

УДК 517.5

Н. А. Пачулиа, Н. Н. Пачулиа (Абхаз. гос. ун-т, Сухум)

**О КОНСТРУКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ
СТЕПЕННЫХ СИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
РЯДОВ ФУРЬЕ**

В работе установлены соотношения конструктивных характеристик функции $f \in C$ и сильных преобразований (в частности средних методов суммирования) её ряда Фурье.

Пусть f — 2π -периодическая суммируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, $f \in L$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

— её ряд Фурье, a_k, b_k — коэффициенты Фурье, $S_n(f; x)$ — частные суммы порядка n ряда (1), а $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$ — соответствующее уклонение. Далее, пусть $\{\lambda_k\}_{k \in N_0}$, $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, неотрицательная последовательность чисел и $q > 0$. Составим ряд

$$h(x, q) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q}, \quad (2)$$

который будем называть степенным сильным преобразованием ряда Фурье функции f .

В работе [1] доказано, что если $f \in C$ и последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in N_0}$ не возрастает, то

$$\sum_{k=2(n-1)}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^q \leq A_q \sum_{k=n-1}^{\infty} \lambda_k E_k^q(t), \quad (3)$$

© Н. А. Пачулиа, Н. Н. Пачулиа, 2007

где $E_k(t)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическим полиномами t_k порядка не выше k , $t_k \in H_k$, т.е.

$$E_k(t) = \inf_{t_k \in H_k} \|f - t_k\|_C,$$

$\|f\|_C$ — норма функции, A_q — в соотношении (3) и в дальнейшем изложении всегда будет зависящее только от q постоянное, возможно не одно и то же.

Из соотношения (3) следует, что если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k E_k^q(f) \quad (4)$$

сходится, то ряд (2) сходится равномерно и функция $h \in C$.

В частности, если сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$, то каждая функция f определяет некоторую непрерывную функцию. Ранее в работах венгерских математиков (см. [6]) было изучено поведение функции f , для которой $\|h(x, q)\|_C < \infty$. Целью представленной работы является сравнение конструктивных характеристик функции f и h , а именно величин $\omega(h; \delta)$ и $\omega(f; \delta)$, где

$$\omega(\varphi, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Теорема 1. Пусть функция $f \in C$, последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in N}$ не возрастает, $\lambda_k \geq 0 \quad \forall k$, $q > 0$, и $\forall n \in N$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k E_k^q(f) \leq A_q E_n^\alpha(f), \quad 0 < \alpha \leq q. \quad (5)$$

Если $q \geq 1$, то

$$\omega^q(h, \delta) \leq A_q \omega^\alpha(f; \delta) \sum_{k=0}^{[1/\delta]} \lambda_k, \quad (6)$$

если же $0 < q < 1$, то

$$\omega(h^q, \delta) \leq A_q \left(\omega(f, \delta) \sum_{k=0}^{[1/\delta]} \lambda_k \right)^q. \quad (7)$$

Очевидно, что при сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$, соотношение (5) выполняется с $\alpha = q$. Тогда из неравенств (6)–(7) следует

$$\omega(h, \delta) \leq A_q \omega(f; \delta) \quad q \geq 1; \quad (8)$$

$$\omega(h^q, \delta) \leq A_q \omega^q(f; \delta) \quad 0 < q < 1. \quad (9)$$

Соотношения (8)–(9) получены в работе [2].

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд утверждений, формулировки которых требуют введения обозначений.

Пусть $B \subset [n, 2n - 1] \cap N$ и $r = |B|$ — количество элементов множества B , положим

$$\Delta_t S_k(f; x) = S_k(f; x + t) - S_k(f; x),$$

$$\tau_{n,r}^{(q)}(f; x, t) = \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t S_k(f; x, t)|^q \right)^{1/q}, \quad q > 0.$$

Лемма 1. Пусть $f \in C$, $n \in N$, $B \subset [n, 2n - 1] \cap N$. Тогда для любого $q > 0$

$$\left\| \tau_{n,r}^{(q)}(f; x, t) \right\|_C \leq A_q \omega(f; t) \ln \frac{ne}{r}. \quad (10)$$

Доказательство. Так как величина $\tau_{n,r}^{(q)}(f; x, t)$ не убывает относительно параметра q , что можно проверить, применив неравенство Гельдера, то достаточно доказательство соотношения (10) провести для $q \geq 2$.

Полагая $\mu_{x,t}(u) = f(x+t+u) - f(x+u)$, представим $\Delta_t S_k(f; x)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_t S_k(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu_{x,t}(u) D_k(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{|u| \leq \frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n} \leq |u| \leq \frac{1}{r}} + \int_{\frac{1}{r} \leq |u| \leq \pi} \right) \mu_{x,t}(u) D_k(u) du = \sum_{j=1}^3 \beta_{n,k}^j, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$D_k(u) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos kx.$$

Применяя неравенство Минковского, из (11) получаем

$$\tau_{n,r}^{(q)}(f; x, t) \leq \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\beta_{n,k}^{(j)}|^q \right)^{1/q}. \quad (12)$$

Очевидно, что $\|\mu_{x,t}(u)\|_C \leq \omega(f, t)$. Так как $|D_k(u)| \leq k+1 \leq 2n$ $\forall u$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\beta_{n,k}^{(1)}|^q \right)^{1/q} &\leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1/n}^{1/n} |\mu_{x,t}(u) D_k(u)| du \right)^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq 2\omega(f, t). \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что при $0 \leq |u| \leq \frac{\pi}{2}$, $D_k(u) \leq \frac{\pi}{2|u|}$, получаем

$$\left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\beta_{n,k}^{(2)}|^q \right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n} \leq |u| \leq \frac{1}{r}} |\mu_{x,t}(u) D_k(u)| du \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \omega(f; t) \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{1/r} \frac{\pi}{|u|} du = \omega(f; t) \ln \frac{n}{r}. \quad (13)$$

Введем обозначения

$$g_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_{x,t}(u) \operatorname{ctg} \frac{u}{2}, & \frac{1}{r} \leq |u| \leq \pi, \\ 0, & |u| < \frac{1}{r}; \end{cases}$$

$$g_2(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_{x,t}(u), & \frac{1}{r} \leq |u| \leq \pi, \\ 0, & |u| \leq \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Продолжая эти функции периодически по закону $g_v(u + 2\pi) = g_v(u)$, $v = 1, 2$, получим 2π -периодические суммируемые функции. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{n,k}^{(3)} &= \frac{1}{\pi} \int_{1/r \leq |u| \leq \pi} \mu_{x,t}(u) \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} \sin ut + \frac{1}{2} \cos ut \right) dt = \\ &= b_k(g_1) + a_k(g_2), \end{aligned}$$

где a_k и b_k — косинус и синус коэффициенты Фурье соответствующих функций. Таким образом,

$$\left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\beta_{n,k}^{(3)}|^q \right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |b_k(g_1) + a_k(g_2)|^q \right)^{1/q}.$$

Сначала, используя неравенство Минковского для сумм, а затем неравенство Хаусдорфа–Юнга [2] и так как $q \geq 2$, то полагая при этом $p = \frac{q}{q-1}$, получаем в результате

$$\left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\beta_{n,k}^{(3)}|^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq r^{-1/q} \left(\left(\sum_{k \in B} |b_k(g_1)|^q \right)^{1/q} + \sum_{k \in B} |a_k(g_2)|^q \right)^{1/q} \leq \\
&\leq r^{-1/q} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_1(u)|^p du \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_2(u)|^p du \right)^{1/p} \right) = \\
&= r^{-1/q} \left(\left(\int_{\frac{1}{r} \leq |u| \leq \pi} \left| \frac{\mu_{x,t}(u)}{2tg \frac{u}{2}} \right|^p du \right)^{1/p} + \left(\int_{\frac{1}{r} \leq |u| \leq \pi} \left| \frac{\mu_{x,t}(u)}{2} \right|^p du \right)^{1/p} \right) \leq \\
&\leq 2\omega(f; t) r^{-1/q} \left(\left(\int_{\frac{1}{r}}^{\pi} u^{-p} du \right)^{1/p} + 1 \right) \leq 4q\omega(f; t). \quad (14)
\end{aligned}$$

Из соотношений (7)-(10) вытекает (5) с $A_q = 4q + 3$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $f \in C$, $B \subset [n, 2n - 1] \cap N$ и

$$\Delta_t \rho_k(f; x) = \rho_k(f; x + t) - \rho_k(f; x).$$

Тогда для любого $q > 0$

$$\chi_{n,B}^{(q)}(f; x, t) = \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \leq A_q \omega(f; t) \ln \frac{ne}{r}. \quad (15)$$

Доказательство. Так как $\Delta_t \rho_k(f; x) = \Delta_t S_k(f; x) + f(x + t) - f(x)$, считая при этом $q \geq 1$, то из неравенства Минковского, следует

$$\chi_{n,B}^{(q)}(f; x, t) \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t S_k(f; x)|^q \right)^{1/q} + |f(x + t) - f(x)|.$$

В силу леммы 1 при $|t| \leq \delta$ будем иметь

$$\left\| \chi_{n,B}^{(q)}(f; x, t) \right\|_C \leq A_q \omega(f; \delta) \ln \frac{ne}{r}.$$

Это и доказывает (15) при $q \geq 1$, а при $0 < q < 1$ —

$$\left\| \chi_{n,B}^{(q)}(f; x, t) \right\|_C \leq \left\| \chi_{n,B}^{(1)}(f; x, t) \right\|_C \leq A\omega(f; \delta) \ln \frac{ne}{r}.$$

Лемма доказана полностью.

Следствие 1. Пусть $f \in C$, тогда для любого $q > 0$

$$\left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \right\|_C \leq A_q \omega(f, \delta), \quad |t| \leq \delta.$$

Пусть

$$h_{n,r}(f; x; t) = \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q}, \quad q > 0,$$

где $r = |B|$, а $B \subset [n, 2n - 1] \cap N$.

Теорема 2. Пусть $f \in C$. Тогда если $q \geq 1$, то

$$\omega(h_{n,r}, \delta) \leq A_q \omega(f; \delta) \ln \frac{ne}{r}. \quad (16)$$

Если же $0 < q < 1$, то

$$\omega(h_{n,r}^q, \delta) \leq A_q \left(\omega(f; \delta) \ln \frac{ne}{r} \right)^q. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $q \geq 1$, тогда на основании неравенства

$$\left| \|a\|_q - \|b\|_q \right| \leq \|a - b\|_q, \quad (18)$$

где

$$\|a\|_q = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q}$$

получаем

$$|h_{n,r}(f; x+t, q) - h_{n,r}(f; x, q)| \leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q}.$$

Следовательно, в силу леммы 2

$$|h_{n,r}(f; x+t, q) - h_{n,r}(f; x, q)| \leq A_q \omega(f; t) \ln \frac{ne}{r},$$

то есть

$$\omega(h_{n,r}, \delta) \leq A_q \omega(f; t) \ln \frac{ne}{r}.$$

Если же $0 < q < 1$, то, используя неравенство

$$\left| \sum_k a_k^q - \sum_k b_k^q \right| \leq \sum_k |a_k - b_k|^q \quad (19)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} |h_{n,r}^q(f; x+t, q) - h_{n,r}^q(f; x, q)| &\leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{r} \sum_{k \in B} |\Delta_t \rho_k(f; x)| \right)^q. \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2, получаем соотношение (17). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Пусть $f \in C$. Тогда

$$\omega(h_{n,n}; \delta) \leq A_q \omega(f, \delta) \quad q \geq 1,$$

$$\omega(h_{n,n}^q; \delta) \leq A_q \omega^q(f, \delta) \quad 0 < q < 1.$$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем соотношение (6). Пусть $\delta > 0$ и $n \in N$ такое, что $2^{n-1} \leq \delta^{-1} \leq 2^n$. На основании неравенства (18) имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_t(h, x)| &= |h(f; x+t, q) - h(f; x, q)| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left(\sum_{k=0}^1 + \sum_{k=2}^{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{\infty} \right) \lambda_k |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} = \sum_{j=1}^3 \mu_n^{j,q}. \end{aligned} \quad (20)$$

После этого, применяя сначала неравенство Минковского, а затем (3), получаем

$$\begin{aligned} \mu_n^{3,q} &\leq \left(\sum_{k=2^n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x+t)|^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=2^n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq A_q \left(\sum_{k=2^{n-1}}^{\infty} \lambda_k E_k^q(f) \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, на основании условия (5) теоремы 1 и неравенства Джексона, [5], $E_n(t) \leq A\omega(f; \frac{1}{n})$, получаем

$$\mu_n^{3,q} \leq A_q E_{2^{n-1}}^{\alpha/q}(f) \leq A_q \omega^{\alpha/q}(f, \frac{1}{2^n-1}) \leq A_q \omega^{\alpha/q}(f; \delta).$$

Из неравенства (15) при $|B| = n$, $|t| \leq \delta$ следует оценка

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \leq A_q \omega^q(f; \delta),$$

поэтому

$$\mu_n^{2,q} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \lambda_k |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{2^j} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta_t \rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \leq A_q \omega(f; \delta) \left(\sum_{j=1}^{n-1} 2^j \lambda_{2^j} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq A_q \omega(f; \delta) \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_k \right)^{1/q} \leq A_q \omega(f; \delta) \left(\sum_{k=0}^{[1/\delta]} \lambda_k \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Так как $S_0(f; x) = \frac{a_0}{2}$, а

$$\begin{aligned} |\Delta_t S_1(f; x)| &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u) - f(x+u)] D_1(u) du \right| \leq \\ &\leq 6\omega(f; t) \leq 6\omega(f, \delta), \end{aligned}$$

то

$$\mu_n^{1,q} \leq 6\omega(f; \delta)(\lambda_0 + \lambda_1).$$

Таким образом,

$$|\Delta_t(h, x)|^q \leq A_q \left(\omega^\alpha(f; \delta) + \omega^q(f; \delta) \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_k \right).$$

Учитывая, что $\alpha < q$ и $\omega(f; \delta) \leq 1$, получим

$$|\Delta_t(h, x)|^q \leq A_q \omega^\alpha(f; \delta) \sum_{k=0}^{[1/\delta]} \lambda_k.$$

Этим соотношением (6) доказано.

Пусть теперь $0 < q < 1$. Тогда на основании неравенства (19) имеет место

$$|\Delta_t(h^q, x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\Delta_t \rho_k(f, x)|^q.$$

Доказательство неравенства (7) проводим так же, как и (6). Теорема 1 доказана.

Пусть функция $f \in C$ и λ -регулярный метод суммирования определяется матрицей $\{\lambda_k^n\}_{k,n \in N_0}$, причем $\lambda_k^n \geq 0$ и $\forall n$ последовательность чисел λ_k^n не возрастает. Степенные сильные метода λ записываются таким образом:

$$h_n^{(q)}(f, x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q}, \quad q > 0.$$

Заменяя последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k \in N_0}$ на $\{\lambda_n^k\}_{k,n \in N_0}$ из теоремы 1 получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть $f \in C$ и $q > 0$. Тогда

$$\omega(h_n^{(q)}, \delta) \leq A_q \omega(f; \delta), \quad q \geq 1,$$

$$\omega(h_n^{(q)^q}, \delta) \leq A_q \omega(f; \delta), \quad 0 < q < 1.$$

1. Гоголадзе Л.Д. О сильной суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций. Т. 2. Тбилиси, 1981. — С. 5–30,
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.
3. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
4. Пачулия Н.Н. Структурные свойства сильных средних рядов Фурье // Вопросы сильного суммирования простых и кратных рядов Фурье. Сухум: Абхаз. гос. ун-т, 2003. — С. 17–47.
5. Натансон И.П. Конструктивная теория функции. — М.: Гостехтеориздат, 1949. — 688 с.
6. Leindler L. Strong Approximation by Fourier series. — Budapest, 1985. — 210 p.