Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 143-150

УДК 517.5

**П. В. Задерей** (Київ. нац. ун–т технологій та дизайну)
**Р. В. Товкач** (Волин. держ. ун–т, Луцьк)

# УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФАБЕРА ВСЕРЕДИНІ ОБЛАСТІ

*Одержано умови на коефіцієнти, при яких ряд Фабера збігається до даної функції рівномірно всередині області.*

Нехай скінченна однозв'язна область $G$ обмежена спрямлюваною жордановою кривою $\Gamma$, і функція $z = \Psi(w)$ відображає конформно і однолистно область $D_\infty = \{w \in C \cup (\infty) : |w| > 1\}$ на зовнішність $G_\infty$ області $G$ при умовах

$$\Psi(\infty) = \infty, \quad \Psi'(\infty) > 0.$$

Позначимо через $z = \psi(w)$ функцію, яка відображає конформно і однолистно круг $|w| < 1$ на область $G$ при умовах

$$\psi(0) = z_0, \quad \psi'(0) > 0,$$

де $z_0$ — деяка фіксована точка області $G$.

Нехай, далі, $\gamma_r$ — образ кола $|w| = r$, де $0 < r < 1$, при відображенні $z = \psi(w)$. Якщо для аналітичної в області $G$ функції $f(z)$ при довільних $r,\ 0 < r < 1$, виконується нерівність

$$\int\limits_{\gamma_r} |f(z)|^p |dz| \leq M, \quad p > 0,$$

то кажуть, що функція $f(z)$ належить класу $E_p$ в області $G$.

Через $F_k(z) \forall\ k \geq 0$ будемо позначати многочлени Фабера, побудовані для області $G$. Нехай також задана деяка послідовність комплексних чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ряд

**© П. В. Задерей, Р. В. Товкач, 2007**

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z) \tag{1}$$

називається рядом за многочленами Фабера. Якщо коефіцієнти цього ряду виражаються через функцію $f(z)$ за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))}{t^{n+1}}dt, \quad n = 0, 1, ..., \tag{2}$$

де $t = \Phi(\zeta)$ — функція, обернена до $\Psi(t)$, то кажуть, що ряд (1) є рядом Фабера функції $f(z),\ z \in G$.

Нехай задана послідовність чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, яка задовольняє умови

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta c_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{\Delta c_{k-l} - \Delta c_{k+l}}{l} \right| < \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{5}$$

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ , \quad |t| < 1. \tag{6}$$

Оскільки коефіцієнти ряду (6) задовольняють умови (3)–(5), то послідовності $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$, де $c_k = \alpha_k - i\beta_k$, також задовольняють умови (3)–(5), а тому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

і спряжений до нього ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-\beta_k \cos kx + \alpha_k \sin kx)$$

є рядами Фур'є сумовних функцій.

Добре відомо (див. [1, с. 156]), що ряд (6), у якого дійсна і уявна частини граничної функції сумовні, є рядом Тейлора деякої функції $\varphi(\Psi(t)) \in H^1$. Отже,

$$S[\varphi(\Psi(e^{i\theta}))] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta},$$

і

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\Psi(t))}{\Psi(t) - z} dt \tag{7}$$

є функцією з класу $E_1$. Тоді ця функція може бути розкладена в ряд Фабера

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(\Psi(t))\Phi'(\Psi(t))\Psi'(t)}{t^{n+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(\Psi(t))}{t^{n+1}} dt = c_k,$$

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z) \tag{8}$$

Метою даної роботи є встановлення умов, при яких ряд Фабера (8) збігається до даної функції рівномірно всередині області $G$. Одержані результати доповнюють результати П.К. Суєтіна [2].

**Теорема 1.** *Нехай* $|\Psi'(e^{i\theta})| \leq 1$ *і послідовність* $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умови* (3)–(5). *Тоді умова*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|c_{n+k}|}{k} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

*є достатньою для того, щоб ряд Фабера* (8) *функції* $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ *збігався рівномірно всередині області* $G$.

***Доведення.*** Оскільки $z \in F \subset G$, то

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k F_k(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{t^k \Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(\Psi(t))\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt - \sum_{k=0}^{n} c_k \int\limits_{|t|=1} \frac{t^k \Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|t|=1} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} \left( \varphi(\Psi(t)) - \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{2\pi \rho(F, \Gamma)} \int\limits_{|t|=1} \left| \varphi(\Psi(t)) - \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \right| dt.$$

В роботі [3] встановлено, що для того, щоб ряд Тейлора, коефіцієнти якого задовольняють умови (3)–(5), збігався в метриці $L_1$, необхідно і достатньо виконання умови (9). Це і є завершенням доведення теореми.

***Зауваження.*** Умови (4)–(5) називають умовами Боаса–Теляковського. Вони є одними з найбільш загальних умов на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції. Проте, відомі і менш загальні умови, але зручні для перевірки, які забезпечують інтегровність суми тригонометричного ряду. Зокрема, одною з таких умов є умова квазівипуклості

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 c_k| < \infty. \tag{10}$$

**Наслідок.** *Нехай* $|\Psi'(e^{i\theta})| \leq 1$ *і послідовність* $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умови* $(3), (5)$ *і* $(10)$. *Тоді умова*

$$c_k \ln k \to 0, \qquad k \to \infty,$$

*є достатньою для того, щоб ряд Фабера* $(8)$ *збігався до функції* $(7)$ *абсолютно і рівномірно всередині області* $G$.

**Теорема 2.** *Якщо контур* $\Gamma$ *є спрямлюваною жордановою кривою і, крім того, виконується умова*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 F_k(z)| < \infty, \qquad \forall z \in G, \tag{11}$$

*то для того, щоб будь-яка аналітична в* $G$ *функція така, що*

$$|f(z)| \leq C, \qquad \forall z \in G$$

*розкладалась всередині області* $G$ *в рівномірно збіжний ряд Фабера, достатньо, щоб*

$$F_k(z) = o\left(\frac{1}{\ln k}\right). \tag{12}$$

***Доведення.*** Оскільки для довільного фіксованого $z \in G$ виконується $|f(z)| \leq C$, то функція $f(z)$ має майже скрізь на $\Gamma$ кутові граничні значення, які утворюють сумовну на $\Gamma$ функцію. Тому, використовуючи представлення (2), маємо

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k F_k(z)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))}{t^{k+1}} dt \cdot F_k(z) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt - \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))}{t^{k+1}} dt \cdot F_k(z) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|t|=1} f(\Psi(t)) \left( \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \left| \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \right| |dt| = C \int\limits_{0}^{2\pi} \left| \frac{\Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta})-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{e^{i(k+1)\theta}} \right| d\theta.$$

Відомо (див. [4, с. 362]), що коли границя $\Gamma$ області спрямлювана, то для довільної $z \in G$ функція $\frac{\Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta})}$ сумовна і розкладається по $\theta$ в ряд Фур'є, тобто

$$S \left[ \frac{\Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta}) - z} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{e^{ik\theta}}.$$

Оскільки коефіцієнти цього ряду задовольняють умову (11), то для збіжності в метриці $L_1$ цього ряду (див. [5, 6]), необхідно і достатньо виконання умови (12). Тому ряд Фабера (8) збігається в кожній фіксованій точці $z \in G$, і залишилось тільки показати рівномірну збіжність цього ряду на замкненій множині $F \subset G$. Згідно з принципом компактності і теоремою Віталі (див. [7], розділ 14 §1), достатньо показати рівномірну обмеженість частинних сум ряду Фабера (8) на множині $F$.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k F_k(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} F_k(z) \int\limits_{|t|=1} \frac{f(\Psi(t))}{t^{k+1}} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\Bigg| \int\limits_{|t|=1} f(\Psi(t)) \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} dt \Bigg| \leq \frac{C}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \Bigg| \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} \Bigg| |dt| =$$

$$= C \int\limits_{0}^{2\pi} \Bigg| \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(z)}{e^{i(k+1)\theta}} \Bigg| d\theta. \tag{13}$$

З результатів А.М. Колмогорова [5] і С.О. Теляковського [6] відомо, що необхідною і достатньою умовою обмеженості частинних сум ряду Фур'є в метриці $L_1$ є умова

$$F_k(z) = O\left(\frac{1}{\ln k}\right). \tag{14}$$

Тому, оскільки (14) випливає з (12), то останній інтеграл в (13) рівномірно обмежений при $z \in F \subset G$. Таким чином, послідовність частинних сум ряду Фабера рівномірно обмежена. Теорема 2 доведена.

**Теорема 3.** *Нехай область $G$ обмежена спрямлюваною жордановою кривою* $\Gamma$. *Тоді ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(z), \qquad z \in G,$$

*де* $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} |F_i(z)|^2 \big( \sum\limits_{i=0}^{k} |F_i(z)| \big)^{-2}$, *збігаєтьcя абсолютно і рівномірно всередині області $G$.*

***Доведення.*** Оскільки $\Gamma$ — спрямлювана жорданова крива, то $\Psi'(t) \in H_1$, а тому і $\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} \in H_1$. Враховуючи розклад

$$\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \qquad z \in G, \quad |t| > 1$$

і нерівність Р. Вітмана [8] для коефіцієнтів даного розкладу, одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k |F_k(z)| \leq 66 \left\| \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} \right\|_{H_1} = 66 \int\limits_{|t|=1} \left| \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)-z} \right| |dt| \leq$$

$$\leq \frac{C}{\rho(F,\Gamma)}, \qquad z \in F,$$

де $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} |F_i(z)|^2 \big( \sum\limits_{i=0}^{k} |F_i(z)| \big)^{-2}$. Теорема 3 доведена.


1. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.: Наука, 1950. — 336 с.
2. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
3. *Задерей П.В.,Смаль Б.А.,Товкач Р.В.* О сходимости в среднем рядов Тейлора и Лорана // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 171–177.
4. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
5. *Колмогоров А.Н.* Sur l'ordre de grandeur des coefficient de la series de Fourier–Lebesque // Bull. Acad. polon. sci.(A), sci. math. — 1923. — P. 83–86.
6. *Теляковский С.А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коеффициентами // Мат.сб. — 1964. — Т. 63 (105), № 3. — С. 426–444.
7. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2 т. — М.: Наука, 1968. — Т. 1. — 486 с.
8. *Wittman R.* Coefficient inequalities for analytic function in $H_1$ // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1996. — V. 120. — P. 331–337.