Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 200-211

УДК 517.518.8

Д. Ю. Мітін, М. О. Назаренко
(Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОТОЧКОВА ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

Встановлено достатні умови для того, щоб послідовність функцій, які є результатом дії ітерацій оператора фрактального перетворення на деяку функцію, збігалась поточково. Наведено приклад, коли фрактальний оператор не є (евентуально) стискуючим на просторі обмежених чи інтегровних у деякому степені функцій, проте згадана послідовність функцій збігається в деяких точках відрізка. Отримано поточкові оцінки для похибки фрактального наближення, що є аналогами теореми про колаж.

1. Вступ. В роботі [1] було встановлено достатні умови для того, щоб оператор фрактального перетворення був стискуючим або принаймні евентуально стискуючим на певній замкненій множині у просторі обмежених (неперервних) чи інтегровних в деякому степені функцій на відрізку. Виконання цих умов гарантувало збіжність послідовності функцій, які є результатом дії ітерацій оператора фрактального перетворення на деяку функцію, до його єдиної нерухомої точки у метриці відповідного простору функцій. Зауважимо, що графік функції, яка є цією нерухомою точкою, може (як множина на площині) мати дробову розмірність за Хаусдорфом–Безиковичем; це, як правило, і є мотивацією використання термінів "фрактальне перетворення", "фрактальна апроксимація" тощо [2].

Умова збереження неперервності функції фрактальним оператором є досить обмежувальною у розглядуваній задачі фрактальної апроксимації на відміну від задачі фрактальної інтерполяції. Тому для наших цілей деякі результати статті [1], що стосуються простору неперервних функцій, переформульовані в даній статті для простору обмежених функцій (їхні доведення залишаються в силі). Інший підхід обрано в статті [3], де запропоновано модифіковані фрактальні оператори, що зберігають неперервність чи гладкість певного порядку.

Фрактальну апроксимацію розглядають не тільки в просторах з рівномірною чи інтегральною метрикою, можливі постановки задач щодо фрактальної апроксимації в просторах з хаусдорфовою метрикою [4], метрикою Скорохода, інтегральною хаусдорфовою відстанню, метрикою Канторовича–Васерштейна тощо.

Неабиякий інтерес становить поведінка послідовності ітерацій фрактального оператора не тільки в тому чи іншому метричному просторі, але й в сенсі поточкової збіжності або збіжності майже скрізь. Якщо така збіжність має місце, фрактальний оператор може не бути стискуючим чи навіть евентуально стискуючим, і стандартні метричні теореми про нерухомі точки типу принципу стискуючих відображень не можуть бути застосовані. Так, в статтях [5–8] використовуються для дослідження орбіт відображень елементи теорії графів, в роботі [9] — елементи ергодичної теорії, а в роботі [10] запропоновано мартингальний підхід.

В даній статті встановлено достатню умову для того, щоб послідовність функцій, які є результатом дії ітерацій оператора фрактального перетворення на деяку функцію, збігалась поточково на відрізку. Результати проілюстровано прикладами, в яких порівнюються умови поточкової збіжності та збіжності у відповідному метричному просторі.

Одержано поточкові оцінки для похибки фрактального наближення, що є аналогами відомої теореми Барнслі про колаж

[2, 11].

Зауважимо, що результати цієї роботи можуть бути використані в задачах фрактального стиску графічних даних. Дійсно, так зване зображення в градаціях сірого кольору (greyscale image) можна розглядати як функцію f, задану на квадраті. Її значеннями в точках квадрата є значення інтенсивності сірого кольору в цих точках. Ідея фрактального стиску полягає в тому [11], щоб зберігати в пам'яті комп'ютера чи передавати по каналах зв'язку не поточкову інформацію про функцію f, а інформацію про параметри фрактального перетворення, нерухома точка якого є досить близькою до f. Алгоритми фрактального стиску належать до так званого класу алгоритмів стиску із втратами даних (lossy compression algorithms). Твердження 6 цієї роботи можна інтерпретувати як умову збіжності відповідного алгоритму, а твердження 7 — як умову того, наскільки близькою (в поточковому сенсі) до f треба вибирати нерухому точку фрактального перетворення (див. також [1], п. 4.1, 4.2).

2. Означення та деякі результати щодо збіжності послідовності фрактальних наближень у рівномірній та інтегральній метриках. Введемо деякі позначення. Нехай відрізок $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Зафіксуємо:

1) набір точок $\{x_i\}_{i=0}^n$ таких, що $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, тобто тих, що утворюють розбиття відрізка I. Позначимо $I_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Очевидно, що $I_i \subset I$, $i = 1, \ldots, n$; $\bigcup_{i=1}^n I_n = I$; $I_{i_1} \cap I_{i_2} = \varnothing$, $1 \le i_1 \ne i_2 \le n$.

2) набори точок $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ таких, що $a \le \alpha_i < \beta_i \le b$. Позначимо $I'_i = [\alpha_i, \beta_i)$ або $(\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \ldots, n-1$; $I'_n = [\alpha_n, \beta_n]$.

3) набір $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ бієкцій $\varphi_i : I'_i \to I_i$, $i = 1, \ldots, n$ (як правило, вони будуть гомеоморфізмами або дифеоморфізмами).

4) набір $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ відображень $\psi_i : I'_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ (як правило, вони будуть обмеженими, неперервними чи гладкими або будуть задовольняти умову Ліпшица).

Будемо користуватись стандартними позначеннями для простору $B(I)$ обмежених на відрізку I функцій та простору $L_p(I)$ інтегровних у p-му степені на відрізку I функцій (розглядуваних з точністю до еквівалентності) з відповідними метриками: $\rho(f,g) = \sup_I |f-g|$ та $\left(\int_I |f-g|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$. Надалі X позначатиме один з просторів: $B(I)$ або $L_p(I)$.

Означення 1. *Оператором фрактального перетворення називається відображення* $T : X \to X$

$$\big(T(f)\big)(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\big(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))\big)\, \mathbb{1}_{I_i}(x), \quad f \in X,\ x \in I.$$

Тут через $\mathbb{1}_A(x)$ позначено індикаторну функцію множини A і використано домовленість, що добуток невизначеного виразу на нульове значення індикаторної функції дорівнює нулю.

Отже, оператор T (взагалі кажучи, нелінійний) задається розбиттям відрізка на проміжки I_i, виділенням підпроміжків I_i' відрізка I, заданням перетворень площини $\Phi_i(x,y) = (\varphi_i(x), \psi_i(x,y))$ і переводить довільну функцію $f \in X$ у кусково-задану функцію, що є на кожному з проміжків задання деформованою копією звуження f на деякий проміжок.

Розглянемо множину $\mathfrak{F} \subset X$, інваріантну відносно фрактального оператора T, тобто таку, що $T(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$.

Означення 2. *Оператор T називається евентуально стискуючим порядку $k \in \mathbb{N}$ на множині $\mathfrak{F} \subset X$, якщо його k-та ітерація є стискуючим оператором на $\mathfrak{F}$.*

Зауважимо, що звідси випливає, що для T знайдеться його ітерація, можливо, зі ще більшим номером, починаючи з якої, всі наступні ітерації є стискуючими операторами на $\mathfrak{F}$. Евентуально стискуючий оператор деякого натурального степеня просто називається евентуально стискуючим.

Наведемо в цьому пункті кілька тверджень, що є переформулюваннями відповідних результатів з [1], бо саме в такій формі вони нам знадобляться в п. 4.

Твердження 1. *Нехай задано точки $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, бієкції $\{\varphi_i\}$ є гомеоморфізмами, відображення $\{\psi_i\}$ задовольняють умови:*

$$\forall C > 0: \quad \sup\{|\psi_i(x,y)|: \ |y| \le C, \ x \in I_i'\} < +\infty,$$
$$|\psi_i(x,y_1) - \psi_i(x,y_2)| \le d_i|y_1 - y_2|, \quad x \in I_i', \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ d_i > 0.$$

Тоді оператор $T : B(I) \to B(I)$ є неперервним відносно метрики $\rho(f,g) = \sup_I|f-g|$ в просторі $B(I)$.

Твердження 2. *Нехай задано точки $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, бієкції $\{\varphi_i\}$ є дифеоморфізмами, відображення $\{\psi_i\}$ задовольняють умови:*

$$\psi_i \in C(I_i' \times \mathbb{R}),$$
$$|\psi_i(x,y_1) - \psi_i(x,y_2)| \le d_i|y_1 - y_2|, \quad x \in I_i', \ y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ d_i > 0.$$

Тоді оператор $T : L_p(I) \to L_p(I)$ є неперервним відносно метрики $\rho(f,g) = \left(\int_I |f-g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ в просторі $L_p(I)$, $1 \le p < +\infty$.

Позначимо:

$$u_{i_1\ldots i_k}(\mathfrak{F}, B(I)) = \sup_{\substack{f,g\in\mathfrak{F}\\ f\neq g}} \frac{\sup\limits_{\varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1}\cap\varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2}\cap\ldots\varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k})\ldots))} |f-g|}{\sup\limits_I|f-g|} \le 1,$$

$$u_{i_1\ldots i_k}(\mathfrak{F}, L_p(I)) = \sup_{\substack{f,g\in\mathfrak{F}\\ f\neq g}} \frac{\int\limits_{\varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1}\cap\varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2}\cap\ldots\varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k})\ldots))} |f-g|^p \,|(\varphi_{i_1}\circ\ldots\circ\varphi_{i_k})'|\,\mathrm{d}x}{\int\limits_I |f-g|^p \,\mathrm{d}x},$$

$$1 \le i_1, \ldots, i_k \le n,$$

$$L_k(T, \mathfrak{F}, B(I)) = \max_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n} d_{i_1}\ldots d_{i_k} u_{i_1\ldots i_k}(\mathfrak{F}, B(I)),$$

$$L_k(T, \mathfrak{F}, L_p(I)) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} d_{i_1}^p \ldots d_{i_k}^p u_{i_1\ldots i_k}(\mathfrak{F}, L_p(I)), \quad k \ge 1.$$

Твердження 3. *Нехай* $\inf_{k\geq 1} L_k(T, \mathfrak{F}, X) < 1$. *Тоді оператор* T *— евентуально стискуючий на* $\mathfrak{F}$.

Твердження 4. *Нехай множина* $\mathfrak{F}$ *задовольняє умову:*

$$f \in \mathfrak{F} \Longrightarrow f(\varphi_i^{-1}(\cdot))\mathbb{1}_{I_i}(\cdot) \in \mathfrak{F}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує границя $L(T, \mathfrak{F}, X) := \lim_{k\to\infty}\bigl(L_k(T, \mathfrak{F}, X)\bigr)^{1/k} < +\infty$.

Якщо $L(T, \mathfrak{F}, X) < 1$, *то оператор* T *— евентуально стискуючий на* $\mathfrak{F}$.

***Наслідок* 5.** Нехай множина $\mathfrak{F} \subset X$ — замкнена. Тоді за умови, що оператор T евентуально стискуючий, у нього існує єдина нерухома точка $f_T^* \in \mathfrak{F}$, причому для довільної $f \in \mathfrak{F}$ маємо $T^{\circ k}(f) \to f_T^*$, $k \to \infty$, де збіжність експоненційно швидка (явні оцінки швидкості наведено в [1], п. 4.1).

3. Умови поточкової збіжності послідовності фрактальних наближень. Перепишемо оператор фрактального перетворення у більш зручному для подальшого вигляді:

$$\bigl(T(f)\bigr)(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\bigl(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x))\bigr)\mathbb{1}_{I_i}(x) =$$
$$= \psi_{i^1(x)}\bigl(\varphi_{i^1(x)}^{-1}(x), f(\varphi_{i^1(x)}^{-1}(x))\bigr), \quad i^1 = i^1(x): \ x \in I_{i^1}.$$

Для довільної точки $x \in I$ позначимо:

$$\begin{array}{lll}
i^1 = i^1(x): & x \in I_{i^1}, & x^1 = x^1(x) = \varphi_{i^1}^{-1}(x),\\
i^2 = i^2(x): & x^1(x) \in I_{i^2}, & x^2 = x^2(x) = \varphi_{i^2}^{-1}(x^1(x)),\\
i^3 = i^3(x): & x^2(x) \in I_{i^3}, & x^3 = x^3(x) = \varphi_{i^3}^{-1}(x^2(x)),\\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill} & \dotfill
\end{array}$$

Тепер ітерації фрактального оператора можна переписати в такий спосіб:

$$\bigl(T^{\circ k}(f)\bigr)(x) =$$
$$= \psi_{i^1(x)}(x^1(x), \psi_{i^2(x)}(x^2(x), \ldots \psi_{i^k(x)}(x^k(x), f(x^k(x)) \ldots)). \quad (1)$$

Твердження 6. *Нехай (у позначеннях п. 2) задано точки* $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, *бієкції* $\{\varphi_i\}$ *є гомеоморфізмами, відображення* $\{\psi_i\}$ *задовольняють умови:*

$$\psi_i \in C(I_i' \times \mathbb{R}),$$
$$|\psi_i(x, y_1) - \psi_i(x, y_2)| \le d_i |y_1 - y_2|, \quad x \in I_i',\ y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ d_i > 0,$$

причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^k(x)} < +\infty, \quad x \in I. \tag{2}$$

Тоді для довільних $f \in B(I)$ *та* $x \in I$ *маємо* $\big(T^{\circ k}(f)\big)(x) \to \to f_T^*(x)$, $k \to \infty$, *де* f_T^* *— єдина нерухома точка оператора* T.

Доведення. Перша умова на $\{\psi_i\}$ гарантує, що $T(f) \in \in B(I)$ для $f \in B(I)$.

З (1) та другої умови на $\{\psi_i\}$ випливає, що

$$|T^{\circ k}(f) - T^{\circ k}(g)|(x) \le d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^k(x)} |f - g|(x^k(x)). \tag{3}$$

Доведемо, що числова послідовність $\big(T^{\circ k}(f)\big)(x)$, $k \ge 1$, збігається. Маємо:

$$|T^{\circ(k+m)}(f) - T^{\circ k}(f)|(x) \le \sum_{j=k}^{k+m-1} |T^{\circ(j+1)}(f) - T^{\circ j}(f)|(x).$$

З урахуванням (3) звідси випливає:

$$|T^{\circ(k+m)}(f) - T^{\circ k}(f)|(x) \le$$
$$\le \sum_{j=k}^{k+m-1} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^j(x)} |T(f) - f|(x^j(x)) \le \tag{4}$$
$$\le \sup_I |T(f) - f| \cdot \sum_{j=k}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^j(x)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

і для доведення збіжності залишилось скористатися критерієм Коші в $\mathbb{R}$.

З (3) випливає:

$$|T^{\circ k}(f) - T^{\circ k}(g)|(x) \le \sup_I |f-g| \cdot d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^k(x)} \to 0,\ k \to \infty,$$

що доводить незалежність границі від вибору f.

Позначимо поточкову границю через $f_T^*(x)$. Доведемо, що f_T^* — нерухома точка T. Для цього досить, враховуючи першу умову на $\{\psi_i\}$, перейти до поточкової границі при $k \to \infty$ у рівності:

$$f_{k+1}(x) = \psi_{i^1(x)}\big(\varphi^{-1}_{i^1(x)}(x), f_k(\varphi^{-1}_{i^1(x)}(x))\big),$$

де $f_k = T^{\circ k}(f)$.

Залишилось зазначити, що нерухома точка єдина. Дійсно, якби існувала інша нерухома точка g^*, то $\big(T^{\circ k}(g^*)\big)(x) = g^*(x) \to g^*(x)$, $k \to \infty$, що суперечило б незалежності границі від вибору f.

Зауваження. Існування та єдиність нерухомої точки зараз не випливають з теореми Банаха, оскільки у припущеннях твердження 6 оператор T може не бути (евентуально) стискуючим в просторі $B(I)$.

4. Приклади. Розглянемо два приклади, в яких ситуації зі співвідношенням умов тверджень 4 та 6 в певному сенсі протилежні.

***Приклад* 1.** Нехай $I = [0,1], n = 2, I_1 = [0,1/2), I_2 = [1/2,1]$, $I_1' = [1/2,1)$, $I_2' = [0,1/2]$, $\varphi_1(x) = x - 1/2$, $\varphi_2(x) = x + 1/2$.

Тоді для $x \in I_1$: $i^1 = 1$, $i^2 = 2$, $i^3 = 1$, $i^4 = 2$, $\dots$, а для $x \in I_2$: $i^1 = 2$, $i^2 = 1$, $i^3 = 2$, $i^4 = 1, \dots$ Отже, ряд (2) для $x \in I_1$ має вигляд:

$$d_1 + d_1 d_2 + d_1^2 d_2 + d_1^2 d_2^2 + d_1^3 d_2^2 + d_1^3 d_2^3 + \dots,$$

а для $x \in I_2$:

$$d_2 + d_1 d_2 + d_1 d_2^2 + d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_2^3 + d_1^3 d_2^3 + \ldots .$$

Ряд збігається на всьому відрізку $[0,1]$ при $d_1 d_2 < 1$.

Єдині ненульові значення $u_{i_1 \ldots i_k}$ такі: $u_{1212\ldots 12(1)} = u_1$, $u_{2121\ldots 21(2)} = u_2$. Тому

$$\begin{gathered}(L_k(B[0,1]))^{1/k} = \\ = \sqrt[k]{\max\{u_1 d_1 d_2 d_1 d_2 \ldots d_1 d_2 (d_1), u_2 d_2 d_1 d_2 d_1 \ldots d_2 d_1 (d_2)\}}, \\ (L_k(B[0,1]))^{1/k} = \sqrt[k]{\max\bigl\{u_1 d_1^{k/2} d_2^{k/2}, u_2 d_1^{k/2} d_2^{k/2}\bigr\}},\ k \text{ — парне}, \\ (L_k(B[0,1]))^{1/k} = \sqrt[k]{\max\bigl\{u_1 d_1^{(k+1)/2} d_2^{(k-1)/2}, u_2 d_1^{(k-1)/2} d_2^{(k+1)/2}\bigr\}}, \\ k \text{ — непарне},\end{gathered}$$

звідки $L(B[0,1]) = \sqrt{d_1 d_2} < 1$.

Аналогічно

$$\begin{gathered}(L_k(L_p[0,1]))^{1/k} = \\ = \sqrt[k]{u_1 d_1^p d_2^p d_1^p d_2^p \ldots d_1^p d_2^p (d_1^p) + u_2 d_2^p d_1^p d_2^p d_1^p \ldots d_2^p d_1^p (d_2^p)}, \\ (L_k(L_p[0,1]))^{1/k} = \sqrt[k]{u_1 d_1^{kp/2} d_2^{kp/2} + u_2 d_1^{kp/2} d_2^{kp/2}},\ k \text{ — парне}, \\ (L_k(L_p[0,1]))^{1/k} = \sqrt[k]{u_1 d_1^{(k+1)p/2} d_2^{(k-1)p/2} + u_2 d_1^{(k-1)p/2} d_2^{(k+1)p/2}}, \\ k \text{ — непарне},\end{gathered}$$

звідки $L(L_p[0,1]) = \sqrt{d_1 d_2} < 1$.

Таким чином, в даному прикладі умови на d_1, d_2 тверджень 4 та 6 фактично однакові.

***Приклад* 2.** Нехай $I = [0,1]$, $n = 2$, $I_1 = [0,1/2)$, $I_2 = [1/2,1]$, $I'_1 = [0,1)$, $I'_2 = [0,1]$, $\varphi_1(x) = x/2$, $\varphi_2(x) = (x+1)/2$.

Тоді для двійкового запису $x = \overline{0{,}x_1 x_2 x_3 \ldots}_{(2)}$:

$$i^k = \begin{cases} 1, & x_k = 0, \\ 2, & x_k = 1. \end{cases}$$

Отже, ряд (2)

$$d_{i^1} + d_{i^1} d_{i^2} + d_{i^1} d_{i^2} d_{i^3} + \dots$$

збігається на всьому відрізку $[0,1]$ при $\max\{d_1, d_2\} < 1$, а майже скрізь на $[0,1]$ збігається при $d_1 d_2 < 1$.

Маємо: $u_{1i_2\dots i_k}(B[0,1]) = u_1(B[0,1]) = 1$, $u_{2i_2\dots i_k}(B[0,1]) = = u_2(B[0,1]) = 1$. Тому

$$(L_k(B[0,1]))^{1/k} = \\ = \sqrt[k]{\max_{i_2,\dots,i_k=1,2} \max\{u_1 d_1 d_{i_2} \dots d_{i_k}, u_2 d_2 d_{i_2} \dots d_{i_k}\}} = \max\{d_1, d_2\},$$

звідки $L(B[0,1]) = \max\{d_1, d_2\} < 1$.

Аналогічно маємо: $u_{1i_2\dots i_k}(L_p[0,1]) = \frac{1}{2^{k-1}}\, u_1(L_p[0,1]) = \frac{1}{2^k}$, $u_{2i_2\dots i_k}(L_p[0,1]) = \frac{1}{2^{k-1}}\, u_2(L_p[0,1]) = \frac{1}{2^k}$. Тому:

$$(L_k(L_p[0,1]))^{1/k} = \\ = \sqrt[k]{\sum_{i_2,\dots,i_k=1,2} (\tfrac{1}{2^{k-1}}\, u_1 d_1^p d_{i_2}^p \dots d_{i_k}^p + \tfrac{1}{2^{k-1}}\, u_2 d_2^p d_{i_2}^p \dots d_{i_k}^p)} = \frac{d_1^p + d_2^p}{2},$$

звідки $L(L_p[0,1]) = \dfrac{d_1^p + d_2^p}{2} < 1$.

Таким чином, бачимо, що якщо взяти $d_1 d_2 < 1$, але $\max\{d_1, d_2\} > 1$ (чи $(d_1^p + d_2^p)/2 > 1$), то все одно майже скрізь на відрізку $[0,1]$ $\big(T^{\circ k}(f)\big)(x)$ буде збігатися, проте оператор T може не бути евентуально стискуючим у $B[0,1]$ (чи $L_p[0,1]$ відповідно). Зокрема, при $d_1 d_2 < 1$, $(d_1 + d_2)/2 > 1$; $\psi_1(x,y) = d_1 y$, $x \in [0,1)$, $y \in \mathbb{R}$; $\psi_2(x,y) = d_2 y$, $x \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}$, буде мати місце збіжність майже скрізь, проте, як неважко перевірити, оператор T не буде евентуально стискуючим у жодному з просторів: $B[0,1]$; $L_p[0,1]$, $1 \le p < +\infty$.

5. Поточкові оцінки похибки фрактального наближення. Перейдемо від умов збіжності до оцінок похибки наближення.

Твердження 7. *Нехай (у позначеннях п. 2) задано точки* $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, *бієкції* $\{\varphi_i\}$ *є гомеоморфізмами, відображення* $\{\psi_i\}$ *задовольняють умови:*

$$\psi_i \in C(I'_i \times \mathbb{R}),$$
$$|\psi_i(x, y_1) - \psi_i(x, y_2)| \le d_i |y_1 - y_2|, \quad x \in I'_i,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ d_i > 0,$$

причому $\sum_{k=1}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^k(x)} < +\infty$, $x \in I$. *Позначимо через* f_T^* *нерухому точку оператора* T *(яка існує та єдина за твердженням* 6*). Тоді має місце нерівність:*

$$|T^{\circ k}(f) - f_T^*|(x) \le \sum_{j=k}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^j(x)} |T(f) - f|(x^j(x)) \le$$
$$\le \sup_I |T(f) - f| \cdot \sum_{j=k}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^j(x)}, \quad (5)$$

зокрема

$$|f - f_T^*|(x) \le |T(f) - f|(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_{i^1(x)} \dots d_{i^k(x)} |T(f) - f|(x^k(x)) \le$$
$$\le \sup_I |T(f) - f| \cdot \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{i^1(x)} d_{i^2(x)} \dots d_{i^k(x)}\Big). \quad (6)$$

Доведення. Переходячи до границі при $m \to \infty$ в нерівності (4), отримуємо оцінку (5). Нерівність (6) випливає з (5) при $k = 0$.

Зауваження. Твердження 7 є аналогом відомої теореми Барнслі про колаж [2, 11].

1. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 161–175.
2. *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. — 2nd ed. — Boston: Academic Press, 1993. — 533 p.
3. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Інваріантність підпросторів неперервних та гладких функцій відносно фрактальних перетворень // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія «Математика та механіка». — 2007. — Вип. 18 (прийнято до друку).
4. *Mitin D. Yu., Nazarenko M. O.* Fractal approximation of functions in some metric spaces and its application to image coding problem // Modern stochastics: Theory and applications.: Conference materials (Kyiv, 19–23 June 2006.). — Kyiv, 2006. — P. 191–192.
5. *Kominek J.* Convergence of fractal encoded images // IEEE Data Compression Conference (DCC).: Proc. of conf. (Snowbird, Utah, USA, 28–30 March 1995.). — Snowbird, 1995. — P. 242–251.
6. *Skarbek W.* On convergence of affine fractal operators // Image Processing and Communications. — 1995. — V. 1, №. 1. — P. 33–41.
7. *Skarbek W.* Fractal operator convergence by analysis of influence graph // Lecture notes in computer science. — 1998. — 1424. — P. 316–321.
8. *Skarbek W.* On convergence of discrete and selective fractal operators // Lecture notes in computer science. — 1999. — 1689. — P. 201–208.
9. *Bielefeld B., Fisher Y.* A convergence model // Fractal image compression: Theory and application / Ed. by Y. Fisher. — New York: Springer, 1995. — P. 215–228.
10. *Dekking F. M.* Fractal image coding: some mathematical remarks on its limits and its prospects // Fractal image encoding and analysis / Ed. by Y. Fisher. — New York: Springer, 1998. — P. 117–132.
11. *Barnsley M. F., Hurd L. P.* Fractal image compression. — Wellesley: AK Peters, 1993. — 244 p.