Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 151-171

УДК 517.5

А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк
(Ін–т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Одержано точні за порядком оцінки для найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \ 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Надалі скрізь будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1, d}.$$

Наведемо визначення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, розглянутого в роботі [1].

Нехай функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$, за допомогою якої визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0,\ \ t_j > 0,\ \ j = \overline{1,d};\quad \Omega(t) = 0,\ \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t),\ \ m_j \in \mathbb{N},\quad j = \overline{1,d};$

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0,\quad j = \overline{1,d}$.

Також будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [2] і які опишемо нижче.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1. \tag{1}$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i,\ \ i \ne j$.

Отримані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в процесі доведення, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\right\},$$

і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l). Тоді для $1 < p < \infty$ згідно з означенням (див. [1]):

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\delta_s(f, x)||_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty\ , \tag{2}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{||\delta_s(f, x)||_p}{\Omega(2^{-s})}\ , \tag{3}$$

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає з класом H^{Ω}_p (див., наприклад, [3]), а при $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j},\ r_j > 0$, — з класом $B^r_{p,\theta}$ (див., наприклад, [4]).

Зауважимо, що для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати аналогічні до (2) та (3) зображення у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f, x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x).$$

Тоді при кожному $1 \le p \le \infty$, норми функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, можна подати в наступному вигляді:

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s>0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| A_s(f, x) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{4}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{5}$$

Співвідношеня (4) було встановлено в роботі [5], а (5) — в [3].

Зазначимо, що далі в роботі будуть розглядатись класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{6}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (6) виконуються властивості 1–4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), і тому зберігаються наведені вище зображення (2)–(5) норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Перейдемо безпосередньо до означення величини, що буде досліджуватися в роботі.

Нехай Ω_M — довільний набір з M d-вимірних векторів $k^1, \dots, k^M$, $k^j = (k^j_1, \dots, k^j_d)$, $j = 1, \dots, M$, з цілочисловими координатами. Для функції $f \in L_q(\pi_d),\ 1 \le q \le \infty$, в якості наближаючого полінома за системою експонент $\{e^{i(k^j,x)}\}_{j=1}^M$ будемо брати поліном

$$S_M(f,x) = \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j,x)}$$

і розглядати величину

$$e^{\perp}_M(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} ||f(x) - S_M(f,x)||_q.$$

Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий клас функцій, то покладаємо

$$e^{\perp}_M(F)_q = \sup_{f\in F} e^{\perp}_M(f)_q.$$

Величину $e^{\perp}_M(F)_q$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

Величини $e^{\perp}_M(F)_q$ для деяких класів функцій F вивчалися в роботах Е.С. Белінського [6], А.С. Романюка [7 – 9], С.А. Стасюка [10] та інших.

Для викладення подальших міркувань нам знадобляться наступні твердження.

Теорема А (Літтлвуда-Пелі [див. 11, с. 65]). *Нехай задано $1 < p < \infty$. Існують додатні числа C_3, C_4 такі, що для кожної функції $f \in L_p(\pi_d)$ виконуються співвідношення*

$$C_3\|f\|_p \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f;x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_4\|f\|_p. \tag{7}$$

Теорема Б ([12]). *Нехай $T_n(x)$ — тригонометричний поліном порядку $n = (n_1, ..., n_d)$*

$$T_n(x) = \sum_{|k_1| \le n_1} ... \sum_{|k_d| \le n_d} c_{k_1,...,k_d} e^{i(k,x)},$$

де n_j, $j = \overline{1,d}$ — натуральні числа, $c_{k_1,...,k_d}$ — довільні коефіцієнти. Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ має місце співвідношення

$$\|T_n(x)\|_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|T_n(x)\|_q. \tag{8}$$

Нерівність (8) була встановлена С.М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [13].

Теорема В [3]. *Нехай $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l). Функція $f \in L_q(\pi_d)$ належить класові H_q^Ω тоді і тільки тоді, коли*

$$\|\delta_s(f;x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 < q < \infty,$$

$$\|A_s(f;x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 \le q \le \infty.$$

Лема А [14, с. 25]. *Нехай $1 \le p < q < \infty$ і $f \in L_p(\pi_d)$. Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f;x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}},$$

де $\|s\|_1 = s_1 + s_2 + ... + s_d$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\}$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^{\Omega})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (9)$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху для випадку $1 \le \theta < q$. Нехай f — довільна функція із класу $B_{1,\theta}^{\Omega}$ і задано достатньо велике число M. Будемо наближати f поліномом $S_M(f,x)$, який складається з частинної "східчасто–гіперболічної" суми Фур'є функції f та полінома $Q(x)$:

$$S_M(f,x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f,x) + Q(x),$$

причому $S_M(f,x)$ містить за порядком M гармонік і n пов'язане з M співвідношенням $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Опишемо процедуру побудови полінома $Q(x)$.

Нехай $l \in \mathbb{N}$ і $l \in [n, n_o)$, де $n_o = n + (d-1)\log n$. Для $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ покладемо

$$\widetilde{S}_l = \left(\sum_{\|s\|_1 = l} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad (10)$$

і позначимо через $\alpha_i(f,l)$ числа $\|A_s(f,x)\|_1$, впорядковані за спаданням. Зазначимо, що індекс i змінюється в межах від 1 до K_l, де K_l — кількість векторів s, що задовольняють умову $\|s\|_1 = l$. Виходячи з рівності (10) будемо мати

$$\sum_{\|s\|_1 = l} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} = \omega^{\theta}(2^{-l}) \widetilde{S}_l^{\theta},$$

або

$$\sum_{i=1}^{K_l} \alpha_i^{\theta}(f,l) = \omega^{\theta}(2^{-l})\widetilde{S}_l^{\theta}.$$

З останнього співвідношення, враховуючи, що із зростанням індекса i числа $\alpha_i(f,l)$ не зростають, знаходимо

$$\alpha_i(f,l) \leq i^{-\frac{1}{\theta}}\omega(2^{-l})\widetilde{S}_l. \tag{11}$$

Далі кожному числу $l \in [n, n_o),\ l \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність число m_l, що визначається за формулою:

$$m_l = [2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^{\theta}] + 1, \tag{12}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a. Зазначимо, що оскільки для $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ величина $\widetilde{S}_l$ не перевищує деякої абсолютної сталої, то для будь - якого $l \in \mathbb{N},\ \ l \in [n, n_o)$, будемо мати

$$m_l \leq 2^n n^{d-1} 2^{-l} + 1 \ll n^{d-1}.$$

Іншими словами, числа m_l не перевищують за порядком кількості векторів s, які задовольняють співвідношення $l = \|s\|_1,\ l \in \mathbb{N},\ l \in [n, n_o)$.

Розглянемо поліном

$$R(x) = \sum_{l=n}^{[n_o]+1} \sum_{\|s\|_1 = l} \delta_s(f,x) \tag{13}$$

і для кожного l візьмемо із внутрішньої суми (13) m_l "блоків" $\delta_s(f,x)$ за тими s, яким відповідають найбільші значення норми $\|A_s(f,x)\|_1$. Одержаний в результаті так вибраних "блоків" $\delta_s(f,x)$ поліном позначимо через $Q(x)$.

Переконаємось спочатку, що кількість гармонік K, які містяться в $S_M(f,x)$, не перевищує за порядком M. Для цього будемо користуватися тим, що

$$\sum_{\|s\|_1\le n} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|s\|_1=j} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{\|s\|_1=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=1}^{n} 2^j j^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1}. \qquad (14)$$

Дійсно, згідно з (14), (12) і (10), враховуючи, що $n_o = n + (d-1)\log n$, одержимо

$$K \ll \sum_{\|s\|_1<n} 2^{\|s\|_1} + \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^l m_l \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^l (2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^{\theta} + 1) \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} \left(1 + \sum_{l=n}^{[n_o]+1} \sum_{\|s\|_1=l} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \right) + 2^n n^{d-1} \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1}(2 + \|f\|^{\theta}_{B^{\Omega}_{1,\theta}}) \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Отже, кількість гармонік, які містяться в $S_M(f,x)$ не перевищує за порядком M.

Далі, нехай D_f позначає множину тих векторів $s : n \le \|s\|_1 < n_o$, за якими "блоки" $\delta_s(f,x)$ не містяться в $Q(x)$. Тоді, якщо $S_M(f,x)$ — сума, що побудована описаним вище способом, то для $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ будемо мати

$$\|f(x) - S_M(f,x)\|_q = \|f(x) - \sum_{\|s\|_1<n_o} \delta_s(f,x) + \sum_{s\in D_f} \delta_s(f,x)\|_q \le$$

$$\leq \|f(x) - \sum_{\|s\|_1 < n_o} \delta_s(f,x)\|_q + \|\sum_{s \in D_f} \delta_s(f,x)\|_q =: I_1 + I_2. \quad (15)$$

Оцінимо кожен з доданків в (15).

Зауважимо, що в роботі [15], при $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, якщо $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ та умову (S_l), встановлена точна за порядком оцінка верхніх граней відхилень східчастих гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f,x) = \sum\limits_{||s||_1 < n} \delta_s(f,x)$ класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{1,\theta}} ||f(x) - S_{Q_n}(f,x)||_q \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad (16)$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Використовуючи (16), значення n_0, а також той факт, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\} > 1 - \frac{1}{q}$, одержимо

$$I_1 \ll \mathcal{E}_{Q_{n_0}}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_o}) 2^{n_o(1-\frac{1}{q})} = \frac{\omega(2^{-n_o})}{2^{-\alpha n_o}} 2^{-n_o(\alpha - 1 + \frac{1}{q})} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n(\alpha-1+\frac{1}{q})} n^{-(d-1)(\alpha-1+\frac{1}{q})} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{-(d-1)(\alpha-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \quad (17)$$

Для отримання оцінки величини I_2 скористаємось спочатку лемою А за умови $1 < q_o < q$, а потім нерівністю різних метрик (8). Таким чином, будемо мати

$$I_2 = \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|\delta_s(f,x)\|_{q_o} 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{q_o} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_{q_o} 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{q_o} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1 (1 - \frac{1}{q_o})} 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{q_o} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \sum_{s \in D_f} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1 (1 - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \sum_{i > m_l} \alpha_i^{\theta}(f,l) \alpha_i^{q-\theta}(f,l) \right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (18)$$

Скориставшись для оцінки $\alpha_i^{q-\theta}(f,l)$ співвідношенням (11) і підставивши замість m_l його значення (12), продовжимо (18)

$$I_2 \ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \sum_{i > m_l} \alpha_i^{\theta}(f,l) \left(i^{-\frac{1}{\theta}} \omega(2^{-l}) \widetilde{S}_l \right)^{q-\theta} \right\}^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q-\theta} \sum_{\|s\|_1 = l} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q}(2^{-l}) m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q}(2^{-l}) (2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^{\theta})^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= (2^n n^{d-1})^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} \left(\frac{\omega(2^{-l})}{2^{-\alpha l}} 2^{-\alpha l} \right)^q 2^{lq(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta})} \widetilde{S}_l^{\theta} \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (19)$$

Враховуючи, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\} = 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, а також формулу (10), продовжимо оцінку (19)

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} 2^{-lq(\alpha-(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}))} \widetilde{S}_l^{\theta} \right\}^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{d-1})^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{n(\alpha-(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}))} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_o]+1} \widetilde{S}_l^{\theta} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \times$$

$$\times \left\{ \left(\sum_{l=n}^{[n_o]+1} \sum_{\|s\|_1=l} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{q}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}}^{\frac{\theta}{q}} \le$$

$$\le \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (20)$$

Нарешті, повертаючись до співвідношення (15), з урахуванням одержаних оцінок (17), (20), приходимо до потрібної оцінки зверху для випадку $1 \le \theta < q$:

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки зверху для випадку $q \le \theta \le \infty$. Зауважимо, що при зазначених значеннях θ умова $\alpha > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\}$ рівносильна умові $\alpha > 1-\frac{1}{q}$.

Підберемо за заданим $M \in \mathbb{N}$ число n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і нагадаємо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$. Тоді, враховуючи (16), будемо мати

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінки зверху доведені.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. За даним числом M підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $2^n n^{d-1} \geq 2M$, і розглянемо функції

$$f_1(x) = C_5 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_5 > 0,$$

та

$$f_2(x) = C_6 \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_6 > 0.$$

Покажемо, що $f_1 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та $f_2 \in B^{\Omega}_{1,\infty}$ при відповідних значеннях сталих C_5 та C_6.

Дійсно,

$$\|f_1\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(f_1, x)\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

$$\|f_2\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \frac{\|A_s(f_2, x)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Далі, нехай Ω_M–довільна множина, що містить M d–вимірних векторів $\{k^j\}_{j=1}^M$ з цілочисловими координатами, і $S_M(f,x)$ — поліном, отриманий в результаті ортогонального проектування $f(x)$ на підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з Ω_M. Тоді згідно з наслідком Д1.2 [16, с. 392] можна записати

$$\|f(x)-S_M(f,x)\|_q = \sup_{g:\ \|g\|_{q'}\le 1} \left| \int\limits_{\pi_d} (f(x)-S_M(f,x))g(x)dx \right|, \quad (21)$$

де $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$.

В якості функції $g(x)$, яка фігурує в рівності (21), виберемо функцію вигляду

$$g(x) = C_7 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} \sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} =$$

$$= C_7 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} D_{n+d}(x), \quad C_7>0.$$

Покажемо, що $\|g\|_{q'}\le 1$ при певному значенні сталої $C_7>0$.

Нехай спочатку $q'\in(1,2]$. Тоді згідно з теоремою A можна записати

$$\|D_{n+d}(x)\|_{q'} \ll \left\| \left(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} |\delta_s(D_{n+d},x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} =$$

$$= \left\| \left(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} |\delta_s(D_{n+d},x)|^2 \right)^{\frac{q'}{2}} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} = I_3. \quad (22)$$

Для подальшої оцінки величини I_3 скористаємося відомим співвідношенням (див., напр., [17, с. 214])

$$\left\| \sum_{k=n}^{l} \cos kx \right\|_p \asymp (l-n)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall n,l\in\mathbb{N}, \quad l>n, \quad p\in(1,\infty),$$

оскільки

$$\left\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \right\|_p \asymp 2^{s_j(1-\frac{1}{p})}, \quad j=\overline{1,d},$$

то для s таких, що $n \le \|s\|_1 \le n+d$ будемо мати

$$\|\delta_s(D_{n+d},x)\|_p = \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_p = \prod_{j=1}^{d} \left\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \right\|_p \asymp$$

$$\asymp \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j(1-\frac{1}{p})} = 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}, \quad 1<p<\infty. \tag{23}$$

Скориставшись одержаним співвідношенням, а також нерівністю

$$|a+b|^{\alpha} \le |a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

продовжимо оцінку (22):

$$I_3 \le \left\| \sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} |\delta_s(D_{n+d},x)|^{q'} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} \|\delta_s(D_{n+d},x)\|_{q'}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp$$

$$\asymp 2^{\frac{n}{q}} \left(\sum_{n\le\|s\|_1\le n+d} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \tag{24}$$

Нехай тепер $q' \in (2, \infty)$. Тоді згідно з лемою A та співвідношенням (23), знаходимо

$$\|D_{n+d}(x)\|_{q'} \ll \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \|\delta_s(D_{n+d}, x)\|_2^{q'} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} 2^{\|s\|_1(1 - \frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \qquad (25)$$

Об'єднуючи (22) – (25), приходимо до оцінки

$$\|D_{n+d}(x)\|_{q'} \ll 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}, \quad 1 < q' < \infty. \qquad (26)$$

Таким чином, з (26) слідує, що функція $g(x)$ з відповідною сталою $C_7 > 0$ задовольняє умову $\|g\|_{q'} \le 1$.

Тепер, враховуючи співвідношення (21) для побудованих функцій $f_1(x)$ і $g(x)$, одержуємо для випадку $1 \le \theta < \infty$

$$e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^{\Omega})_q \ge e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{S_M} \|f_1(x) - S_M(f_1, x)\|_q =$$

$$= \inf_{S_M} \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int_{\pi_d} (f_1(x) - S_M(f_1, x)) g(x) dx \right| \gg$$

$$\gg \inf_{S_M} \left| \int_{\pi_d} (f_1(x) - S_M(f_1, x)) g(x) dx \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)(\frac{1}{q'} + \frac{1}{\theta})} \inf_{S_M} \left| \|D_{n+d}(x)\|_2^2 - \|S_M(D_{n+d}, x)\|_2^2 \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)(\frac{1}{q'} + \frac{1}{\theta})} (2^n n^{d-1} - M) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічним чином, беручи до уваги співвідношення (21) для функцій $f_2(x)$ і $g(x)$, легко довести, що має місце наступна порядкова нерівність

$$e_M^{\perp}(B_{1,\infty}^{\Omega})_q \gg \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

Наведемо два зауваження, що стосуються найкращих M – членних ортогональних тригонометричних наближень класів H_1^{Ω} та $B_{1,\theta}^r$ в просторі L_q, і які є наслідком результату теореми 1.

***Зауваження* 1.** Покладаючи в теоремі 1 $\theta = \infty$ отримаємо наступну порядкову рівність

$$e_M^{\perp}(H_1^{\Omega})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

***Зауваження* 2.** Якщо $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, де $r_1 > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\}$, то при $1 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ має місце оцінка

$$e_M^{\perp}(B_{1,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

яка встановлена в роботі [9].

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$, *таких що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{27}$$

Доведення. Оцінка зверху в (27) випливає з результатів робіт [18] та [15], в яких встановлені точні за порядком оцінки верхніх граней відхилень східчастих гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1<p<\infty$, та $B^{\Omega}_{1,\theta}$ відповідно, в рівномірній метриці:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{28}$$

Підберемо за заданим $M\in\mathbb{N}$ число n із співвідношення $M\asymp 2^n n^{d-1}$, тоді, враховуючи (28), будемо мати

$$e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

За заданим $M\in\mathbb{N}$ підберемо число n із співвідношень $M\asymp 2^n n^{d-1}$, $2^n n^{d-1}\geq 4M$ і розглянемо функції

$$f_3(x)=C_8\omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\sum_{(s,1)=n+1}f_s(x),\quad C_8>0,$$

та

$$f_4(x)=C_9\omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\sum_{(s,1)=n+1}f_s(x),\quad C_9>0,$$

де

$$f_s(x)=\prod_{j=1}^{d}(V_{2^{s_j+1}}(x_j)-V_{2^{s_j}}(x_j)).$$

Поскільки (див., наприклад, [14, с. 66])

$$||f_s||_p \asymp 2^{||s||_1(1-\frac{1}{p})},\quad 1\leq p\leq\infty,$$

то неважко перевірити, що при відповідних значеннях сталих C_8 і C_9 функції $f_3(x)$ та $f_4(x)$ належать до класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1\leq\theta<\infty$, та $B^{\Omega}_{p,\infty}$ відповідно.

Нехай $S_M(f_3, x)$ — частинна сума, яка складається з M довільних гармонік ряду Фур'є функції $f_3(x)$. Поскільки (див., наприклад, [14, с. 66])

$$\Big\| \sum_{(s,1)=n+1} f_s(x) \Big\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

то

$$||f_3(x) - S_M(f_3, x)||_\infty \geq ||f_3(x)||_\infty - ||S_M(f_3, x)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} (2^n n^{d-1} - M) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічно, можна показати, що

$$||f_4(x) - S_M(f_4, x)||_\infty \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

Оцінка знизу, а разом з нею й теорема доведена.

***Зауваження* 3.** При виконанні умов теореми 2 для $\theta = \infty$ має місце наступна порядкова рівність

$$e_M^{\perp}(H_p^{\Omega})_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, де $r_1 > \frac{1}{p}$, то при $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ має місце оцінка

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r)_\infty \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}} \left(\log^{d-1} M \right)^{r_1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{\theta}},$$

яка встановлена в роботі [19].

1. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — Т. 219. — С. 356–377.
2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483–522.
3. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — V. 20. — P. 35–48.
4. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 187. — С. 143–161.
5. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 5. — С. 692–704.
6. *Белинский Э.С.* Приближение "плавающей"системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Яросл. ун-т, — 1988. — С. 16–33.
7. *Романюк А.С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 1. — С. 109–121.
8. *Романюк А.С.* Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 1. — С. 80–89.
9. *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 68–97.
10. *Стасюк С.А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Математика та її застосування. Праці ІМ НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — Т. 35. — С. 172–194.
11. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969. — 480 с.

12. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — Т. 38. — С. 244–278.
13. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — V. 39. — P. 889–906.
14. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.
15. *Федуник О.В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України, Київ. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 268–294.
16. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
17. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
18. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 11. — С. 1551–1559.
19. *Романюк А.С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 247–261.