: \sum_{l=1}^N \sum_{k \in \Theta(l)} c_k(h) e^{i(k;x)} =: \sum_{l=1}^N Y(h; x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Theta(l) = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d : |k|_1 = l\}$.

Положим

$$\mathcal{E}_\Omega(F)_q := \sup_{f \in F} \|f(x) - S_\Omega(f; x)\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d),$$

— точная верхняя грань по множеству функций F величин их приближений в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ Ω -суммами Фурье.

В работе устанавливаются точные по порядку относительно параметра n оценки величин $\mathcal{E}_{\square(n,d)}(A_p^g)_q$ и $E_{\square(n,d)}(A_p^g)_q$, $1 \leq p, q \leq \infty$ (теорема 1), где $\square(n, d)$ — множество целочисленных точек d -мерного куба в \mathbb{R}^d

$$\square(n, d) := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d : \max_{1 \leq j \leq d} |k_j| \leq n\}.$$

Установлено также (теорема 2), что при некоторых соотношениях между параметрами p и q (а именно, при $1 < q \leq p < \infty$) оценки приближения класса A_p^g в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ полиномами из $T(\Delta(n, d))$ не ухудшаются по сравнению с оценками приближения полиномами из $T(\square(n, d))$ несмотря на то, что $\dim T(\Delta(n, d)) = |\Delta(n, d)| = 2^d \binom{n}{d}$, а $\dim T(\square(n, d)) = |\square(n, d)| = 2^d (n+1)^d$, т.е. при $d \geq 2$ $\dim T(\Delta(n, d)) < \dim T(\square(n, d))$.

Итак, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. При любых $d \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p, q \leq \infty$

$$E_{\square(n,d)}(A_p^q)_q \asymp \mathcal{E}_{\square(n,d)}(A_p^q)_q \asymp \varrho^n.$$

Теорема 2. При любых $d \in \mathbb{N}$ и $1 < q \leq p < \infty$

$$E_{\Delta(n,d)}(A_p^q)_q \asymp \mathcal{E}_{\Delta(n,d)}(A_p^q)_q \asymp \varrho^n.$$

Запись $\alpha(n) \asymp \beta(n)$ означает, что существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N} C_1 \alpha(n) \leq \beta(n) \leq C_2 \alpha(n)$. Если $\beta(n) \leq C_2 \alpha(n)$, то пишем $\beta(n) \ll \alpha(n)$.

2. Комментарии к теоремам. 1) В случае $d = 1$, очевидно, $\square(n, d) = \Delta(n, d) = [-n, n] \cap \mathbb{Z}_0$ и результат теоремы 1 в этом случае известен (см., например, [1, с. 185–190] и [2, с. 217–227, 247–251]). Более того, для классов $C_{\beta,p}^{r,\alpha}$ непрерывных 2π -периодических функций одной переменной, представимых в виде $f = c + \varphi * \Psi_{\beta}^{r,\alpha}$, где $c \in \mathbb{R}$, $\|\varphi\|_p \leq 1$ и $\Psi_{\beta}^{r,\alpha}(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k r} \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$, $\alpha > 0$, $r > 0$ (заметим, что класс $C_{\beta,p}^{r,\alpha}$ отличается от $A_{\beta,p}^{r,\alpha}$ при $d = 1$ лишь тем, что для функций $f \in C_{\beta,p}^{r,\alpha}$ не обязательно $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$) установлена сильная асимптотика величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{r,\alpha})_q$, $p = q = 1$ либо $p = q = \infty$ — в [3] при $r = 1$, а в [2, с. 130–132, 154–157] — при $r > 1$. Также найдены точные значения величин $E_n(C_{\beta,p}^{r,\alpha})_q$ — в [3] при $p = q = 1$, $r = 1$, и в [4, 5] — при $p = q = \infty$, $r = 1$ (и асимптотически точные значения при $p = q = 1$ либо $p = q = \infty$, $r \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ в [2, с. 260]).

В случае $d \in \mathbb{N}$ и при $p = q = 2$ в [6, с. 372–378] найдены точные значения величин $E_{\Delta(n,d)}(A_2^2)_2$ (в наших обозначениях класса приближаемых функций) и при решении задачи о значениях колмогоровских поперечников показано, что именно

пространство $T(\Delta(n, d))$ является экстремальным. Этот факт, хотя и не отмечался явно, исходит и из других работ [1с. 239–240] и [7,8].

2) Пространство полиномов $T(\Delta(n, d))$, $d \geq 2$, в отличие от пространства $T(\square(n, d))$, в ряде случаев (соотношений между параметрами p и q в определении класса A_p^q и пространства $L_q(\mathbb{T}^d)$) является оптимальным также и в том смысле, что доставляет наилучшие по порядку оценки для колмогоровских поперечников $d_M(A_p^q, L_q(\mathbb{T}^d))$ заданной размерности M .

Отметим, что с этой точки зрения наилучшим подпространством для приближения функций из классов $W_{p,\beta}^r$ в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ являются тригонометрические полиномы $T(\Omega)$ со спектром в гиперболических крестах

$$\Omega = \Gamma(N, \gamma) = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 < \prod_{j=1}^d |k_j|^{\gamma_j} \leq N\},$$

где для $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$ — $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$ (см., например, [9]).

3. Доказательство теоремы 1. Оценка сверху. Если $f \in A_p^q$, то согласно (1) и (2)

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t) P(\varrho, x - t) dt, \quad \|\varphi\|_p \leq 1. \quad (4)$$

С другой стороны, очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{\square(n,d)}(f; x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t) P_n(\varrho, x - t) dt, \quad (5)$$

где

$$P_n(\varrho; t) = 2^d \sum_{k \in \square^+(n,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j$$

и

$$\square^+(n, d) := \square(n, d) \cap \mathbb{N}^d.$$

Поэтому для любой функции $f \in A_p^{\varrho}$

$$f(x) - S_{\square(n, d)}(f; x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t) Q(\varrho, x - t) dt,$$

где

$$Q(\varrho; t) = 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d \setminus \square^+(n, d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j.$$

Далее, согласно неравенству Юнга (см., например, [10, с. 67–68]) если p, q и s таковы, что $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$, то

$$\|f(x) - S_{\square(n, d)}(f; x)\|_q \leq C \|\varphi\|_p \cdot \|Q\|_s. \quad (6)$$

Но

$$\|Q\|_s \leq \|Q\|_{\infty} \leq 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d \setminus \square^+(n, d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \ll \varrho^n. \quad (7)$$

Последнее неравенство записано на основании леммы А в Приложении I.

Таким образом, сопоставляя (6) и (7), делаем вывод, что при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\mathcal{E}_{\square(n, d)}^{\varrho}(A_p^{\varrho})_q \ll \varrho^n,$$

и такая же оценка справедлива и при $1 \leq q < p \leq \infty$, поскольку в этом случае

$$\mathcal{E}_{\square(n, d)}^{\varrho}(A_p^{\varrho})_q \leq \mathcal{E}_{\square(n, d)}^{\varrho}(A_p^{\varrho})_p \ll \varrho^n.$$

Оценка снизу. Получим оценки снизу для $E_{\square(n, d)}^{\varrho}(A_{\infty}^{\varrho})_1$, которые, очевидно, влекут соответствующие оценки снизу для $E_{\square(n, d)}^{\varrho}(A_p^{\varrho})_q$ при любых p и q , $1 \leq p, q \leq \infty$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = e^{i(k^0;x)}$, где $k^0 = (k_1, \dots, k_d) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{d-1}, n+1$. Тогда, очевидно, $k \in \square(n, d)$. Пусть

$$f(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) P(\varrho; t-x) dx, \quad t = (t_1, \dots, t_d),$$

где, напомним, $P(\varrho; x) = 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j x_j$. Очевидно, что тогда $f(t) = \varrho^{n+d} e^{i(k^0;t)}$ и поскольку $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, то $f \in A_\infty^\varrho$. Далее для любого полинома $t \in T(\square(n, d))$

$$\sigma := (f - t; e^{i(k^0;x)}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} (f(x) - t(x)) e^{-i(k^0;x)} dx = \varrho^{n+d}.$$

С другой стороны, $\sigma \leq \|f - t\|_1$, что влечет оценку $E_{\square(n,d)}(A_\infty^\varrho)_1 \gg \varrho^n$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Оценка снизу является следствием теоремы 1, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ и $d \geq 2$ $\square(n, d) \supset \Delta(n, d)$.

Установим оценку сверху для $\mathcal{E}_{\Delta(n,d)}(A_p^\varrho)_q$. Вначале рассмотрим случай $1 < p = q < \infty$. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, можем записать

$$\begin{aligned} f(x) - S_{\Delta(n,d)}(f; x) &= [f(x) - S_{\Delta(2n,d)}(f; x)] + \\ &+ [S_{\Delta(2n,d)}(f; x) - S_{\Delta(n,d)}(f; x)] =: Q_-(f; x) + Q_+(f; x) \end{aligned}$$

и по неравенству Минковского

$$\|f(x) - S_{\Delta(n,d)}(f; x)\|_p \leq \|Q_-(f; x)\|_p + \|Q_+(f; x)\|_p. \quad (8)$$

Аналогично, как и при оценке сверху величины $\mathcal{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_p$, $1 < p < \infty$,

$$\|Q_-(f; x)\|_p \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}^d \setminus \Delta^+(2n,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j \right\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N}^d \setminus \Delta^+(2n, d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \ll \varrho^n \quad (9)$$

(здесь $\Delta^+(n, d) := \Delta(n, d) \cap \mathbb{N}^d$).

Последнее неравенство в (9) получено на основании леммы А в Приложении I с учетом того, что $\Delta(2n, d) \supset \square(n, d)$.

Оценим теперь $\|Q_+(f; x)\|_p$. Заметим, что если $f \in A_p^g$, то согласно определению имеет место представление (4) и, очевидно,

$$Q_+(f; x) = \sum_{l=n+1}^{2n} \varrho^l Y_l(\varphi; x)$$

(см. соотношение (3)). Тогда воспользовавшись леммой В при $M = n + 1$, $N = 2n$ и $\lambda_m = \varrho^m$ (см. Приложение II), получим

$$\begin{aligned} \|Q_+(f; x)\|_p &\leq \varrho^{n+1} \sup_{n+1 \leq s \leq 2n} \left\| \sum_{k=n+1}^s Y_k(\varphi; x) \right\|_p \leq \\ &\leq \varrho^{n+1} \sup_{n+1 \leq s \leq 2n} \left\| \sum_{k=1}^s Y_k(\varphi; x) - \sum_{k=1}^n Y_k(\varphi; x) \right\|_p \leq \\ &\leq 2\varrho^{n+1} \sup_{n+1 \leq s \leq 2n} \left\| \sum_{k=1}^s Y_k(\varphi; x) \right\|_p = \\ &= 2\varrho^{n+1} \sup_{n+1 \leq s \leq 2n} \|S_{\Delta(s, d)}(\varphi; x)\|_p. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь осталось заметить, что, как следует из работы [11], последовательность операторов $S_{\Delta(n, d)}: L_p(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_p(\mathbb{T}^d)$ при $1 < p < \infty$ равномерно ограничена по n , т.е.

$$\|S_{\Delta(n, d)}(\varphi; x)\|_p \leq C_p \|\varphi\|_p,$$

чтобы от (10) прийти к неравенству

$$\|Q_+(f; x)\|_p \ll \varrho^n. \tag{11}$$

Сопоставляя (9) и (11) с (8), получаем, что $\forall f \in A_p^\varrho, 1 < p < \infty$

$$\|f(x) - S_{\Delta(n,d)}(f; x)\|_p \ll \varrho^n,$$

т.е. оценка сверху для $\mathcal{E}_{\Delta(n,d)}(A_p^\varrho)_p$ установлена.

Оценка сверху для $\mathcal{E}_{\Delta(n,d)}(A_p^\varrho)_q$ при $1 < q < p < \infty$ является следствием оценки сверху для $\mathcal{E}_{\Delta(n,d)}(A_p^\varrho)_p$ в силу того, что $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$. Теорема 2 доказана.

5. Приложение.

I. Лемма А. *Имеет место оценка*

$$\delta(N) := \sum_{k \in \mathbb{N}^d \setminus \square^+(N,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \asymp \varrho^N, \quad 0 < \varrho < 1.$$

Доказательство. Оценка снизу тривиальна. Получим оценку сверху. Положим

$$\square^{(j)}(N, d) = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d : k_j > N\}.$$

Тогда, очевидно, $\mathbb{N}^d \setminus \square^+(N, d) \subset \bigcup_{j=1}^d \square^{(j)}(N, d)$, и если $k^{(j)} := (k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^{d-1}, j = \overline{1, d}$ и $\Theta(l) = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d : \sum_{j=1}^d k_j = l\}$ (заметим, что $|\Theta(l)| = \binom{l-1}{d-1} \asymp l^{d-1}$), то

$$\delta(N) \leq \sum_{j=1}^d \sum_{k \in \square^{(j)}(N,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^d \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k(j) \in \Theta(m, d-1) \\ k_j > N}} \varrho^{k_1 + \dots + k_d} \ll \sum_{j=1}^d \sum_{m=1}^{\infty} m^{d-2} \varrho^m \sum_{k_j = N+1}^{\infty} \varrho^{k_j} \ll \varrho^N,$$

так как $\sum_{m=1}^{\infty} m^{d-2} \varrho^m \leq C$. Лемма доказана.

II. Рассмотрим полином $t_{M, N}(x) = \sum_{m=M}^N Y_m(x)$, где $Y_m(x) = \sum_{k \in \Theta(m, d)} c_k e^{i(k; x)}$; $M, N \in \mathbb{Z}_+$, $N \geq M$, $c_k \in \mathbb{R}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=M}^N$ — произвольный набор действительных чисел и

$$t_{M, N}(x; \Lambda) = \sum_{n=M}^N \lambda_n Y_n(x).$$

Следующее утверждение мы формулируем в виде леммы, хотя оно является простым следствием теоремы 2.2 из [10, с. 15].

Лемма В. Если $\lambda_{m+1} \leq \lambda_m$, $m = M, M+1, \dots, N-1$, то при $1 \leq p \leq \infty$

$$\|t_{M, N}(x)\|_p \leq \lambda_M \sup_{M \leq s \leq N} \|t_{M, s}(x)\|_p. \quad (12)$$

В самом деле, применяя к $t_{M, N}(x)$ при фиксированном $x \in \mathbb{R}^d$ преобразование Абеля, получим

$$\sum_{m=M}^N \lambda_m Y_m(x) = \sum_{m=M}^{N-1} (\lambda_m - \lambda_{m+1}) \sum_{j=M}^m Y_j(x) + \lambda_N \sum_{j=M}^N Y_j(x)$$

и

$$\left| \sum_{m=M}^N \lambda_m Y_m(x) \right| \leq \lambda_M \sup_{M \leq s \leq N} \left| \sum_{j=M}^s Y_j(x) \right|$$

откуда следует (12).

1. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
4. *Nagy B.* Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // Ber. Acad. Dtsch. wiss. — 1938. — 90. — P. 103–134.
5. *Крейн М.Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 138. — С. 94–117.
6. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.
7. *Фарков Ю.А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из \mathbb{C}^n // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 5. — С. 197–198.
8. *Ding H., Gross K.I., Pichards D.St.P.* The N -widths of spaces of holomorphic function on bounded symmetric domains of tube type // J. Approx. Theory. — 2000. — V. 104, № 1. — P. 121–141.
9. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной. — М., 1986. — 112 с. — (Тр. Мат. ин-та АН СССР; т. 178)
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
11. *Савчук В.В., Савчук М.В.* Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1669–1679.