

УДК 517.5

Т. В. Манжос (Київ. нац. екон. ун-т ім. Вадима Гетьмана)

**ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ПОЛІНОМА НАЙКРАЩОГО
НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ
ЗМІННИХ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ПОХІДНІ**

Вивчається найкраще наближення дійсної функції багатьох змінних узагальненими поліномами з обмеженнями на частинні похідні. Доведено теорему про характеристику полінома найкращого наближення.

1. Вступ. Теорія наближення з обмеженнями була започаткована ще відомими роботами П.Л.Чебишова про наближення монотонними на відрізьку многочленами. Випадкам апроксимації з інтерполяційними обмеженнями, обмеженнями на норму, на коефіцієнти поліномів, одностороннього наближення присвячена значна кількість робіт вітчизняних та зарубіжних математиків.

До числа задач із цього класу також належать задачі про наближення з обмеженнями на похідні апроксимант. Вперше в цій категорії було розглянуто випадок монотонного наближення. У роботах Дж. Калбертсона [1], О. Шиші [2] розв'язано задачі про порядок апроксимації, про характеристику і єдиність елемента найкращого наближення для цього випадку.

Теорія монотонних наближень була узагальнена незалежно Б. Чалмерсом [3] і Дж. Рольером та Г. Тейлором [4] до теорії наближення поліномами, значення похідних яких лежать в обмеженому діапазоні. Зокрема, доведено теореми про існування, характеристику і єдиність елемента найкращого наближення неперервної функції з такими обмеженнями.

© Т. В. Манжос, 2007

У даній статті розв'язано задачі існування та характеризування елемента найкращого наближення для випадку наближення неперервної функції багатьох змінних узагальненими поліномами, частинні похідні яких по всіх або по деяких змінних належать певним "коридорам".

2. Основні означення, допоміжні твердження. Розглянемо банахів простір $C(Q)$ неперервних функцій m змінних

$$f = f(t_1, \dots, t_m) : Q \rightarrow R$$

з нормою

$$\|f\| := \max_{t=(t_1, \dots, t_m) \in Q} |f(t)|,$$

де Q — компактна підмножина R^m , що містить не менше, ніж n точок. Нехай $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ — система лінійно незалежних функцій в $C^1(Q) \subset C(Q)$, тобто таких, що мають неперервні частинні похідні на деякій відкритій множині $D \supset Q$, $D \subset R^m$; $\{l_i\}_{i \in U}$ та $\{u_i\}_{i \in U}$ — набори функцій m змінних із $C(Q)$, для яких виконуються нерівності $l_i(t) < u_i(t)$, $t \in Q$, $i \in U$, де $U \subset \{1, \dots, m\}$, $U \neq \emptyset$.

Розглянемо n -вимірний підпростір в $C^1(Q)$

$$P = \left\{ p = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \mid c_k \in R, k = \overline{1, n} \right\},$$

елементи якого будемо називати узагальненими поліномами. Означимо множину

$$K := \left\{ p \in P \mid l_i(t) \leq \frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \leq u_i(t) \forall t = (t_1, \dots, t_m) \in Q, i \in U \right\},$$

де $\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t$, $i \in U$, — це значення частинних похідних полінома p у точці $t = (t_1, \dots, t_m)$. Далі будемо припускати, що існує поліном

$q_1 \in K$, для якого виконується

$$l_i(t) < \left. \frac{\partial q_1}{\partial t_i} \right|_t < u_i(t) \text{ для всіх } t \in Q, i \in U.$$

Величину

$$E(f, K) := \inf_{p \in K} \sup_{t \in Q} |f(t) - p(t)|$$

будемо називати величиною найкращого наближення функції $f \in C(Q)$ елементами із K .

Означення 2.1. Поліном $q \in K$, що задовольняє рівність

$$\sup_{t \in Q} |f(t) - q(t)| = E(f, K),$$

називається поліномом найкращого наближення для $f \in C(Q)$ множиною K .

Теорема 2.1 Для кожної функції $f \in C(Q)$ існує елемент найкращого наближення множиною K .

Доведення теореми базується на замкненості K .

3. Характеризація полінома найкращого наближення.

Введемо такі позначення. Зафіксуємо $f \in C(Q)$, $p \in K$. Покладемо

$$\begin{aligned} M(f) &= \{t \in Q \mid |f(t)| = \|f\|\}, \\ E_+^i(p) &= \left\{ t \in Q \mid \left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_t = l_i(t) \right\}, \quad i \in U, \\ E_-^i(p) &= \left\{ t \in Q \mid \left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_t = u_i(t) \right\}, \quad i \in U. \end{aligned}$$

Зазначимо, що множина $\bigcup_{i \in U} (E_+^i(p) \cup E_-^i(p))$ є компактною.

Справді, візьмемо довільну точку $t^* \in Q \setminus (\bigcup_{i \in U} (E_+^i(p) \cup E_-^i(p)))$.

Тоді не виконується жодна з рівностей

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_{t^*} = l_i(t^*), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_{t^*} = u_i(t^*), \quad i \in U.$$

Оскільки функції $\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t, i \in U, \{l_i\}_{i \in U}$ та $\{u_i\}_{i \in U}$ — неперервні, то існує набір околів $\{W_i, i \in U\}$ точки t^* таких, що для усіх $s \in W_i$

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_s \neq l_i(s), \quad \frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_s \neq u_i(s), \quad i \in U.$$

Нехай $W := \bigcap_{i \in U} W_i$. Тоді,

$$W \subset Q \setminus \bigcup_{i \in U} (E_+^i(p) \cup E_-^i(p)).$$

Отже, множина $Q \setminus \bigcup_{i \in U} (E_+^i(p) \cup E_-^i(p))$ відкрита, а $\bigcup_{i \in U} (E_+^i(p) \cup E_-^i(p))$ — замкнена, а, тому, і компактна.

Істотну роль для знаходження характеристик полінома найкращого наближення з наведеними обмеженнями відіграє класичний критерій Колмогорова.

Теорема 3.1 [5]. *Нехай Q_0 — компактний гаусдорфів простір, W — непорожня опукла підмножина $C(Q_0)$, $f \in C(Q_0)$. Для того, щоб елемент $p^* \in W$ задовольняв співвідношення $\|f - p^*\| = \inf_{p \in W} \|f - p\|$, необхідно й достатньо, щоб для кожного елемента $p \in W$ виконувалась нерівність*

$$\min_{t \in M(f-p^*)} (p(t) - p^*(t))\sigma_1(t) \leq 0,$$

де $\sigma_1(t) := f(t) - p^*(t), t \in M(f - p^*)$.

Нехай $B \subset Q, B \neq \emptyset$. Введемо наступне позначення

$$K_B := \left\{ p \in P \mid l_i(t) \leq \frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \leq u_i(t) \quad \forall t = (t_1, \dots, t_m) \in B, \quad i \in U \right\}.$$

Означення 3.1. *Впорядкована пара множин $(A, B), A \subset C(Q), B \subset Q$ і $A \neq \emptyset$, називається допустимою парою для*

функції $f \in C(Q)$ відносно K , якщо

$$\inf_{p \in K_B} \sup_{t \in A} |f(t) - p(t)| = E(f, K).$$

Теорема 3.2. Припустимо, що $q^* \in K$ є поліномом найкращого наближення функції $f \in C(Q)$ елементами з K . Тоді пара множин

$$(M(f - q^*), \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)))$$

є допустимою парою для f відносно K .

Доведення.

(а) Покажемо, в першу чергу, що пара $(M(f - q^*), Q)$ є допустимою парою для f відносно K . Для цього розглянемо довільний поліном $p \in K$. За критерієм Колмогорова знайдеться точка $t_0 \in M(f - q^*)$, для якої має місце співвідношення

$$(p(t_0) - q^*(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) \leq 0.$$

Використовуючи цю нерівність, одержимо такі оцінки:

$$\begin{aligned} E^2(f, K) &= \|f - q^*\|^2 = |f(t_0) - q^*(t_0)|^2 = \\ &= (f(t_0) - p(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) + (p(t_0) - q^*(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) \leq \\ &\leq |f(t_0) - p(t_0)| |f(t_0) - q^*(t_0)| \leq \max_{t \in M(f - q^*)} |f(t) - p(t)| E(f, K). \end{aligned}$$

І звідси випливає оцінка

$$E(f, K) \leq \inf_{p \in K} \max_{t \in M(f - q^*)} |f(t) - p(t)| = E_{M(f - q^*)}(f, K).$$

З другого боку, маємо

$$E_{M(f - q^*)}(f, K) \leq E(f, K).$$

Тому

$$E(f, K) = E_{M(f-q^*)}(f, K). \quad (1)$$

(б) Для доведення теореми застосуємо метод “від супротивного”. Припустимо, що існує поліном $p_1 \in K \cup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$, для якого

$$\max_{t \in M(f-q^*)} |f(t) - p_1(t)| < E(f, K). \quad (2)$$

Не обмежуючи загальності можна вважати, що

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)),$$

$$t \in \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)), \quad i \in U$$

(у випадку необхідності p_1 можна замінити на поліном вигляду $(1 - \mu)p_1 + \mu q_1$, де $q_1 \in K$ такий, що $\left. \frac{\partial q_1}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t))$, $i \in U$, $t \in Q$, а μ — досить мале додатне число).

Задамо число $\mu_1 \in (0, 1)$. Тоді легко перевірити, що

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu_1(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)),$$

$$t \in (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)), \quad i \in U.$$

Нехай $G \supset (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$ — відкрита множина, така, що

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu_1(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)), \quad i \in U, \quad \forall t \in G.$$

Покладемо $F := Q \setminus G$. Зафіксуємо точку $t_0 \in F \subset Q \setminus (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$, $i \in U$. Очевидно, що

$$\left. \frac{\partial q^*}{\partial t_i} \right|_{t_0} \in (l_i(t_0), u_i(t_0)), \quad i \in U.$$

Тому знайдеться число $\mu(t_0) \in (0, 1)$ таке, що

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu(t_0)(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_{t_0} \in (l_i(t_0), u_i(t_0)), \quad i \in U.$$

Крім того, для деякого околу $V(t_0)$ точки t_0 буде виконуватись включення

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu(t_0)(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)), \quad i \in U, \quad t \in V(t_0).$$

Оскільки множина F компактна, то для неї знайдеться скінченний набір точок $\{t_1, \dots, t_k\} \subset F$, набір чисел $\{\mu(t_1), \dots, \mu(t_k)\} \subset (0, 1)$ і набір околів $\{V(t_1), \dots, V(t_k)\}$ таких, що

$$F \subset \bigcup_{j=1}^k V(t_j),$$

і для кожного $j = \overline{1, k}$ має місце включення

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu(t_j)(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)), \quad i \in U, \quad t \in V(t_j).$$

Покладемо

$$\mu_0 := \min \{\mu(t_1), \dots, \mu(t_k), \mu_1\}.$$

Легко перевірити, що

$$\left. \frac{\partial(q^* + \mu_0(p_1 - q^*))}{\partial t_i} \right|_t \in [l_i(t), u_i(t)], \quad i \in U, \quad t \in Q.$$

Крім того, для кожної точки $t \in M(f - q^*)$ внаслідок нерівності (2) маємо

$$\begin{aligned} & |f(t) - q^*(t) - \mu_0(p_1(t) - q^*(t))| \leq \\ & \leq (1 - \mu_0)|f(t) - q^*(t)| + \mu_0|f(t) - p_1(t)| < E(f, K), \end{aligned}$$

що суперечить рівності (1). Теорему доведено.

Введемо в розгляд множину

$$\begin{aligned} \Xi := & \{ \mathbf{b}(t) := (f(t) - q^*(t)) (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \mid t \in M(f - q^*) \} \cup \\ & \cup \left\{ \mathbf{c}_i(t) := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} \Big|_t, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} \Big|_t \right) \mid t \in E_+^i(q^*), i \in U \right\} \cup \\ & \cup \left\{ \mathbf{g}_i(t) := - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} \Big|_t, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} \Big|_t \right) \mid t \in E_-^i(q^*), i \in U \right\}. \end{aligned}$$

Відмітимо, що множина $M(f - q^*)$ — компактна. Також кожна з множин $E_+^i(q^*)$ та $E_-^i(q^*)$, $i \in U$, є компактною як замкнена підмножина компактної множини. Оскільки функції $f - q^*$ та φ_j , $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}$, $1 \leq j \leq n, i \in U$, неперервні, то множина Ξ є компактною в R^n .

Теорема 3.3. Наступні твердження рівносильні:

(а) поліном $q^* \in K$ є поліномом найкращого наближення функції $f \in C(Q)$ множиною K ;

(б) для кожного $p \in P$ виконується одна з двох умов:

$$\min_{t \in M(f - q^*)} (f(t) - q^*(t)) p(t) \leq 0 \quad (3)$$

або при деякому $i \in U$ справедлива хоча б одна з нерівностей:

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \geq 0 \quad \text{для деякого } t \in E_-^i(q^*),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \leq 0 \quad \text{для деякого } t \in E_+^i(q^*);$$

(в) $0 \in \text{conv} \Xi$ (в R^n);

(г) існують точки $t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j)$, $j = 1, \dots, w$, з $M(f - q^*)$, $s_+^{ij} = (s_{1+}^{ij}, \dots, s_{m+}^{ij})$ з $E_+^i(q^*)$, $i \in U$, $j = 1, \dots, \mu_+^i$, $s_-^{ij} =$

$= (s_{1-}^{ij}, \dots, s_{m-}^{ij}) \in E_-^i(q^*)$, $i \in U$, $j = 1, \dots, \mu_-^i$, i відповідні константи $\lambda_j > 0$, $\lambda_{ij}^+ > 0$, $\lambda_{ij}^- < 0$ такі, що для кожного полінома $p \in P$ виконується умова

$$\sum_{j=1}^w \lambda_j p(t^j) (f(t^j) - q^*(t^j)) + \sum_{i \in U} \left\{ \sum_{j=1}^{\mu_+^i} \lambda_{ij}^+ \frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_{s_+^{ij}} + \sum_{j=1}^{\mu_-^i} \lambda_{ij}^- \frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_{s_-^{ij}} \right\} = 0, \quad (4)$$

причому $w + \sum_{i \in U} \mu_+^i + \sum_{i \in U} \mu_-^i \leq n + 1$.

Доведення.

(а) \Rightarrow (б)

Розглянемо довільний поліном $p \in P$. Якщо при деякому $i \in U$ виконується хоча б одна з двох нерівностей

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \geq 0 \quad \text{для деякого } t \in E_-^i(q^*)$$

чи

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} \Big|_t \leq 0 \quad \text{для деякого } t \in E_+^i(q^*),$$

то, очевидно, твердження (б) є вірним. Припустимо протилежне.

Нехай

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} < 0 \quad \text{на } E_-^i(q^*), \quad \frac{\partial p}{\partial t_i} > 0 \quad \text{на } E_+^i(q^*),$$

$$i \in U.$$

Зафіксуємо довільну точку $t_0 \in \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$. Тоді знайдеться додатне число $z(t_0)$ таке, що

$$\left. \frac{\partial(q^* + z(t_0)p)}{\partial t_i} \right|_{t_0} \in (l_i(t_0), u_i(t_0)), \quad i \in U.$$

Зазначимо, що для деякого околу $V(t_0)$ точки t_0 справедливе включення

$$\left. \frac{\partial(q^* + z(t)p)}{\partial t_i} \right|_t \in (l_i(t), u_i(t)), \quad t \in V(t_0), \quad i \in U.$$

З відкритого покриття

$$\left\{ V(t) \mid t \in \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)) \right\}$$

компактної множини $\bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$ виділимо скінченне підпокриття $\{V(t^k) \mid 1 \leq k \leq s\}$ і розглянемо відповідний набір чисел $\{z(t^k) \mid 1 \leq k \leq s\}$. Покладемо $z_0 := \min_{1 \leq k \leq s} z(t^k)$. Неважко переконатись, що

$$(q^* + z_0 p) \in K \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)).$$

Оскільки за теоремою 3.2 пара $(M(f - q^*), \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)))$ є допустимою парою для f відносно K , то за критерієм Колмогорова (покладаючи $Q_0 := M(f - q^*)$, $W := K \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*))$) одержимо

$$\begin{aligned} & \min_{t \in M(f - q^*)} (f(t) - q^*(t))p(t) = \\ & = \frac{1}{z_0} \min_{t \in M(f - q^*)} (f(t) - q^*(t))(q^*(t) + z_0 p(t) - q^*(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (3).

(б) \Rightarrow (в)

Поставимо у відповідність поліному

$$p(t) = a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$$

вектор

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n.$$

Слід відмітити, що

$$p(t)(f(t) - q^*(t)) = (a, \mathbf{b}(t)), \quad t \in M(f - q^*), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_t = (a, \mathbf{c}_i(t)), \quad i \in U, \quad t \in E_+^i(q^*), \quad (6)$$

$$-\left. \frac{\partial p}{\partial t_i} \right|_t = (a, \mathbf{g}_i(t)), \quad i \in U, \quad t \in E_-^i(q^*). \quad (7)$$

Легко бачити, що твердження (б) рівносильне несумісності наступної системи лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} (a, \mathbf{b}(t)) > 0, & t \in M(f - q^*), \\ (a, \mathbf{c}_i(t)) > 0, & t \in E_+^i(q^*), \quad i \in U, \\ (a, \mathbf{g}_i(t)) > 0, & t \in E_-^i(q^*), \quad i \in U. \end{cases}$$

Враховуючи компактність множини Ξ і теорему про лінійні нерівності [6] одержуємо, що $0 \in \text{conv} \Xi$.

(в) \Rightarrow (г)

За теоремою Каратеодорі [6] вектор 0 (в R^n) має представлення у вигляді лінійної комбінації не більш ніж $n + 1$ векторів з Ξ . Тому знайдуться точки

$$t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j), \quad j = 1, \dots, w, \quad \text{з } M(f - q^*)$$

та

$$s_+^{ij} = (s_{1+}^{ij}, \dots, s_{m+}^{ij}), \quad j = 1, \dots, \mu_+^i \quad \text{з } E_+^i(q^*), \quad i \in U,$$

$$s_-^{ij} = (s_{1-}^{ij}, \dots, s_{m-}^{ij}), \quad j = 1, \dots, \mu_-^i \quad \text{з } E_-^i(q^*), \quad i \in U,$$

і відповідні константи $\lambda_j > 0$, $\lambda_{ij}^+ > 0$, $\lambda_{ij}^- < 0$ такі, що

$$\sum_{j=1}^w \lambda_j + \sum_{i \in U} \left(\sum_{j=1}^{\mu_+^i} \lambda_{ij}^+ - \sum_{j=1}^{\mu_-^i} \lambda_{ij}^- \right) = 1$$

і

$$\sum_{j=1}^w \lambda_j \mathbf{b}(t^j) + \sum_{i \in U} \left(\sum_{j=1}^{\mu_+^i} \lambda_{ij}^+ \mathbf{c}_i(s_{ij}^+) - \sum_{j=1}^{\mu_-^i} \lambda_{ij}^- \mathbf{g}_i(s_{ij}^-) \right) = 0. \quad (8)$$

Довільному поліному $p(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \in P$ поставимо у відповідність вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$. Домножуючи рівність (8) на вектор a і враховуючи співвідношення (6) і (7), приходимо до рівності (4).

Відмітимо, що множина точок $\{t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j), j = 1, \dots, w\}$ є непорожньою. Справді, покладаючи $p := q_0 - q^*$, де q_0 — поліном з K , для якого

$$l_i(t) < \frac{\partial q_0}{\partial t_i} \Big|_t < u_i(t) \quad \text{для всіх } t \in Q, \quad i \in U,$$

і враховуючи, що виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_0 - q^*)}{\partial t_i} \Big|_t &> 0, \quad i \in U, \quad t \in E_+^i(q^*), \\ \frac{\partial(q_0 - q^*)}{\partial t_i} \Big|_t &< 0, \quad i \in U, \quad t \in E_-^i(q^*), \end{aligned}$$

з (4) одержуємо

$$\sum_{j=1}^w \lambda_j (q_0(t^j) - q^*(t^j))(f(t^j) - q^*(t^j)) < 0.$$

Таким чином, множина $\{t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j), j = 1, \dots, w\}$ — непорожня.

(Г) \Rightarrow (а)

Задамо довільний поліном $p \in K$, відмінний від q^* . З рівності (4) випливає, що

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^w \lambda_j (p(t^j) - q^*(t^j))(f(t^j) - q^*(t^j)) + \\ & + \sum_{i \in U} \left\{ \sum_{j=1}^{\mu_+^i} \lambda_{ij}^+ \frac{\partial(p - q^*)}{\partial t_i} \Big|_{s_+^{ij}} + \sum_{j=1}^{\mu_-^i} \lambda_{ij}^- \frac{\partial(p - q^*)}{\partial t_i} \Big|_{s_-^{ij}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Враховуючи, що $p \in K$, маємо

$$\frac{\partial(p - q^*)}{\partial t_i} \Big|_t > 0, \quad i \in U, \quad t \in E_+^i(q^*), \quad (10)$$

$$\frac{\partial(p - q^*)}{\partial t_i} \Big|_t < 0, \quad i \in U, \quad t \in E_-^i(q^*). \quad (11)$$

Тому, внаслідок (9), (10) і (11), знайдеться точка

$$t_0 \in \{t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j), j = 1, \dots, w\} \subset M(f - q^*)$$

така, що

$$(p(t_0) - q^*(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) \leq 0.$$

Використовуючи останню нерівність, одержимо:

$$\begin{aligned} \|f - q^*\|^2 &= |f(t_0) - q^*(t_0)|^2 = (f(t_0) - q^*(t_0)) \cdot \\ &\cdot (f(t_0) - q^*(t_0)) = (f(t_0) - p(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) + \\ &+ (p(t_0) - q^*(t_0))(f(t_0) - q^*(t_0)) \leq \end{aligned}$$

$$\leq |f(t_0) - p(t_0)| |f(t_0) - q^*(t_0)| \leq \|f - p\| \cdot \|f - q^*\|.$$

Звідси маємо $\|f - q^*\| \leq \|f - p\|$. Теорему доведено.

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} T &:= \{t^j = (t_1^j, \dots, t_m^j), j = 1, \dots, w\} \subset M(f - q^*), \\ S &:= \{s_+^{ij} = (s_{1+}^{ij}, \dots, s_{m+}^{ij}), i \in U, j = 1, \dots, \mu_+^i\} \cup \\ &\cup \{s_-^{ij} = (s_{1-}^{ij}, \dots, s_{m-}^{ij}), i \in U, j = 1, \dots, \mu_-^i\} \subset \bigcup_{i \in U} (E_+^i(q^*) \cup E_-^i(q^*)). \end{aligned}$$

Наслідок 3.1. Пара множин (T, S) з твердження (г) є допустимою парою для f відносно K .

Доведення цього твердження аналогічне доведенню пункту (г) \Rightarrow (а).

Висновок. В роботі розглянуто випадок наближення дійсних неперервних функцій багатьох змінних, заданих на компактi, з обмеженнями на частинні похідні поліномів. Доведено теорему про харктеризацію елемента найкращого наближення, а також введено поняття допустимої пари множин для такого випадку обмежень і наведено приклад такої пари.

1. *Culbertson J.* On approximation by monotonic polynomials in the Chebyshev norm-characterization and uniqueness // Master's Thesis University of Maryland. – 1968.
2. *Shisha O.* Monotone approximation // Pacific J. Math. – 1965. — V. 15. — P. 667–671.
3. *Chalmers B.L.* A unified approach to uniform real approximation by polynomials with linear restrictions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 166. — P. 309–316.
4. *Roulier J.A., Taylor G.D.* Approximation by polynomials with restricted ranges on their derivatives // J. Approximation Theory. — 1972. — V. 5. — P. 216–227.
5. *Braess D.* Nonlinear Approximation Theory. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1986.
6. *Cheney E.W.* Introduction to Approximation Theory. — New York: McGraw-Hill, 1966. (Reprinted by Chelsea, New York, 1980).