

УДК 517.518.45

Т. О. Кононович

(Полтав. держ. пед. ун-т ім. В.Г. Короленка, Полтава)

**ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ
ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРУ $L_p(Q^2)$, $1 < p < \infty$,
ЧЕРЕЗ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є**

Встановлено виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення тригонометричними поліномами функцій простору $L_p(Q^2)$, $1 < p < \infty$, які задані подвійними тригонометричними рядами з коефіцієнтами $a_{l_1 l_2} \rightarrow 0, l_1 + l_2 \rightarrow \infty$, що задовольняють умову $\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{l_1=k_1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} < \infty$.

Нехай $L_p(Q^m)$, $1 < p < \infty$, $m = 1, 2, \dots$, — простір 2π -періодичних за кожною змінною сумовних у p -му степені на $Q^m = [-\pi; \pi]^m$ функцій m змінних з нормою

$$\|f(\mathbf{x})\|_{L_p(Q^m)} = \left(\int_{Q^m} |f(\mathbf{x})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_m$.

Оцінку зверху величини найкращого наближення $E_n(f)_p$ тригонометричними поліномами степеня не вище n функцій простору $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, заданих рядами Фур'є по синусах з монотонними коефіцієнтами, що задовольняють деякі додаткові умови, одержав А.А. Коношков [1] (теорема 4).

Якщо

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (1)$$

© Т. О. Кононович, 2007

де $b_k \downarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, і при деякому p , $1 < p < \infty$, збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p k^{p-2} < \infty \quad (2)$$

то

$$E_n(g)_p \leq C_p \left((n+1)^{\frac{1}{p'}} b_{n+1} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$, $n = 0, 1, \dots$. При $p \geq 2$ доданок $(n+1)^{\frac{1}{p'}} b_{n+1}$ у правій частині нерівності можна відкинути (тут і надалі символом C_p позначено додатні сталі, які залежать хіба що від p і можуть бути неоднаковими у різних формулах).

Зазначимо, що ряд (1) при $b_k \downarrow 0$ збігається скрізь [2, с. 95] і за умови (2) є рядом Фур'є своєї суми — функції простору $L_p(Q)$ [2, с. 657; 3, с. 63].

Для функцій, заданих синус- або косинус-рядами з коефіцієнтами, що можуть бути немонотонними, нами встановлено оцінку [4], яка за умови монотонності збігається з результатом А.А. Конюшкова.

Якщо елементи послідовності $\{b_k\}$ такі, що $b_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, і при деякому p , $1 < p < 2$, збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p (k+1)^{p-2} < \infty, \quad (3)$$

де $\Delta b_i = b_i - b_{i+1}$, то для функції (1) справджується оцінка

$$E_n(g)_p \leq C_p \left((n+1)^{\frac{1}{p'}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta b_k| + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \right), \quad (4)$$

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Співвідношення (4) має місце і для функції

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (5)$$

при виконанні для коефіцієнтів a_k вказаних умов. Крім того, нерівність (4) справджується також і при $p \geq 2$, але у цьому випадку на підставі теореми Харді і Літгльвуда [5, с. 165; 6, с.215] можна одержати точнішу оцінку. Так, якщо при деякому $2 \leq p < \infty$ виконується

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p (k+1)^{p-2} < \infty,$$

то для функції $g \in L_p(Q)$ з коефіцієнтами Фур'є $\{b_k\}$ справедлива оцінка

$$E_n(g)_p \leq C_p \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^p (k+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Зазначимо, що умова (3) гарантує виконання умови $\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta b_i| < \infty$ і разом з умовою $b_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, забезпечує збіжність ряду (1) скрізь до $g(x) \in L_p(Q)$ (а ряду (5) за винятком хіба що точок $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ — до $f(x) \in L_p(Q)$) [2, с. 96]. Тому на підставі теореми дю Буа-Реймона [2, с. 790] ряд (1) є рядом Фур'є функції $g(x)$ (а ряд (5) — функції $f(x)$).

У роботі [7] нами отримана аналогічна співвідношенню (4) оцінка для найкращого наближення "кутом" функцій простору $L_p(Q^2)$, $1 < p < \infty$, заданих тригонометричними рядами, які при накладених на коефіцієнти умовах є рядами Фур'є своїх сум.

Метою даної роботи є встановлення оцінки, аналогічної (4), у випадку найкращого наближення зазначених функцій простору $L_p(Q^2)$ тригонометричними поліномами.

Позначимо через $T_{n_1 n_2}$, $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, множину тригонометричних поліномів вигляду

$$\begin{aligned} t_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = & \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma(l_1, l_2)} (A_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + \\ & + B_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \sin l_2 x_2 + C_{l_1 l_2} \sin l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + \\ & + D_{l_1 l_2} \sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут і надалі $\gamma(l_1, l_2)$ — кількість нульових координат вектора (l_1, l_2) , $A_{l_1 l_2}, B_{l_1 l_2}, C_{l_1 l_2}, D_{l_1 l_2}$ — довільні дійсні числа.

Через $E_{n_1 n_2}(f)_p$, $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, позначимо величину найкращого наближення функції $f \in L_p(Q^2)$ тригонометричними поліномами $t_{n_1 n_2} \in T_{n_1 n_2}$:

$$E_{n_1 n_2}(f)_p = \inf_{t_{n_1 n_2} \in T_{n_1 n_2}} \|f(x_1, x_2) - t_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)}.$$

Покладемо $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$. Нехай також

$$Q_{m_1 m_2} = \{(l_1, l_2) \in Z_+^2 : (l_1 \leq m_1) \wedge (l_2 \leq m_2)\}, \quad (7)$$

$m_1, m_2 \in N_0$.

Позначимо через $S^{ij}(a)$, $i, j \in \{0, 1\}$, тригонометричні ряди вигляду

$$S^{ij}(a) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(l_1, l_2)} a_{l_1 l_2} \cos\left(l_1 x_1 - \frac{i\pi}{2}\right) \cos\left(l_2 x_2 - \frac{j\pi}{2}\right), \quad (8)$$

де $a_{l_1 l_2}$ — дійсні числа.

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, покладемо: $\Delta^1 a_{l_1 l_2} = a_{l_1 l_2} - a_{l_1+1, l_2}$, $\Delta^2 a_{l_1 l_2} = a_{l_1 l_2} - a_{l_1, l_2+1}$,

$$\Delta^{12}a_{l_1l_2} = \Delta^2(\Delta^1a_{l_1l_2}) = \Delta^1(\Delta^2a_{l_1l_2}) = a_{l_1l_2} - a_{l_1+1l_2} - a_{l_1l_2+1} + a_{l_1+1l_2+1}, \check{r}_{m_1m_2}(a) = \sum_{l_1=m_1}^{\infty} \sum_{l_2=m_2}^{\infty} |\Delta^{12}a_{l_1l_2}|, m_1, m_2 \in N_0.$$

Розглядатимемо функції, які можуть бути представлені за допомогою тригонометричних рядів вигляду (8), коефіцієнти яких задовольняють умови

$$a_{l_1l_2} \rightarrow 0 \quad l_1 + l_2 \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\check{r}_{k_1k_2}(a) \right)^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} < \infty \quad (10)$$

при деякому p , $1 < p < \infty$.

Нехай для послідовності $\{a_{l_1l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, виконується (10). Скінченність кожного доданку ряду (10) гарантує

$$\check{r}_{00}(a) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} |\Delta^{12}a_{l_1l_2}| < \infty,$$

що разом з (9) забезпечує збіжність за Прінгсхеймом рядів $S^{00}(a)$, $S^{01}(a)$, $S^{10}(a)$ скрізь у Q^2 , за винятком хіба що точок з множин $\{(x_1, x_2) \in Q^2 : x_1x_2 = 0\}$, $\{(x_1, x_2) \in Q^2 : x_1 = 0\}$, $\{(x_1, x_2) \in Q^2 : x_2 = 0\}$ відповідно, а ряду $S^{11}(a)$ — скрізь у Q^2 [8] (теорема 1). Отже, за умов (9), (10) майже скрізь визначено функції

$$f^{ij}(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(l_1, l_2)} a_{l_1l_2} \cos\left(l_1x_1 - \frac{i\pi}{2}\right) \cos\left(l_2x_2 - \frac{j\pi}{2}\right), \quad (11)$$

$i, j \in \{0, 1\}$.

Якщо елементи послідовності $\{a_{l_1l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, задовольняють умови (9), (10), то, як показано у роботі [7] (теорема 2), функції $f^{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, належать простору $L_p(Q^2)$,

$1 < p < \infty$, і справджується оцінка

$$\begin{aligned} & \|f^{ij}(x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)} \leq \\ & \leq C_p \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тому функції, визначені рівностями (11), належать і простору $L(Q^2)$, а отже, ряди $S^{ij}(a)$ є їх рядами Фур'є [9, 10].

Теорема. Якщо елементи послідовності $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, задовольняють умови (9), (10), то для функцій $f^{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, справедлива оцінка

$$\begin{aligned} E_{n_1 n_2}(f^{ij})_p & \leq C_p \left((n_1+1)^{\frac{1}{p'}} (n_2+1)^{\frac{1}{p'}} \check{r}_{n_1+1 \ n_2+1}(a) + \right. \\ & + (n_1+1)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{n_1+1 \ k_2}(a))^p (k_2+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + (n_2+1)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 \ n_2+1}(a))^p (k_1+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & \left. + \left(\sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

де $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Доведення. Позначимо

$$S_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2) := \sum_{(l_1, l_2) \in Q_{n_1 n_2}} 2^{-\gamma} a_{l_1 l_2} \cos\left(l_1 x_1 - \frac{i\pi}{2}\right) \cos\left(l_2 x_2 - \frac{j\pi}{2}\right),$$

$$R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2) := f^{ij}(x_1, x_2) - S_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2),$$

де $n_1, n_2 \in N_0$, $i, j \in \{0, 1\}$. Тоді

$$\begin{aligned} R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2) &= \\ &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} \alpha_{l_1 l_2} \cos\left(l_1 x_1 - \frac{i\pi}{2}\right) \cos\left(l_2 x_2 - \frac{j\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

де

$$\alpha_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (l_1, l_2) \in Q_{n_1 n_2}; \\ a_{l_1 l_2}, & \text{якщо } (l_1, l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}. \end{cases}$$

Покажемо, що функція $R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)$ задовольняє умови (9), (10). Очевидно, що перша з них має місце, оскільки (9) виконується для $a_{l_1 l_2}$. Доведемо, що коефіцієнти $\alpha_{l_1 l_2}$ задовольняють умову (10). Знайдемо

$$\Delta^{12} \alpha_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq l_1 \leq n_1 - 1, \\ & 0 \leq l_2 \leq n_2 - 1; \\ -\Delta^1 a_{l_1 n_2 + 1}, & \text{якщо } 0 \leq l_1 \leq n_1 - 1, \\ & l_2 = n_2; \\ -\Delta^2 a_{n_1 + 1, l_2}, & \text{якщо } l_1 = n_1, \\ & 0 \leq l_2 \leq n_2 - 1; \\ a_{n_1 + 1, n_2 + 1} - a_{n_1 + 1, n_2} - \\ -a_{n_1 n_2 + 1}, & \text{якщо } l_1 = n_1, l_2 = n_2; \\ \Delta^{12} a_{l_1 l_2}, & \text{якщо } l_1 \geq n_1 + 1 \\ & \text{або } l_2 \geq n_2 + 1. \end{cases}$$

Покажемо, що

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} \leq \\ & \leq C_p \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2}. \quad (14) \end{aligned}$$

1) Нехай $0 \leq k_1 \leq n_1 - 1$, $0 \leq k_2 \leq n_2 - 1$. Тоді

$$\begin{aligned}
 \check{r}_{k_1 k_2}(\alpha) &= \sum_{l_1=k_1}^{n_1-1} |\Delta^1 a_{l_1 n_2+1}| + \sum_{l_2=k_2}^{n_2-1} |\Delta^2 a_{n_1+1 l_2}| + |a_{n_1+1 n_2+1}| + \\
 &+ |a_{n_1+1 n_2}| + |a_{n_1 n_2+1}| + \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right) \leq \\
 &\leq C \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Отже, $\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha) \leq C \check{r}_{k_1 k_2}(a)$.

2) Нехай $0 \leq k_1 \leq n_1 - 1$, $k_2 = n_2$. Тоді

$$\begin{aligned}
 \check{r}_{k_1 n_2}(\alpha) &= \sum_{l_1=k_1}^{n_1-1} |\Delta^1 a_{l_1 n_2+1}| + |a_{n_1+1 n_2+1}| + |a_{n_1+1 n_2}| + |a_{n_1 n_2+1}| + \\
 &+ \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right) \leq C \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Отже, $\check{r}_{k_1 n_2}(\alpha) \leq C \check{r}_{k_1 n_2}(a)$.

3) Нехай $k_1 = n_1$, $0 \leq k_2 \leq n_2 - 1$. Аналогічно (16), одержуємо

$$\begin{aligned} \check{r}_{n_1 k_2}(\alpha) \leq C & \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{n_1 l_2}| + \right. \\ & \left. + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Отже, $\check{r}_{n_1 k_2}(\alpha) \leq C \check{r}_{n_1 k_2}(a)$.

4) Нехай $k_1 = n_1$, $k_2 = n_2$. Тоді

$$\begin{aligned} \check{r}_{n_1 n_2}(\alpha) &= |a_{n_1+1 \ n_2+1}| + |a_{n_1+1 \ n_2}| + |a_{n_1 n_2+1}| + \\ &+ \left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{n_1 l_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| + \right. \\ &+ \left. \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right) \leq C \left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{n_1 l_2}| + \right. \\ &+ \left. \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| + \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, $\check{r}_{n_1 n_2}(\alpha) \leq C \check{r}_{n_1 n_2}(a)$.

4) Нехай $k_1 \geq n_1 + 1$, $k_2 \geq n_2 + 1$. Тоді

$$\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha) = \check{r}_{k_1 k_2}(a). \quad (19)$$

Таким чином, для всіх $(k_1, k_2) \in Z_+^2$ має місце $\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha) \leq C \check{r}_{k_1 k_2}(a)$, звідки випливає нерівність (14), а внаслідок збіжності ряду в її правій частині і справедливості (10) для послідовності $\{\alpha_{l_1 l_2}\}$.

Тепер для оцінювання норми функції $R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)$ можна застосувати нерівність (12) :

$$\begin{aligned} \|R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)}^p &\leq C_p \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} \times \\ &\times (k_2 + 1)^{p-2} = C_p \left(\sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + (n_2 + 1)^{p-2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} (\check{r}_{k_1 n_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} + (n_1 + 1)^{p-2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k_2=0}^{n_2-1} (\check{r}_{n_1 k_2}(\alpha))^p (k_2 + 1)^{p-2} + (\check{r}_{n_1 n_2}(\alpha))^p (n_1 + 1)^{p-2} (n_2 + 1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Враховуючи (15)–(19) та нерівність $|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$, яка має місце при будь-якому $p \geq 1$, оцінимо кожен з доданків правої частини (20) :

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} \leq \\ &\leq C_p \left(\sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2}; \\
& \quad (n_2+1)^{p-2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} (\check{r}_{k_1 n_2}(\alpha))^p (k_1+1)^{p-2} \leq \\
& \leq C_p \left((n_2+1)^{p-2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1+1)^{p-2} + \right. \\
& \quad \left. + (n_2+1)^{p-2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| \right)^p (k_1+1)^{p-2} + \right. \\
& \quad \left. + (n_2+1)^{p-2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1+1)^{p-2} \right); \\
& \quad (n_1+1)^{p-2} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} (\check{r}_{n_1 k_2}(\alpha))^p (k_2+1)^{p-2} \leq \\
& \leq C_p \left((n_1+1)^{p-2} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_2+1)^{p-2} + \right. \\
& \quad \left. + (n_1+1)^{p-2} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{n_1 l_2}| \right)^p (k_2+1)^{p-2} + \right. \\
& \quad \left. + (n_1+1)^{p-2} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_2+1)^{p-2} \right); \\
& (\check{r}_{n_1 n_2}(\alpha))^p (n_1+1)^{p-2} (n_2+1)^{p-2} \leq C_p \left(\left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 n_2}| \right)^p \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (n_1 + 1)^{p-2} (n_2 + 1)^{p-2} + \left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{n_1 l_2}| \right)^p (n_1 + 1)^{p-2} \times \\
 & \times (n_2 + 1)^{p-2} + \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (n_1 + 1)^{p-2} (n_2 + 1)^{p-2}; \\
 & \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(\alpha))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} = \\
 & = \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2}.
 \end{aligned}$$

З (20) на підставі одержаних оцінок отримуємо

$$\begin{aligned}
 \|R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)}^p & \leq C_p \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p \times \right. \\
 & \times (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p \times \\
 & \times (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \left. \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p \times \right. \\
 & \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} + \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p \times \\
 & \times (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} \left. \right) \leq C_p \left((n_2 + 1)^{p-1} \times \right. \\
 & \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \left(\sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_1 + 1)^{p-2} + (n_1 + 1)^{p-1} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k_2=0}^{n_2} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p (k_2 + 1)^{p-2} + (n_1 + 1)^{p-1} \times \\ & \quad \times (n_2 + 1)^{p-1} \left(\sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} |\Delta^{12} a_{l_1 l_2}| \right)^p + \\ & \quad + \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)}^p & \leq C_p \left((n_1 + 1)^{p-1} (n_2 + 1)^{p-1} \times \right. \\ & \times (\check{r}_{n_1+1 \ n_2+1}(a))^p + (n_1 + 1)^{p-1} \sum_{k_2=0}^{\infty} (\check{r}_{n_1+1 \ k_2}(a))^p (k_2 + 1)^{p-2} + \\ & \quad \left. + (n_2 + 1)^{p-1} \sum_{k_1=0}^{\infty} (\check{r}_{k_1 \ n_2+1}(a))^p (k_1 + 1)^{p-2} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} (\check{r}_{k_1 k_2}(a))^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} \right), \end{aligned}$$

звідки з урахуванням нерівності $|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p$, яка має місце при будь-якому $0 \leq p < 1$, та співвідношення

$$E_{n_1 n_2}(f^{ij})_p \leq \|R_{n_1 n_2}(f^{ij}; x_1, x_2)\|_{L_p(Q^2)}$$

одержуємо оцінку (13), що і доводить теорему.

Наслідок. *Нехай елементи послідовності $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, задовольняють умови (9), $\Delta^{12} a_{l_1 l_2} \geq 0$, $\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1 k_2}^p (k_1 + 1)^{p-2} (k_2 + 1)^{p-2} < \infty$ при деякому $p, 1 < p < \infty$.*

Тоді для функцій $f^{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, справедлива оцінка

$$E_{n_1 n_2}(f^{ij})_p \leq C_p \left((n_1 + 1)^{\frac{1}{p'}} (n_2 + 1)^{\frac{1}{p'}} a_{n_1+1 \ n_2+1} + (n_1 + 1)^{\frac{1}{p'}} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{n_1+1k_2}^p (k_2+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} + (n_2+1)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1n_2+1}^p (k_1+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{n_1 n_2}} a_{k_1 k_2}^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

1. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, № 1. — С. 53–84.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.
3. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. — Дніпропетровськ: Поліграфіст, 2000. — 320 с.
4. Кононович Т.О. Оцінка найкращого наближення періодичних функцій в метриці L_p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Т. 36. — 2003. — С. 83–88.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
6. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: В 2 т. — М.: Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
7. Кононович Т.О. Оцінка найкращого наближення "кутом" в метриці L_p періодичних функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 9. — С. 1182–1192.
8. Задерей П.В. Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 3. — С. 340–365.
9. Талалаян А.А. О единственности двойных тригонометрических рядов // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1985. — Т. 20, № 6. — С. 426–462.
10. Талалаян А.А. О некоторых свойствах единственности кратных тригонометрических рядов и гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 3. — С. 621–650.