Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 212-246

УДК 517.5

Є. Ю. Овсій (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ

Досліджується асимптотична поведінка верхніх граней відхилень аналогів узагальнених сум Валле Пуссена від функцій з класів $C^{\bar\psi}_\infty$. У ряді важливих випадків, одержано розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для класів $C^{\bar\psi}_\infty$.

1. Постановка задачі та основні результати. В роботі [1] введені класи неперервних періодичних функцій $C^{\bar\psi}_\infty$ наступним чином.

Нехай L — простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

— ряд Фур'є функції f.

Нехай, $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, ...$, які задовольняють умову

$$\bar\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \ \ k \in N.$$

Припустимо, що ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\psi_1(k) A_k(f;x) + \psi_2(k) \widetilde{A}_k\,(f;x)\big),$$

де A_0 — деяке число, $\widetilde{A}_k\,(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$. Цю функцію називають $\bar\psi$-інтегралом функції $f(\cdot)$ і пишуть $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\bar\psi}(f;\cdot)$.

Функцію $f(\cdot) - a_0/2$ називають $\bar{\psi}$-похідною функції $F(\cdot)$ і позначають через $F^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Множину $\bar{\psi}$-інтегралів всіх функцій $f \in L$ позначають через $L^{\bar{\psi}}$, $C^{\bar{\psi}} = L^{\bar{\psi}} \cap C$.

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L, то через $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають множину $\bar{\psi}$-інтегралів функцій з $\mathfrak{N}$.

$$C^{\bar{\psi}}_{\infty} = C^{\bar{\psi}} S^0_M = \Big\{ f : \ f \in C^{\bar{\psi}}, \ f^{\bar{\psi}} \in S^0_M \Big\},$$

де

$$S^0_M = \Big\{ \varphi : \ \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)| \leqslant 1, \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0 \Big\}.$$

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних неперервних та опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geqslant 1$, які задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty$,

$$\mathfrak{M}_0 = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < \mu(\psi; t) \leqslant K, \ \forall t \geqslant 1 \},$$

де

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t)), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geqslant 1,$$

а K — деякі додатні константи, взагалі кажучи, різні, і $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0$.

За допомогою нескінченної трикутної матриці $\Lambda = \|\lambda^{(n)}_k\|$, $k, n = 0, 1, 2, ...,$ $\lambda^{(n)}_k = 0$ при $k \geqslant n$, кожній функції $f \in L$ з рядом Фур'є (1) поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda^{(n)}_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{(n)}_k A_k(f; x). \qquad (2)$$

Таким чином, будь-яка трикутна матриця Λ задає метод побудови тригонометричних поліномів $U_n(f;x;\Lambda)$.

Символом Υ позначимо множину всіх неперервних і монотонно зростаючих при $u \geqslant n-p$ $(p,n \in N, p \leqslant n)$ функцій $\varphi(u)$, які мають неперервні похідні другого порядку при $u > n-p$.

Через Φ позначимо множину всіх визначених та неперервних разом з похідними другого порядку на проміжку [0;1] функцій $F(u)$, для яких $F(1) = 1$, $F(0) \neq 0$.

В роботах [4–6] вивчалися апроксимаційні властивості узагальнених сум Валле Пуссена $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$, які представляють собою поліноми вигляду (2), коли $\lambda_k^{(n)} = \lambda_{n,p}^{\varphi,h}(k/n)$, $k = 0,1,...,n$, де

$$\lambda_{n,p}^{\varphi,h}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{n-p}{n}, \\ 1 - \frac{\varphi_n(nu)}{\varphi_n(n)} h_n(u), & \frac{n-p}{n} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

$p \in [1; n-1] \cap N$, $p = p(n)$, $h_n \in \Phi$, а $\varphi_n(u)$ — послідовність функцій, диференційованих і монотонно зростаючих при $u \geqslant n-p+1$, причому, якщо $u \in [(n-p)/n; (n-p+1)/n]$, то

$$\varphi_n(nu) = \frac{\psi(n-p+1)\varphi_n(n-p+1)h_n(\frac{n-p+1}{n})}{\psi(nu)h_n(u)}(nu-n+p).$$

Нехай

$$\lambda_{n,p}^{\varphi,F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{n-p}{n}, \\ 1 - \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(u), & \frac{n-p}{n} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases} \qquad (3)$$

де $p \in [1; n]$ — деяке натуральне число, $p = p(n)$.

Поліноми вигляду (2), коли $\lambda_k^{(n)} = \lambda_{n,p}^{\varphi,F}(k/n)$, $k = 0,1,...,n$, назвемо аналогами узагальнених сум Валле Пуссена і позначимо через $U_{n,p}^{\varphi,F}(f;x)$.

При певних умовах, поліноми $U_{n,p}^{\varphi,F}(f;x)$ співпадають як з узагальненими сумами $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$, так і з відомими класичними сумами — такими, як суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ ($\varphi(u) = u$ і $F(u) \equiv 1$), суми Зігмунда $Z_n^{(s)}(f;x)$ ($\varphi(u) = u^s$, де $s > 0$, $F(u) \equiv 1$ і $p = n$) тощо.

Поліноми $U_{n,p}^{\varphi,F}(f;x)$ задаються значно більшою множиною параметрів $\varphi(\cdot)$, ніж суми $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$. При певних умовах монотонності та опуклості на функції $\varphi(\cdot)\psi_i(\cdot)$, $i = 1,2$, це дає можливість одержувати розв'язки задачі Колмогорова–Нікольського для більшого кола множин $\bar{\psi}$-інтегралів.

З історією задачі Колмогорова–Нікольського можна детально ознайомитися, наприклад, в роботі [3].

В роботі вивчається асимптотична поведінка при $n \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \sup_{f \in C_\infty^{\bar{\psi}}} \left\| f(x) - U_{n,p}^{\varphi,F}(f;x) \right\|_C$$

при умові, що $\Theta = 1$, де $\Theta \overset{\text{df}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} p(n)/n$, причому $n - p(n)$ фіксовано.

Основний результат даної роботи міститься в такому твердженні.

Теорема. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, $\varphi \in \Upsilon$, $F \in \Phi$, $\Theta = 1$ *і функції* $g_i(u) \overset{\text{df}}{=} \varphi(u)\psi_i(u)$, $i = 1,2$, *не спадають та опуклі догори при* $u \geqslant a_0 \geqslant 1$.

Тоді при $n \to \infty$ *справедлива рівність*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+\frac{2|F(0)|}{\pi(\varphi(n)-\varphi(n-p))}\int\limits_{n-p+1}^{n} \frac{(\varphi(u)-\varphi(n-p))\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\bar{\psi}(n), \qquad (4)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n.

2. Допоміжні твердження. Нехай $\tau_n^{(i)}(u)$, $n \in N$, $i = 1, 2,$ — неперервні при всіх $u \geqslant 0$ функції.

Якщо $\tau_n^{(1)}(u)$ і $\tau_n^{(2)}(u)$ мають абсолютно інтегровні на всій осі перетворення Фур'є

$$\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau_n^{(1)}(u) \cos ut \, du, \ \ \widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau_n^{(2)}(u) \sin ut \, du$$

і

$$\tau_n^{(i)}(\frac{k}{n}) = \begin{cases} (1 - \lambda_k^{(n)})\psi_i(k), & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \psi_i(k), & k \geqslant n, \ \ i = 1, 2, \end{cases} \tag{5}$$

де $\lambda_k^{(n)}$ — як і раніше, елементи матриці Λ, а послідовності $\psi_i(k)$, $k = 1, 2, ...$, є звуженнями на множині натуральних чисел деяких функцій $\psi_i(\cdot)$ з множини $\mathfrak{M}$, то згідно з теоремою 2 і пунктом 3 роботи [1], для довільної функції $f \in C^{\bar\psi}M$ в кожній точці $x \in R^1$ справедлива рівність

$$\delta_n(f; x; \Lambda) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) - U_n(f; x; \Lambda) = \int\limits_{-\infty}^\infty f^{\bar\psi}(x - \frac{t}{n}) \widehat{\tau}_n(t) \, dt, \tag{6}$$

де

$$\widehat{\tau}_n(t) = \widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t) + \widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t).$$

В прийнятих позначеннях має місце лема.

Лема 1. *Нехай $\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t)$, $\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)$ — абсолютно інтегровні на R^1 і виконується співвідношення* (5).

Тоді при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar\psi}; U_n\right) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_\infty^{\bar\psi}} \left\|\delta_n(f; x; \Lambda)\right\|_C =$$

$$= \int\limits_{|t|\geqslant 1} \left|\widehat{\tau}_n(t)\right| dt + \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n-}(t)\right| dt +$$

$$+O(1)\Bigg(\int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n+}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|\geqslant \frac{\pi n}{2}} \left|\widehat{\tau}_n(t)\right| dt \Bigg). \tag{7}$$

Доведення. Зважаючи на те, що класи $C^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ інваріантні відносно зсуву аргументу, а також той факт, що при $\vartheta \in S^0_M$ функція $\vartheta(-t)$ теж належить до множини S^0_M, та враховуючи (6), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n\right) = \sup_{f\in C^{\bar{\psi}}_{\infty}} \left|\delta_n(f;0;\Lambda)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sup_{\vartheta\in S^0_M} \Big| \int\limits_{|t|\leqslant 1} \vartheta\big(\frac{t}{n}\big) \int\limits_0^{\infty} \tau^{(1)}_n(u)\cos ut\, du\, dt\Big| +$$

$$+\frac{1}{\pi} \sup_{\vartheta\in S^0_M} \Big| \int\limits_{|t|\leqslant 1} \vartheta\big(\frac{t}{n}\big) \int\limits_0^{\infty} \tau^{(2)}_n(u)\sin ut\, du\, dt\Big| +$$

$$+\frac{1}{\pi} \sup_{\vartheta\in S^0_M} \Big| \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant \frac{\pi n}{2}} \vartheta\big(\frac{t}{n}\big) \int\limits_0^{\infty} \big(\tau^{(1)}_n(u)\cos ut + \tau^{(2)}_n(u)\sin ut\big)\, du\, dt\Big| +$$

$$+\frac{1}{\pi} \sup_{\vartheta\in S^0_M} \Big| \int\limits_{|t|\geqslant \frac{\pi n}{2}} \vartheta\big(\frac{t}{n}\big) \int\limits_0^{\infty} \big(\tau^{(1)}_n(u)\cos ut + \tau^{(2)}_n(u)\sin ut\big)\, du\, dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant \frac{\pi n}{2}} \left|\widehat{\tau}_n(t)\right| dt + \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n-}(t)\right| dt +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n}{2}}\left|\widehat{\tau}_n(t)\right|dt\right). \qquad (8)$$

Нехай

$$\vartheta_n(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}\Big(\int\limits_0^\infty \tau_n^{(2)}(u)\sin nut\,du\Big), & t\in[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}],\\ \operatorname{sign}\Big(\int\limits_0^\infty \big(\tau_n^{(1)}(u)\cos nut+ & \\ +\tau_n^{(2)}(u)\sin nut\big)\,du\Big), & t\in[-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{n})\cup(\frac{1}{n};\frac{\pi}{2}].\end{cases}$$

Через $\vartheta_n^*(t)$ позначимо функцію з S_M^0, яка співпадає з $\vartheta_n(t)$ на проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, а через $f_1(\cdot)$ — функцію з $C_\infty^{\bar\psi}$, для якої $f_1^{\bar\psi}(t)=\vartheta_n^*(-t)$. Такі функції завжди існують.

Тоді, у відповідності до (6), маємо

$$\delta_n(f_1;0;\Lambda)=\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi n}{2}}\left|\widehat{\tau}_n(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)\right|dt+$$

$$+O(1)\left(\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n}{2}}\left|\widehat{\tau}_n(t)\right|dt\right). \qquad (9)$$

Співставляючи співвідношення (8) та (9), одержуємо (7).

Лема 1 доведена.

Нехай

$$a=\frac{n-q}{n},\quad q\in[1;n]\cap N.$$

Лема 2. *Нехай* $\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\psi_2\in\mathfrak{M}_0'$, *функції* $\tau_n^{(i)}(u)$, $i=1,2$, — *абсолютно неперервні на відрізку* [0;1], *тотожно дорівнюють нулю при* $u\in[0;a]$, *дорівнюють* $\psi_i(nu)$ *при* $u\geqslant 1$ *і задовольняють співвідношення* (5), *а функції* $(\tau_n^{(i)}(u))'$

в тих точках, де вони не існують, можна довизначити так, що інтеграли $\int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|$, *збігаються і виконуються умови*

$$\int\limits_a^1 \frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}\,du < \infty, \quad \int\limits_0^1 \frac{|\mu_n^{(i)}(u)|}{1-u}\,du < \infty, \tag{10}$$

де

$$\mu_n^{(i)}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant a, \\ 1-\tau_n^{(i)}(u)/\psi_i(na+1), & a \leqslant u \leqslant a+1/n, \\ 1-\tau_n^{(i)}(u)/\psi_i(nu), & a+1/n \leqslant u \leqslant 1, \ i=1,2. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді при $n \to \infty$ *справедливі рівності*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar\psi}; U_n\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_a^1 \frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}\,du + \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_0^1 \frac{\sigma_n(u)}{1-u}\,du + \int\limits_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}\,du + \alpha_n\right) \tag{12}$$

і

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar\psi}; U_n\right) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1 \frac{\sigma_n(u)}{1-u}\,du + \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_{1-\frac{2}{\pi n}}^1 \frac{\sigma_n(u)}{1-u}\,du + \int\limits_a^1 \frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}\,du + \alpha_n\right), \tag{13}$$

де

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{2}\int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'| + \bar\psi(n),$$

$$\sigma_n(u)=\sqrt{\left(\psi_1(n)\mu_n^{(1)}(u)\right)^2+\left(\psi_2(n)\mu_n^{(2)}(u)\right)^2}. \qquad (14)$$

Якщо, крім цього,

$$|\tau_n^{(2)}(u)|\geqslant\sigma_n(1-u),\quad u\in[0;1],$$

то в формулі (12) *можно опустити величину*

$$\int_0^1\frac{\sigma_n(u)}{1-u}\,du.$$

Доведення. Нехай

$$\nu_n^{(i)}(u)=\begin{cases}\psi_i(n)u, & 0\leqslant u\leqslant 1,\\ \psi_i(nu), & u\geqslant 1,\end{cases} \qquad (15)$$

і

$$\delta_n^{(i)}(u)=\tau_n^{(i)}(u)-\nu_n^{(i)}(u),\ \ i=1,2. \qquad (16)$$

Використовуючи схему доведення леми 3 із роботи [8], отримуємо, що за даних умов $\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t)$ і $\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)$ абсолютно інтегровні на R^1. Тоді, зважаючи на лему 1 і враховуючи (16), одержуємо

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar\psi};U_n\right)=\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\delta}_n(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\leqslant1}\left|\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)\right|dt+$$

$$+O(1)\Bigg(\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\nu}_n(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\leqslant1}\left|\widehat{\tau}_{n+}^{(1)}(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n}{2}}\left|\widehat{\delta}_n(t)\right|dt\Bigg)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\delta}_n(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\leqslant1}\left|\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)\right|dt+O(1)\Bigg(\int\limits_{|t|\geqslant1}\left|\widehat{\nu}_n(t)\right|dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\delta}_n(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n+}(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n}{2}}\left|\widehat{\delta}_n(t)\right|dt\Bigg). \qquad (17)$$

В роботі [9, с. 131] встановлено оцінку

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}|\widehat{\nu}_n(t)|\,dt=O(1)\bar{\psi}(n). \qquad (18)$$

Оскільки функції $\delta_n^{(i)}(u)$, $i=1,2$, є абсолютно неперервні на проміжку [0;1], $\delta_n^{(i)}(0)=\delta_n^{(i)}(1)=0$, і

$$\int\limits_0^1 u(1-u)\,|d(\delta_n^{(i)}(u))'|=\int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|<\infty,\ \ i=1,2,$$

то згідно з лемою 1 роботи [12], маємо

$$|\delta_n^{(i)}(u)|\leqslant\int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|,\quad u\in[0;1],\quad i=1,2.$$

Тоді

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1}|\widehat{\delta}_n(t)|\,dt<\sum_{i=1}^2\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1\delta_n^{(i)}(u)\cos\left(ut+\frac{1-i}{2}\pi\right)du\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^2\int\limits_0^1|\delta_n^{(i)}(u)|\,du\leqslant\sum_{i=1}^2\max_{u\in[0;1]}|\delta_n^{(i)}(u)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^2\int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|. \qquad (19)$$

Неважко показати, що

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n+}(t)\right| dt = O(1)\Big(\bar{\psi}(n) + \int\limits_a^1 u(1-u)\,|d(\tau^{(1)}_n(u))'|\Big). \quad (20)$$

Об'єднуючи співвідношення (17) – (20), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\delta}_n(t)\right| dt + \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n-}(t)\right| dt +$$

$$+O(1)\left(\bar{\psi}(n) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_a^1 u(1-u)|d(\tau^{(i)}_n(u))'| + \int\limits_{|t|\geqslant \frac{\pi n}{2}} \left|\widehat{\delta}_n(t)\right| dt\right). \quad (21)$$

Далі, розглянемо інтеграл $\int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n-}(t)\right| dt$.

Покладемо

$$V_n(u) = \begin{cases} \psi_2(n), & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \psi_2(nu), & u \geqslant 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n-}(t)\right| dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^{\infty} V_n(u)\sin ut\, du\right| dt +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^1 \left(\tau^{(2)}_n(u) - V_n(u)\right)\sin ut\, du\right| dt\right). \quad (22)$$

Маємо оцінку

$$\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^1 \left(\tau^{(2)}_n(u) - V_n(u)\right)\sin ut\, du\right| dt \leqslant \int\limits_a^1 |\tau^{(2)}_n(u)|\, du + \psi_2(n) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{u\in[a;1]} |\tau_n^{(2)}(u)| + \psi_2(n) = \max_{u\in[a;1]} |\delta_n^{(2)}(u) + \nu_n^{(2)}(u)| + \psi_2(n) =$$

$$= O(1)\bigg(\int_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(2)}(u))'| + \bar{\psi}(n)\bigg). \qquad (23)$$

Зважаючи на встановлене в роботі [10, с. 191] співвідношення:

$$\int_0^1 \bigg|\int_0^\infty V_n(u)\sin ut\,du\bigg|\,dt = \int_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du + O(1)\bar{\psi}(n), \qquad (24)$$

а також враховуючи (22) – (24), отримуємо

$$\int_{|t|\leqslant 1} \big|\widehat{\tau}_{n-}^{(2)}(t)\big|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\bigg(\int_a^1 u(1-u)\,|d(\tau_n^{(2)}(u))'| + \bar{\psi}(n)\bigg). \qquad (25)$$

На підставі леми 1 роботи [7], маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\delta}_n(t)|\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 \xi\big(\delta_n^{(2)}(u), \sqrt{(\delta_n^{(1)}(1-u))^2 + (\delta_n^{(2)}(1-u))^2}\big)\,\frac{du}{u} +$$

$$+O(1)\left(\int_a^1 u(1-u)|d(\tau_n^{(1)}(u))'| + \int_a^1 u(1-u)|d(\tau_n^{(2)}(u))'|\right), \quad (26)$$

де функція $\xi(t,u)$ визначається рівностями

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|t|, & |u|\leqslant|t|,\\ |t|\arcsin\left|\frac{t}{u}\right|+\sqrt{u^2-t^2}, & |u|>|t|.\end{cases}\tag{27}$$

Згідно з лемою 7.3 роботи [2, с. 63], для функції $\xi(t;u)$ виконується рівність

$$\xi(A,\sqrt{B^2+D^2})=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|A+B\sin x+D\cos x\big|\,dx,$$

де A, B і D — довільні дійсні числа.

Звідси випливають такі нерівності

$$|\xi(A,\sqrt{B_1^2+D_1^2})-\xi(A,\sqrt{B_2^2+D_2^2})|\leqslant|B_1-B_2|+|D_1-D_2|,\tag{28}$$

$$|\xi(A_1,\sqrt{B^2+D^2})-\xi(A_2,\sqrt{B^2+D^2})|\leqslant\frac{\pi}{2}|A_1-A_2|.\tag{29}$$

Користуючись оцінкою (28) і зважаючи на те, що $\xi(A,\sqrt{B^2+D^2})=\xi(A,\sqrt{(-B)^2+(-D)^2})$, отримуємо

$$\Big|\xi\big(\delta_n^{(2)}(u),\sqrt{(\delta_n^{(1)}(1-u))^2+(\delta_n^{(2)}(1-u))^2}\big)-$$
$$-\xi\big(\delta_n^{(2)}(u),\sqrt{(\psi_1(n)\mu_n^{(1)}(1-u))^2+(\psi_2(n)\mu_n^{(2)}(1-u))^2}\big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant|\delta_n^{(1)}(1-u)+\psi_1(n)\mu_n^{(1)}(1-u)|+|\delta_n^{(2)}(1-u)+\psi_2(n)\mu_n^{(2)}(1-u)|=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}|\tau_n^{(i)}(1-u)-\psi_i(n)(1-u)+\psi_i(n)\mu_n^{(i)}(1-u)|=\sum_{i=1}^{2}|s_n^{(i)}(1-u)|.$$

Таким чином, враховуючи (14) та (26), отримуємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\delta}_n(t)|\,dt=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{1}\xi\big(\delta_n^{(2)}(u),\sigma_n(1-u)\big)\,\frac{du}{u}+$$

$$+O(1)\sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{|s_n^{(i)}(u)|}{1-u}\,du+\int\limits_{a}^{1}u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|\right), \qquad (30)$$

де

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|s_n^{(i)}(u)|}{1-u}\,du=\int\limits_{0}^{a}\frac{\psi_i(n)(1-u)}{1-u}\,du+$$

$$+\int\limits_{a}^{a+\frac{1}{n}}\frac{|\tau_n^{(i)}(u)-\psi_i(n)u+\psi_i(n)\big(1-\frac{\tau_n^{(i)}(u)}{\psi_i(na+1)}\big)|}{1-u}\,du+$$

$$+\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{1}\frac{|\tau_n^{(i)}(u)-\psi_i(n)u+\psi_i(n)\big(1-\frac{\tau_n^{(i)}(u)}{\psi_i(nu)}\big)|}{1-u}\,du\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{a}^{a+\frac{1}{n}}\frac{|\tau_n^{(i)}(u)\big(1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(na+1)}\big)|}{1-u}\,du+$$

$$+\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{1}\frac{|\tau_n^{(i)}(u)\big(1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}\big)|}{1-u}du+\psi_i(n)=J_{n,1}^{(i)}+J_{n,2}^{(i)}+\psi_i(n). \qquad (31)$$

Але ж $1-\psi_i(n)/\psi_i(na+1)=O(1)(n(1-a)-1)/(na+1)$, тому

$$J_{n,1}^{(i)}=O(1)\frac{n(1-a)-1}{na+1}\int\limits_{a}^{a+\frac{1}{n}}\frac{|\tau_n^{(i)}(u)|}{1-u}\,du=$$

$$=O(1)\frac{n}{na+1}\int\limits_{a}^{a+\frac{1}{n}}|\tau_n^{(i)}(u)|\,du=O(1)\max_{u\in[a;a+\frac{1}{n}]}|\tau_n^{(i)}(u)|.$$

Далі,

$$J_{n,2}^{(i)} \leqslant \max_{u\in[a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{1} \frac{1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\,du.$$

Якщо $a+1/n<1/2$, то

$$\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{1} \frac{1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\,du = \left(\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\right) \frac{1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} du + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\psi_i(nu)-\psi_i(n)}{\psi_i(nu)(1-u)}\,du <$$

$$< 1 + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{|\psi_i'(n\alpha)|n(1-u)}{\psi_i(nu)(1-u)}\,du, \quad \alpha\in(u;1).$$

Оскільки функції $|\psi_i'(t)|,\ i=1,2$, спадають при $t\geqslant 1$, то

$$J_{n,2}^{(i)} < \max_{u\in[a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \left(1+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{|\psi_i'(nu)|n}{\psi_i(nu)}\,du\right) =$$

$$= \max_{u\in[a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \left(1+\int\limits_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{|\psi_i'(t)|}{\psi_i(t)}\,dt\right) =$$

$$= \max_{u\in[a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \left(1+\int\limits_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{dt}{t\alpha_i(t)}\right), \quad \alpha_i(t)=\frac{\psi_i(t)}{t|\psi_i'(t)|}.$$

За теоремою 12.1 з роботи [2, с. 161], для функцій $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, 2$, величини $\alpha_i(t)$ задовольняють умову

$$\alpha_i(t) \geqslant K > 0 \quad \forall t \geqslant 1, \quad i = 1, 2.$$

Тому

$$J_{n,2}^{(i)} = O(1) \max_{u \in [a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \left(1 + \int\limits_{\frac{n}{2}}^{n} \frac{dt}{t}\right) = O(1) \max_{u \in [a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)|.$$

Якщо ж $a + 1/n \geqslant 1/2$, то

$$J_{n,2}^{(i)} \leqslant \max_{u \in [a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)| \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - \frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\, du = O(1) \max_{u \in [a+\frac{1}{n};1]} |\tau_n^{(i)}(u)|.$$

Таким чином,

$$J_{n,1}^{(i)} + J_{n,2}^{(i)} =$$

$$= O(1) \max_{u \in [a;1]} |\tau_n^{(i)}(u)| = O(1) \left(\max_{u \in [a;1]} |\delta_n^{(i)}(u)| + \psi_i(n) \right) =$$

$$= O(1) \left(\int\limits_{a}^{1} u(1-u)\, |d(\tau_n^{(i)}(u))'| + \bar{\psi}(n) \right), \quad i = 1, 2. \qquad (32)$$

На підставі нерівності (29), маємо

$$\left| \xi\big(\delta_n^{(2)}(u), \sigma_n(1-u)\big) - \xi\big(\tau_n^{(2)}(u), \sigma_n(1-u)\big) \right| \leqslant \frac{\pi}{2} |\nu_n^{(2)}(u)|.$$

Тоді, враховуючи (30)–(32) і (15), отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\delta}_n(t)|\, dt = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{0}^{1} \xi\big(\tau_n^{(2)}(u), \sigma_n(1-u)\big) \frac{du}{u} +$$

$$+O(1)\biggl(\bar{\psi}(n)+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{a}^{1}u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|\biggr). \qquad (33)$$

Далі, застосовуючи лему 1 з роботи [7] і використовуючи ті ж самі міркування, що і при доведенні попередньої оцінки, отримуємо

$$\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n}{2}}|\widehat{\delta}_n(t)|\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\delta}_n(t)|\,dt-\int\limits_{-\frac{\pi n}{2}}^{\frac{\pi n}{2}}|\widehat{\delta}_n(t)|\,dt=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi n}}\xi\bigl(\tau_n^{(2)}(u),\sigma_n(1-u)\bigr)\,\frac{du}{u}+$$

$$+O(1)\biggl(\bar{\psi}(n)+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{a}^{1}u(1-u)\,|d(\tau_n^{(i)}(u))'|\biggr). \qquad (34)$$

За лемою 7.4 [2, с. 63] для функції $\xi(t;u)$, яка визначена рівністю (27), при будь-яких значеннях t і u справедливі нерівності

$$\xi(t;u)-\frac{\pi}{2}|t|\leqslant|u|, \qquad \xi(t;u)-|u|\leqslant\frac{\pi}{2}|t|.$$

Отже, при будь-яких $\tau_n^{(2)}(u)$ і $\sigma_n(1-u)$, маємо

$$\int\limits_{0}^{1}\xi\bigl(\tau_n^{(2)}(u),\sigma_n(1-u)\bigr)\,\frac{du}{u}-\frac{\pi}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}du\leqslant\int\limits_{0}^{1}\frac{\sigma_n(u)}{1-u}du, \qquad (35)$$

$$\int\limits_{0}^{1}\xi\bigl(\tau_n^{(2)}(u),\sigma_n(1-u)\bigr)\frac{du}{u}-\int\limits_{0}^{1}\frac{\sigma_n(u)}{1-u}du\leqslant\frac{\pi}{2}\int\limits_{a}^{1}\frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}du. \qquad (36)$$

Об'єднуючи співвідношення (21), (25), (33)–(36), одержуємо рівності (12) та (13).

Якщо $|\tau_n^{(2)}(u)| \geqslant \sigma_n(1-u),\ u \in [0;1]$, то згідно з означенням функції $\xi(t;u)$, отримуємо

$$\int\limits_0^1 \xi\big(\tau_n^{(2)}(u), \sigma_n(1-u)\big)\,\frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^1 \frac{|\tau_n^{(2)}(u)|}{u}\,du. \qquad (37)$$

Тоді, зважаючи на співвідношення (21), (25), (33), (34) та (37), можемо зробити висновок, що інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sigma_n(u)}{1-u}\,du$ в рівності (12) можно опустити.

Лема 2 доведена.

Лема 3. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $\varphi \in \Upsilon$, $F \in \Phi$, n, p — *довільні натуральні числа,* $p \leqslant n$, *і функції* $\tau_{n,p}^{(i)}(u)$, $i = 1, 2$, *означені за допомогою співвідношення*

$$\tau_{n,p}^{(i)}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{n-p}{n}, \\ \frac{\varphi(n-p+1)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(\frac{n-p+1}{n})\cdot & \\ \cdot\psi_i(n-p+1)(nu-n+p), & \frac{n-p}{n} \leqslant u \leqslant \frac{n-p+1}{n}, \\ \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(u)\psi_i(nu), & \frac{n-p+1}{n} \leqslant u \leqslant 1, \\ \psi_i(nu), & u \geqslant 1. \end{cases} \qquad (38)$$

Тоді перетворення

$$\widehat{\tau}_{n,p+}^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_{n,p}^{(1)}(u)\cos ut\,du, \qquad (39)$$

$$\widehat{\tau}_{n,p-}^{(2)}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_{n,p}^{(2)}(u)\sin ut\,du \qquad (40)$$

абсолютно інтегровні на всій числовій осі, тобто $\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}, \widehat{\tau}^{(2)}_{n,p-} \in L(R)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t)\right| dt < \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\tau}^{(2)}_{n,p-}(t)\right| dt < \infty.$$

Доведення. Доведення буде проведено в два етапи.

1. Покажемо, що $\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+} \in L(R)$.

Справедлива рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t)\right|dt=\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t)\right|dt+\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t)\right|dt=j_{n,1}+j_{n,2}. \quad (41)$$

Нехай

$$\phi_n(u) = \begin{cases} \psi_1'(n)(u-1)n + \psi_1(n), & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \psi_1(nu), & u \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\Delta_{n,p}(u) = \tau^{(1)}_{n,p}(u) - \phi_n(u) =$$

$$= \begin{cases} \tau^{(1)}_{n,p}(u) - \psi_1'(n)(u-1)n - \psi_1(n), & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 0, & u \geqslant 1. \end{cases}$$

Інтегруючи частинами і враховуючи те, що функції $\tau^{(i)}_{n,p}(u)$ зникають на нескінченності, отримуємо

$$j_{n,1} < \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^{\infty} (\tau^{(1)}_{n,p}(u))' \frac{\sin ut}{t}\, du \right| dt \leqslant \left(\int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^1 \phi_n'(u) \frac{\sin ut}{t}\, du \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \left| \int\limits_1^{\infty} \phi_n'(u) \frac{\sin ut}{t}\, du \right| dt + \int\limits_0^1 \left| \int\limits_0^1 \Delta_{n,p}'(u) \frac{\sin ut}{t}\, du \right| dt \right). \quad (42)$$

Оскільки $t^{-1}\sin ut \leqslant 1$ $\forall u \in [0;1]$, $\forall t \in (0;1]$, то

$$\int\limits_0^1 \Big| \int\limits_0^1 \phi_n'(u)\frac{\sin ut}{t}\,du\Big|\,dt \leqslant \int\limits_0^1 \big|\phi_n'(u)\big|\,du = |\psi_1'(n)|n. \tag{43}$$

Згідно з лемою 3.1 роботи [2, с. 189], справедлива оцінка

$$\int\limits_0^1 \Big| \int\limits_1^\infty \phi_n'(u)\frac{\sin ut}{t}\,du\Big|\,dt = \int\limits_0^1 \Big|\frac{n}{t}\int\limits_1^\infty \psi_1'(nu)\sin ut\,du\Big|\,dt <$$

$$< \pi\psi_1(n) + |\psi_1'(n)|n. \tag{44}$$

Нехай

$$\upsilon_i(p;u) \overset{\text{df}}{=} \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}\psi_i(nu), \ \ i=1,2. \tag{45}$$

Бачимо, що

$$\upsilon_i(p;\frac{n-p}{n}) = 0, \ \upsilon_i(p;1) = \psi_i(n)$$

і

$$\upsilon_i\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big) = \begin{cases} O(1)\psi_i(n-p+1), & 0 \leqslant \Theta < 1, \\ O(1)\varphi(n)^{-1}, & \Theta = 1, \ i=1,2. \end{cases} \tag{46}$$

Тоді

$$\Delta_{n,p}'(u) = \begin{cases} -\psi_1'(n)n, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{n-p}{n}, \\ \upsilon_1(p;\frac{n-p+1}{n})F(\frac{n-p+1}{n})n- & \\ \quad -\psi_1'(n)n, & \frac{n-p}{n} < u \leqslant \frac{n-p+1}{n}, \\ \big(\upsilon_1(p;u)F(u)\big)' - \psi_1'(n)n, & \frac{n-p+1}{n} < u \leqslant 1 \end{cases}$$

і

$$\int\limits_0^1 \Big| \int\limits_0^1 \Delta'_{n,p}(u)\frac{\sin ut}{t}\,du\Big|\,dt \leqslant \int\limits_0^1 \big|\Delta'_{n,p}(u)\big|\,du \leqslant |\psi'_1(n)|n+$$

$$+\upsilon_1\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)\big|F\big(\frac{n-p+1}{n}\big)\big|n \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} du+$$

$$+\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \Big|\big(\upsilon_1(p;u)F(u)\big)'\Big|\,du = O(1)\Big(|\psi'_1(n)|n+$$

$$+\upsilon_1\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)+\frac{p}{n}\max_{\frac{n-p+1}{n}<u\leqslant 1}\big(\big|\upsilon'_1(p;u)\big|+\upsilon_1(p;u)\big)\Big). \quad (47)$$

Згідно з (45)

$$|\upsilon'_i(p;u)| \leqslant \frac{\varphi'(nu)\psi_i(nu)n}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}+|\psi'_i(nu)|n, \quad \frac{n-p+1}{n}\leqslant u\leqslant 1.$$

Отже, об'єднуючи співвідношення (42) – (44) і (47), отримуємо

$$j_{n,1}<\infty. \quad (48)$$

Розглянемо інтеграл $j_{n,2}$.

Спочатку, інтегруючи частинами і враховуючи те, що $\tau^{(i)}_{n,p}(0)=\tau^{(i)}_{n,p}(\infty)=0$, $i=1,2$, отримуємо

$$\Big|\int\limits_0^\infty \tau^{(i)}_{n,p}(u)\cos\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du\Big| =$$

$$=\frac{1}{t}\Big|\int\limits_0^\infty \big(\tau^{(i)}_{n,p}(u)\big)'\sin\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du\Big| =$$

$$= \frac{1}{t}\Big|\upsilon_i\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)F\big(\frac{n-p+1}{n}\big)n\int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}}\sin\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du+$$

$$+\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1}\big(\upsilon_i(p;u)F(u)\big)'\sin\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du+$$

$$+\int\limits_{1}^{\infty}\big(\psi_i(nu)\big)'\sin\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du\Big| = \frac{O(1)}{t^2}\Big(\upsilon_i\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)n+$$

$$+\Big|\big(\upsilon_i(p;u)F(u)\big)'\cos\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\Big|_{\frac{n-p+1}{n}}^{1}\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1}\big(\upsilon_i(p;u)F(u)\big)''\cos\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du\Big|+$$

$$+\Big|\big(\psi_i(nu)\big)'\cos\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\Big|_{1}^{\infty}\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{1}^{\infty}\big(\psi_i(nu)\big)''\cos\Big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\Big)\,du\Big|\Big) =$$

$$= O(1)\frac{1}{t^2}\Big(\upsilon_i\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)n+|\upsilon_i'(p;1)|+\big|\upsilon_i'\big(p;\frac{n-p+1}{n}\big)\big|+$$

$$+\frac{p}{n}\max_{\frac{n-p+1}{n}\leqslant u\leqslant 1}\big(|\upsilon_i''(p;u)|+|\upsilon_i'(p;u)|+\upsilon_i(p;u)\big)+$$

$$+\psi_i(n)+|\psi_i'(n)|n\Big). \qquad (49)$$

Тоді

$$\Big|\int\limits_0^\infty \tau_{n,p}^{(i)}(u)\cos\big(ut+\frac{1-i}{2}\pi\big)\,du\Big| \leqslant \frac{C(n)}{t^2}, \quad i=1,2, \tag{50}$$

де $C(n)$ — константа, яка залежить тільки від n.

Із урахуванням останньої оцінки отримуємо

$$j_{n,2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_1^\infty \Big|\int\limits_0^\infty \tau_{n,p}^{(1)}(u)\cos ut\,du\Big|\,dt < \infty. \tag{51}$$

Співставляючи (41), (48) та (51), переконуємося в тому, що функція $\widehat{\tau}_{n,p+}^{(1)}(t)$ абсолютно інтегровна на R^1.

2. Покажемо, що $\widehat{\tau}_{n,p-}^{(2)} \in L(R)$.

Згідно з (50), маємо

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1} |\tau_{n,p-}^{(2)}(t)|\,dt < \infty. \tag{52}$$

Оскільки $\tau_{n,p}^{(2)}(u) = \psi_2(nu)$ при $u \geqslant 1$, то, користуючись оцінкою (3.36) роботи [2, с. 191], отримуємо

$$\int\limits_{|t|\leqslant 1} |\tau_{n,p-}^{(2)}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\tau_{n,p}^{(2)}(u)|dudt + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\Big|\int\limits_1^\infty \psi_2(nu)\sin ut du\Big|dt < \infty. \tag{53}$$

Використовуючи співвідношення (52) і (53), показуємо, що інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_{n,p-}^{(2)}(t)|\,dt$ збігається.

Лема 3 доведена.

Лема 4. *Нехай* $f \in C^{\bar\psi}M$ *і функції* $\tau^{(i)}_{n,p}(u),\ i = 1,2,$ *визначені співвідношенням* (38). *Тоді в кожній точці* $x \in R^1$ *справедлива рівність*

$$\delta^{\varphi,F}_{n,p}(f;x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) - U^{\varphi,F}_{n,p}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar\psi}(x - \frac{t}{n})\widehat{\tau}_{n,p}(t)\,dt, \quad (54)$$

де $\widehat{\tau}_{n,p}(t) = \widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t) + \widehat{\tau}^{(2)}_{n,p-}(t)$, *а функції* $\widehat{\tau}^{(1)}_{n,p+}(t),\ \widehat{\tau}^{(2)}_{n,p-}(t)$ *визначені формулами* (39) *і* (40).

Доведення. Із співвідношення (38) випливає, що

$$\tau^{(i)}_{n,p}(\frac{k}{n}) = \begin{cases} \big(1 - \lambda^{\varphi,F}_{n,p}(k/n)\big)\psi_i(k), & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \psi_i(k), & k \geqslant n, \ \ i = 1,2, \end{cases} \quad (55)$$

де $\lambda^{\varphi,F}_{n,p}(k/n)$ — це значення підсумовуючої функції $\lambda^{\varphi,F}_{n,p}(u)$, яка визначається рівностями (3), в точці k/n.

Звідси, на підставі леми 3 даної роботи, теореми 2 та пункту 3 роботи [1], отримуємо твердження леми.

Лема 4 доведена.

3. Доведення теореми. Нехай функції $\tau^{(i)}_n(u) = \tau^{(i)}_{n,p}(u)$, $i = 1,2$, визначені рівностями (38).

Ці функції абсолютно неперервні на відрізку [0;1]. Переконаємося, що функції $\tau^{(1)}_{n,p}(u)$ і $\tau^{(2)}_{n,p}(u)$ задовольняють всі умови леми 2.

Розглянемо інтеграл

$$m^{(i)}_{n,p} = \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{1} u(1-u)\,|d(\tau^{(i)}_{n,p}(u))'| =$$

$$= \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} (u-u^2)\big|(\upsilon_i(p;u)F(u))''\big|\,du. \qquad (56)$$

В даному випадку, роль величини a в лемі 2 грає число $\frac{n-p}{n}$.

Спочатку зазначимо, що довільні поліноми $U^{\varphi,F}_{n,p}(f;x)$, які задаються деякими функціями $\varphi(\cdot)$ з множини Υ, задаються також і функціями $\varphi_1(\cdot)=\varphi(\cdot)+h,\ h\in R^1$. Дійсно, для цього, враховуючи (3), достатньо помітити, що

$$\frac{\varphi_1(nu)-\varphi_1(n-p)}{\varphi_1(n)-\varphi_1(n-p)}=\frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}, \qquad \frac{n-p}{n}\leqslant u\leqslant 1.$$

Тобто, будь-який зсув функцій $\varphi(\cdot)$ на довільне дійсне число жодним чином не впливає на поліноми $U^{\varphi,F}_{n,p}(f;x)$, а отже, і на величини $\mathcal{E}\big(C^{\bar\psi}_\infty;U^{\varphi,F}_{n,p}\big)$.

На цій підставі, у випадку, коли функції $g_i(u)=\varphi(u)\psi_i(u)$, $\varphi\in\Upsilon,\ i=1,2$, не спадають та опуклі догори при $u\geqslant a_1>1$, завжди можемо взяти таке число $h^*\in R^1$ і, відповідно, таку функцію $\varphi_1(u)=\varphi(u)-h^*$, що функції $\varphi_1(u)\psi_i(u)$ будуть опуклими догори та не спадати при всіх $u\geqslant 1$ і, крім того, буде виконуватися рівність $\mathcal{E}\big(C^{\bar\psi}_\infty;U^{\varphi_1,F}_{n,p}\big)=\mathcal{E}\big(C^{\bar\psi}_\infty;U^{\varphi,F}_{n,p}\big)$.

Отже, доведення теореми достатньо провести для випадку, коли $a_0=1$. Тоді $\forall u\geqslant 1/n$

$$g_i'(nu)n\geqslant 0,\ \ -\varphi(n-p)\psi_i'(nu)n\geqslant 0,$$

$$g_i''(nu)n^2\leqslant 0,\ \ -\varphi(n-p)\psi_i''(nu)n^2\leqslant 0.$$

Звідси, при $\frac{n-p+1}{n}\leqslant u\leqslant 1$, маємо

$$\upsilon_i(p;u)=\frac{g_i(nu)-\varphi(n-p)\psi_i(nu)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}\geqslant 0,$$

$$\upsilon_i'(p;u) = \frac{g_i'(nu)n - \varphi(n-p)\psi_i'(nu)n}{\varphi(n) - \varphi(n-p)} \geqslant 0,$$

$$\upsilon_i''(p;u) = \frac{g_i''(nu)n^2 - \varphi(n-p)\psi_i''(nu)n^2}{\varphi(n) - \varphi(n-p)} \leqslant 0.$$

Оскільки функції $F(u),\ F'(u),\ F''(u)$ — обмежені, то

$$\left|\big(\upsilon_i(p;u)F(u)\big)''\right| =$$

$$= \left|\upsilon_i''(p;u)F(u) + 2\upsilon_i'(p;u)F'(u) + \upsilon_i(p;u)F''(u)\right| =$$

$$= O(1)\Big(- \upsilon_i''(p;u) + \upsilon_i'(p;u) + \upsilon_i(p;u)\Big).$$

Із (56) випливає

$$m_{n,p}^{(i)} = O(1)\Bigg(- \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} (u-u^2)\upsilon_i''(p;u)\,du +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} (u-u^2)\upsilon_i'(p;u)\,du + \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} (u-u^2)\upsilon_i(p;u)\,du\Bigg).$$

Тепер, враховуючи той факт, що

$$\big(\varphi(n) - \varphi(n-p)\big)^{-1} = O(1)\varphi(n)^{-1},\ \Theta = 1, \tag{57}$$

одержуємо

$$m_{n,p}^{(i)} = O(1)\Bigg(- (u-u^2)\upsilon_i'(p;u)\Big|_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \upsilon_i'(p;u)\,du + \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \upsilon_i(p;u)\,du\Bigg) =$$

$$= O(1)\left(\frac{1}{n}\upsilon_i'(p;\frac{n-p+1}{n}) + \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \upsilon_i'(p;u)\,du + \frac{g_i(n)}{\varphi(n)} \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} du\right) =$$

$$= O(1)\left(\frac{1}{\varphi(n)} + \psi_i(n)\right) = O(1)\psi_i(n), \quad i = 1, 2. \tag{58}$$

Далі, перевіримо виконання умови (10).
Для цього позначимо спочатку

$$\mathcal{I}_{n,p} = \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{\upsilon_2(p;u)|F(u)|}{u}\,du.$$

Тоді можемо записати

$$\int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{1} \frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du = \mathcal{I}_{n,p} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} \frac{|\upsilon_2(p;\frac{n-p+1}{n})F(\frac{n-p+1}{n})n(u-\frac{n-p}{n})|}{u}\,du =$$

$$= \mathcal{I}_{n,p} + O(1)\frac{1}{\varphi(n)}\left(n \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} du + (n-p) \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} \frac{du}{u}\right) =$$

$$= \mathcal{I}_{n,p} + O(1)\frac{1}{\varphi(n)}\left(1 + n \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} du\right) = \mathcal{I}_{n,p} + O(1)\frac{1}{\varphi(n)} = \tag{59}$$

$$= O(1)\Bigg(\int\limits_{n-p+1}^{n} \frac{\psi_2(u)}{u}\,du + \frac{1}{\varphi(n)}\Bigg) < \infty, \quad \psi_2 \in \mathfrak{M}'. \tag{60}$$

Згідно з (11) та (38), маємо

$$\mu_n^{(i)}(u) = \mu_{n,p}(u) =$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{n-p}{n}, \\ 1 - \frac{\varphi(n-p+1)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(\frac{n-p+1}{n}) \cdot & \\ \cdot (nu-n+p), & \frac{n-p}{n} \leqslant u \leqslant \frac{n-p+1}{n}, \\ 1 - \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(u), & \frac{n-p+1}{n} \leqslant u \leqslant 1. \end{cases} \tag{61}$$

Тоді із (14) отримуємо

$$\sigma_n(u) = \sigma_{n,p}(u) = \bar{\psi}(n)|\mu_{n,p}(u)|. \tag{62}$$

Далі, розглядаємо інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu_{n,p}(u)|}{1-u}\,du = \int\limits_0^{\frac{n-p}{n}} \frac{du}{1-u} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} \frac{|1 - \frac{\varphi(n-p+1)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(\frac{n-p+1}{n})(nu-n+p)|}{1-u}\,du +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{|1 - \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)} F(u)|}{1-u}\,du = \ln\frac{n}{p} + I_{n,p,1} + I_{n,p,2}; \tag{63}$$

В результаті отримуємо суму з трьох доданків. Для другого з них одразу можна записати

$$I_{n,1,1} = 1. \tag{64}$$

Якщо ж $p > 1$, то

$$I_{n,p,1} = O(1)\Big(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\Big) \int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{\frac{n-p+1}{n}} \frac{du}{1-u} = O(1)\Big(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\Big)\frac{1}{p-1}. \tag{65}$$

Третій доданок вимагає більш детального розгляду, саме:

$$I_{n,p,2} \leqslant \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1 - \frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}}{1-u}\, du +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{\frac{\varphi(nu)-\varphi(n-p)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)}|F(1) - F(u)|}{1-u}\, du =$$

$$= O(1)\Bigg(\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1 - \frac{\varphi(nu)}{\varphi(n)}}{1-u}\, du + \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} |F'(\gamma)|\, du\Bigg), \quad \gamma \in (u;1).$$

Оскільки, $\varphi(u) = g_i(u)/\psi_i(u),\ i = 1, 2$, то

$$I_{n,p,2} = O(1)\Bigg(\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1 - \frac{g_i(nu)}{g_i(n)}\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\, du + \frac{p}{n} \max_{\frac{n-p+1}{n}<u<1} |F'(u)|\Bigg). \tag{66}$$

$$\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1 - \frac{g_i(nu)}{g_i(n)}\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\, du = \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1 - \frac{g_i(nu)}{g_i(n)}}{1-u}\, du +$$

$$+ \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{\frac{g_i(nu)}{g_i(n)}(1 - \frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)})}{1-u}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{g_i(n)-g_i(nu)}{g_i(n)(1-u)}\,du + \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\,du. \qquad (67)$$

Повторюючи міркування, які були проведені при одержані оцінки (32), отримуємо

$$\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{1-\frac{\psi_i(n)}{\psi_i(nu)}}{1-u}\,du = O(1). \qquad (68)$$

Оскільки функції $g_i(u)$ опуклі догори при $u \geqslant 1$, то при $(n-p+1)/n \leqslant u \leqslant 1$

$$g_i(n)-g_i(nu) \leqslant \frac{n}{p-1}\big(g_i(n)-g_i(n-p+1)\big)(1-u).$$

Отже,

$$\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} \frac{g_i(n)-g_i(nu)}{g_i(n)(1-u)}\,du \leqslant \frac{n(g_i(n)-g_i(n-p+1))}{g_i(n)(p-1)} \int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1} du =$$

$$= \frac{g_i(n)-g_i(n-p+1)}{g_i(n)} < 1. \qquad (69)$$

Нарешті, об'єднуючи (63) – (69), одержуємо

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\mu_{n,p}(u)|}{1-u}\,du = O(1). \qquad (70)$$

Таким чином, співставляючи (58), (60) та (70), бачимо, що умови леми 2 виконуються повністю, і отже, враховуючи (62), отримуємо рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\infty}^{\bar{\psi}}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{1} \frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du + \frac{2}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi_2(u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi n}}\frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du + \bar{\psi}(n)\right), \qquad n\to\infty. \tag{71}$$

Має місце оцінка

$$\int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi n}}\frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du = O(1)\left(\frac{n}{\varphi(n)}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}du\right) =$$

$$= O(1)\frac{1}{\varphi(n)} = O(1)\bar{\psi}(n). \tag{72}$$

Згідно з формулою Тейлора справедливе представлення

$$F(u) = F(0) + \Big(F'(0) + \frac{1}{2}F''(\zeta u)u\Big)u, \qquad \zeta\in(0;1).$$

Тепер, враховуючи (59), отримуємо

$$\int\limits_{\frac{n-p}{n}}^{1}\frac{|\tau_{n,p}^{(2)}(u)|}{u}\,du = |F(0)|\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1}\frac{\upsilon_2(p;u)}{u}\,du +$$

$$+O(1)\left(\int\limits_{\frac{n-p+1}{n}}^{1}\upsilon_2(p;u)\Big|F'(0)+\frac{1}{2}F''(\zeta u)u\Big|\,du + \frac{1}{\varphi(n)}\right) =$$

$$= \frac{|F(0)|}{(\varphi(n)-\varphi(n-p))} \int\limits_{n-p+1}^{n} \frac{(\varphi(u)-\varphi(n-p))\psi_2(u)}{u}\, du +$$

$$+O(1)\bar{\psi}(n). \tag{73}$$

Поєднуючи співвідношення (71) — (73), одержуємо, нарешті, рівність (4). Теорема доведена.

4. Наслідки з теореми.

Наслідок 1. *Нехай* $\psi_i(u) = \frac{u^{-1}+\ln(u+1)}{u}$, $i=1,2$, $\varphi(u)=u$, $F(u)\equiv 1$ *і* $p=n$.

Тоді при $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}; \sigma_n\right) = \frac{\ln^2 n}{\pi n} + O(1)\frac{\ln n}{n}, \quad n\to\infty, \tag{74}$$

де $\sigma_n(f;x) = Z_n^{(1)}(f;x)$ *— суми Фейєра функції* $f(x)$, *а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n.

Доведення. Функції $\psi_i(u)$, $i=1,2$, належать до множини $\mathfrak{M}_0'$, а функції $g_i(u)=u\psi_i(u)$ — задовольняють умови теореми, згідно з якою, рівність (74) має місце.

Зазначимо, що скористатися теоремами 3.1 і 3.2 роботи [6] для сум Фейєра на даному класі функцій не можна, оскільки функції $g_i(u)$, $i=1,2$, не задовольняють умов цих теорем.

Наслідок 2. *Нехай* $\varphi\in\Upsilon$, $F\in\Phi$ *і* $\Theta=1$.

Тоді при $n\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar{\psi}*}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \frac{2|F(0)|}{\pi(\varphi(n)-\varphi(n-p))} \ln\frac{n}{n-p+1} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{du}{u(\varphi(u)-\varphi(n-p))} + \frac{O(1)}{\varphi(n)-\varphi(n-p)},$$

де $C_{\infty}^{\bar{\psi}*}$ — *клас* $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$, *що задається функціями* $\psi_i(u) = (\varphi(u) - \varphi(n-p))^{-1}$, $\psi_i \in \mathfrak{M}_0'$, $i = 1, 2$, *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* n.

Доведення. Нехай $\varphi_1(u) = \varphi(u) - \varphi(n-p) - 1$. Зрозуміло, що $\varphi_1 \in \Upsilon$ і, як зазначалося раніше, функції $\varphi_1(u)$ і $\varphi(u)$ визначають одні й ті самі поліноми $U_{n,p}^{\varphi,F}(f;x)$.

Функції

$$\varphi_1(u)\psi_i(u) =$$

$$= (\varphi(u) - \varphi(n-p) - 1)(\varphi(u) - \varphi(n-p))^{-1} = 1 - \psi_i(u),\ i = 1, 2,$$

не спадають та опуклі догори при $u \geqslant 1$.

Застосовуючи теорему, одержуємо

$$\mathcal{E}\left(C_{\infty}^{\bar{\psi}*}; U_{n,p}^{\varphi,F}\right) = \frac{2|F(0)|}{\pi(\varphi_1(n) - \varphi_1(n-p))} \ln \frac{n}{n-p+1} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{n}^{\infty} \frac{du}{u(\varphi(u) - \varphi(n-p))} + \frac{O(1)}{\varphi_1(n) - \varphi_1(n-p)},\ n \to \infty.$$

Підставивши в останню формулу замість $\varphi_1(u)$ величину $\varphi(u) - \varphi(n-p) - 1$, отримуємо необхідне твердження.

Можна навести приклади, коли обидва перші доданки рівності (4) є істотними.

Позначимо через $\widetilde{16V_n}$ лінійний метод наближення, що задається підсумовуючою функцією

$$\lambda_n(u) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln^2(nu+1)}{\ln^2(n+1)}, & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 0, & u \geqslant 1 \end{cases} \tag{75}$$

$(\varphi(u) = \ln^2(u+1),\ F(u) \equiv 1,\ p = n)$ і нехай клас $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ визначається наступними функціями $\psi_i(u) = \frac{u}{(u+1)\ln^2(u+1)}$, $i = 1, 2$, $u \geqslant 1$.

Бачимо, що функції $\varphi(u)\psi_i(u)$ опуклі догори та не спадають при $u \geqslant 1$.

Інтегруючи, отримуємо

$$\frac{1}{\varphi(n)-\varphi(0)}\int\limits_1^n \frac{(\varphi(u)-\varphi(0))\psi_2(u)}{u}\,du = \frac{1}{\ln^2(n+1)}\int\limits_1^n \frac{du}{u+1} =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{\ln 2}{\ln^2(n+1)},$$

$$\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(u)}{u}\,du = \int\limits_n^\infty \frac{du}{(u+1)\ln^2(u+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Підставляючи значення цих інтегралів до виразу (4), отримуємо таку асимптотичну рівність:

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\bar\psi}; \widetilde{16}_{V n}\right) = \frac{4}{\pi\ln(n+1)} + O(1)\ln^{-2}(n+1), \qquad n\to\infty. \quad (76)$$

1. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar\psi$-интегралов // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 8. — С. 1069–1113.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці ІМ НАН України. — 2002. — Т. 40. — Ч. І. — 427 с.
3. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. // Киев: Наук. Думка, 1987. — 268 с.
4. *Новиков О.А., Рукасов В.И.* Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения: Сб. научн. тр. – Ин-т математики, 1992. — С. 57–63.
5. *Новиков О.А., Рукасов В.И.* Приближение непрерывных периодических функций обобщенными суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1069–1080.

6. *Рукасов В.І.* Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій: Дис... д-ра фіз.-мат. наук. — Слов'янськ, 2003. — 349 с.

7. *Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 12. — С. 1641–1653.

8. *Рукасов В.И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье — Киев, 1983. — 55 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.62).

9. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О.* Приближение классов периодических функций с малой гладкостью суммами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України, 2002. — Т. 35. — С. 119–133.

10. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\bar{\psi}}_{\infty}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184–193.

11. *Рукасов В.И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 4. — С. 478–483.

12. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — Т. 62. — С. 61–97.